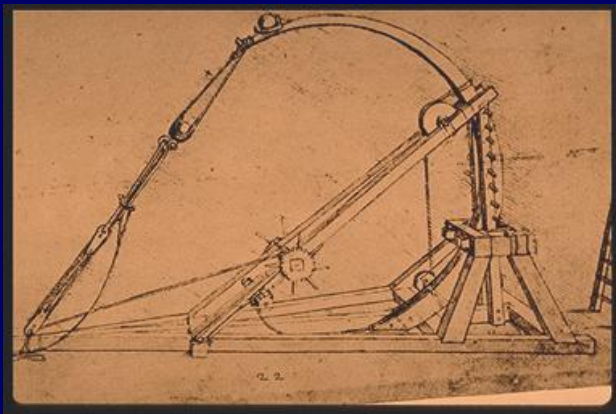




CURS 9

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

CINEMATICA

NOȚIUNI DE BAZĂ ÎN CINEMATICA

Cinemática studiază mișcările mecanice ale corpurilor, fără a lua în considerare masa acestora și acțiunile care se exercită asupra lor. Studiind numai aspectul mișcărilor din punct de vedere geometric, această parte a mecanicii se mai numește și *geometria mișcărilor*. Prin urmare, în cinematică se folosesc mărimile fundamentale de *spațiu* și *timp*.

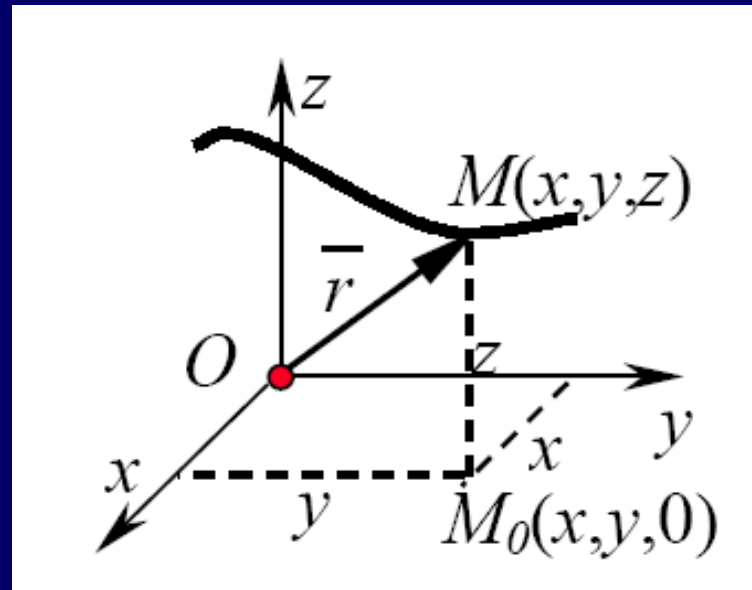
Mișcarea este o noțiune care cuprinde în sfera ei următoarele elemente: *corpul* sau *mobilul* care efectuează mișcarea, *mediul* sau *spațiul* în care se desfășoară mișcarea și *sistemul de referință* în raport cu care se studiază mișcarea.

Atunci când reperul este considerat fix mișcarea se numește *absolută*, iar când reperul este considerat mobil mișcarea se numește *relativă*.

Problema generală

Cunoașterea mișcării unui punct material implică răspunsul la două întrebări: *unde* se găsește la orice moment de timp și *cum* se mișcă față de sistemul de referință considerat. În general, răspunsul se obține în mod direct dacă este cunoscut vectorul de poziție $\bar{r}$ ca funcție de timp.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (1)$$



Această funcție vectorială trebuie să fie: continuă, uniformă (punctul nu poate ocupa simultan două poziții în spațiu), finită în modul și derivabilă de cel puțin două ori. Relația vectorială (1) reprezintă *legea (vectorială) de mișcare a punctului material*.

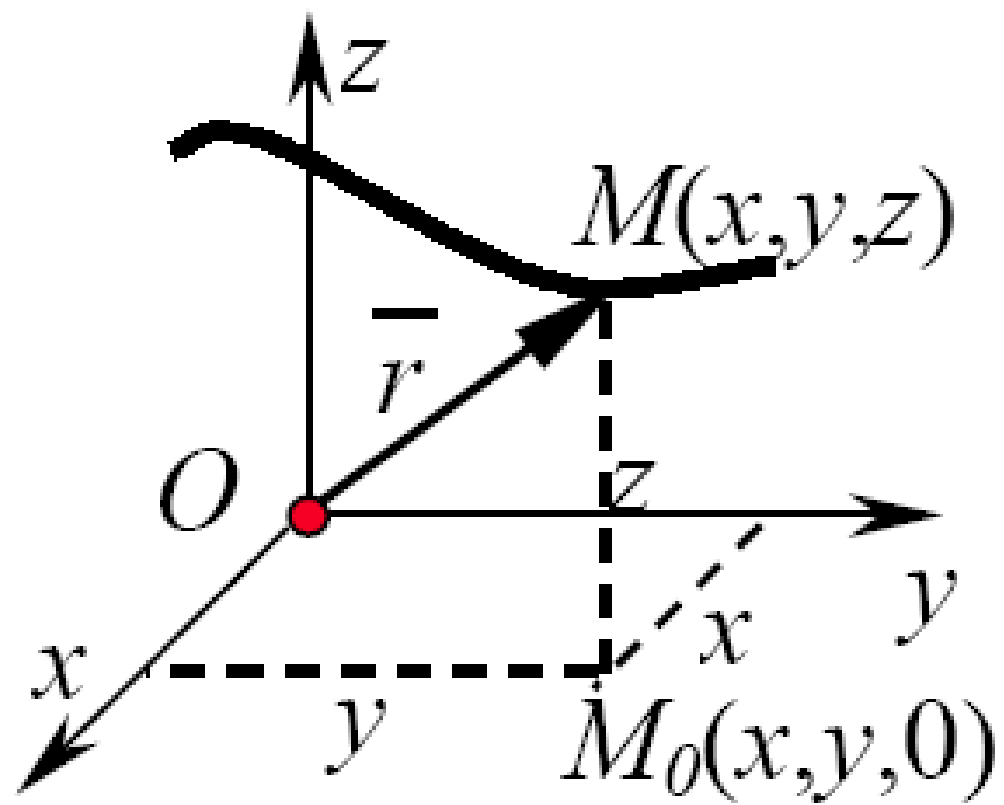
$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(t) \quad (1)$$

Vectorul $\bar{\mathbf{r}}$ este definit de trei funcții scalare (coordonate) în spațiu, de două pe o suprafață și de una pe o curbă, din care rezultă că punctul are trei, două și respectiv un grad de libertate.

Traietoria

Traietoria este locul geometric al pozițiilor succesive pe care punctul material le ocupă în spațiu, în timpul mișcării. Între traietoria și curba pe care se deplasează punctul nu există totdeauna o coincidență. Ținând cont că mișcarea începe de la un anumit moment t_0 și se termină la un alt moment t_1 , iar timpul este strict crescător, domeniul de existență al acestuia impune condiții restrictive coordonatelor geometrice.

Spre exemplu, pe un cerc, un punct poate parcurge numai un arc sau poate parcurge de mai multe ori cercul, iar pe o dreaptă poate parcurge numai un segment din aceasta, dar nu toată dreapta.



Referitor la definirea curbei traiectoriei a punctului material se impun unele precizări referitoare la gradul de mobilitate a punctului material.

a) În cazul *punctului material liber* (gradul de mobilitate este 3) traiectoria rezultă din expresia vectorului de poziție $\bar{r}(t)$ care se definește în general cu ajutorul a trei funcții scalare.

• În sistemul de referință cartezian, triortogonal, drept aceste funcții sunt:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2)$$

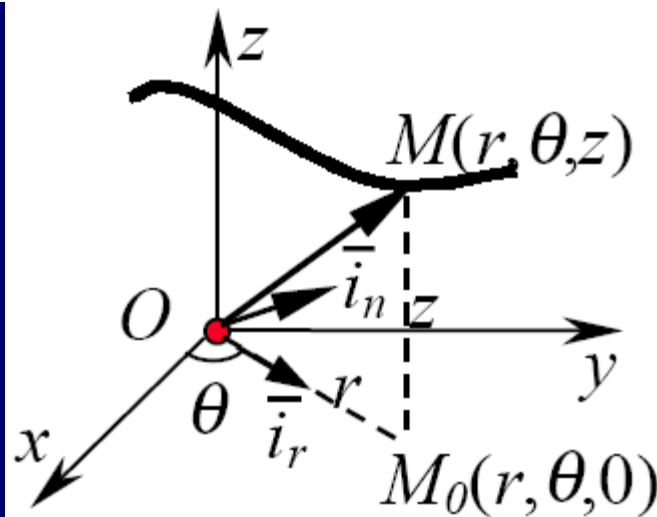
iar vectorul de poziție $\bar{r}(t)$ se poate scrie:

$$\bar{r}(t) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (3)$$

unde $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sunt versorii axelor Ox , Oy , Oz .

- În sistemul coordonatelor cilindrice cele trei funcții scalare sunt: raza polară r , unghiul polar θ și cota punctului z . Se pot scrie sub forma:

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t) \quad (4)$$



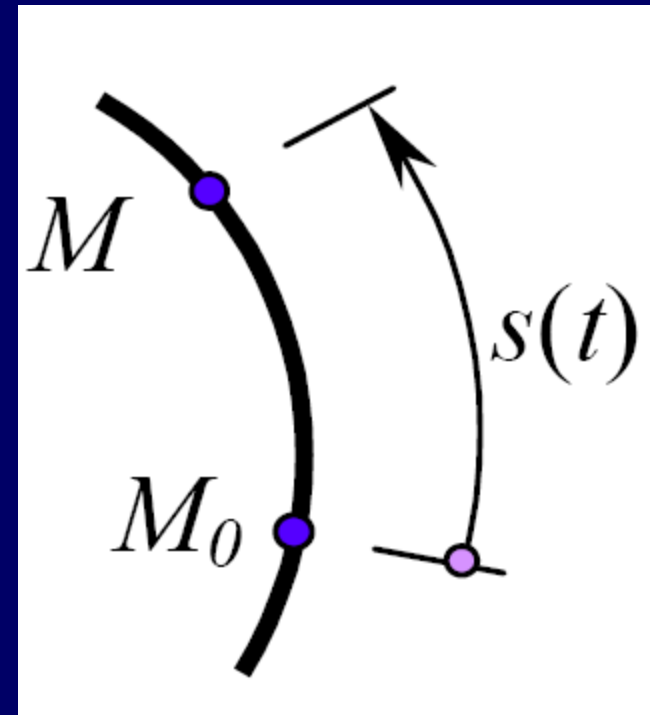
Vectorul de poziție variabil are expresia în acest caz:

$$\bar{r}(t) = r\bar{i}_r + z\bar{k} \quad (5)$$

Ecuatiile (2) și (4) sunt **ecuațiile parametrice ale traiectoriei**. Eliminând parametrul timp (t) se poate obține ecuația curbei respective.

b) În cazul **punctului material cu legături** gradul de mobilitate este mai mic decât trei (cât avea punctul material liber), dar nu mai puțin de unu. Rezultă că se studiază mișcarea punctului cu una sau două legături simple.

Spre deosebire de cazul punctului material liber, traiectoria punctului material cu legături poate avea o existență concretă, mergând până la identificarea ei cu legătura aplicată. Astfel, în cazul punctului material cu un grad de libertate și având în vedere că traiectoria este o curbă continuă și că aceasta are în orice punct o tangentă unică, atunci poziția punctului se poate stabili cu ajutorul unui singur parametru scalar: coordonata curbilinie s care reprezintă arcul de curbă, măsurat de la o origine a arcelor M_0 , în sensul mișcării.



Relația

$$s = s(t) \quad (6)$$

reprezintă *ecuația orară a mișcării* unui punct pe o curbă. De exemplu, în cazul mișcării punctului pe cerc, lungimea arcului s este egală cu produsul razei R prin unghiul la centru θ : $s = R\theta(t)$.

În cazul când legăturile sunt date explicit în enunțul problemei, trebuie ținut cont ca mișcarea (adică vectorul de poziție $\vec{r}(t)$) să fie compatibilă cu acele legături.

Viteza

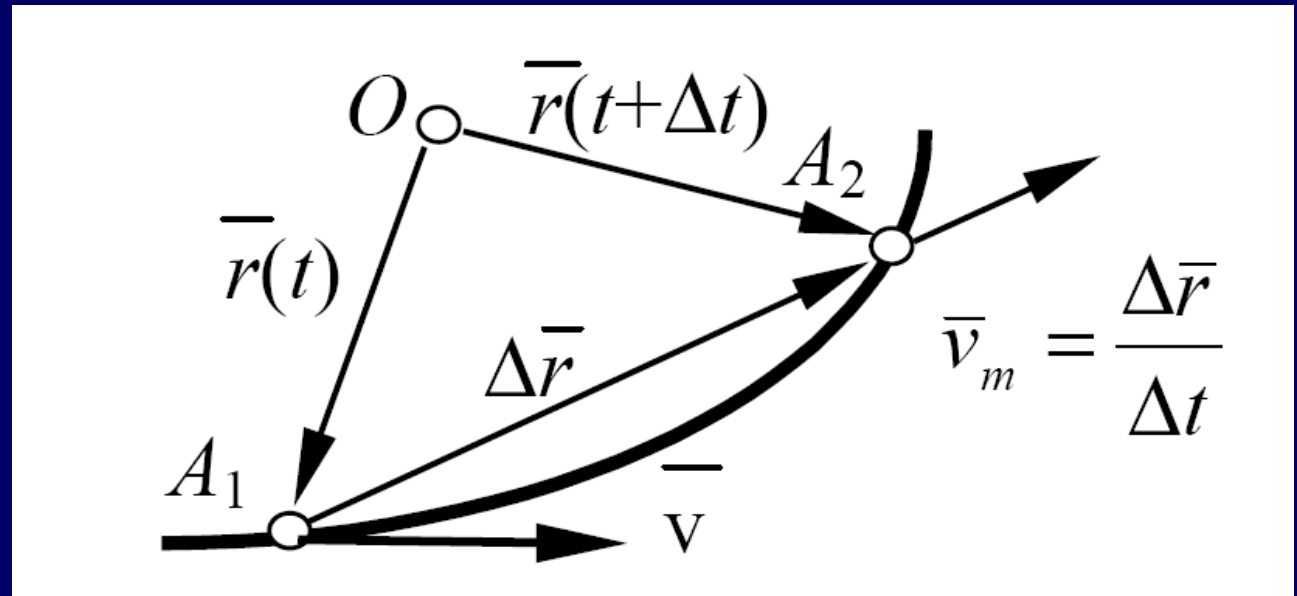
Răspunsul la întrebarea la întrebarea *cum* se mișcă punctul se obține introducând pe rând noțiunile de viteză, apoi de accelerație. Astfel, considerând două mobile, acestea pot parcurge distanțe diferite în intervale de timp egale sau aceleași distanțe în intervale de timp diferite, rezultă că introducerea unei prime noțiuni, numită *viteză*, este absolut necesară.

Se consideră un punct pe o traiectorie curbilinie mai întâi în poziția A_1 , apoi în poziția vecină A_2 . Intervalul de timp Δt pentru parcurgerea arcului A_1A_2 fiind foarte mic, se poate asimila elementul de arc cu elementul de coardă.

Se definește ca *viteză medie*, raportul

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad (7)$$

Dacă intervalul de timp tinde către zero, adică A_1 tinde către A_2 , viteza medie devine **viteza instantanee**:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}(\quad) = \dot{(\quad)}$$

Stabilirea elementelor caracteristice vectorului viteză se află din relația (8):

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} = \dot{s} \bar{\tau} \quad (9)$$

deoarece

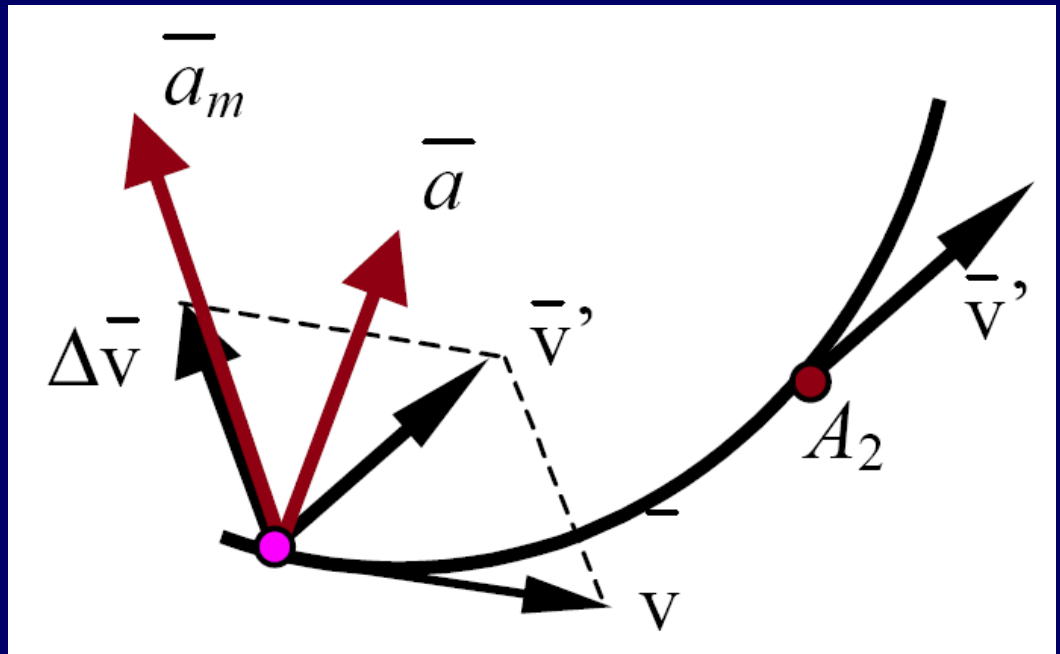
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{|\Delta \bar{r}|} = \bar{\tau}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta s} = 1; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad (10)$$

unde s-a notat cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei la curbă. Prin urmare, viteza este un vector legat, cu direcția tangentă la curbă și sensul dat de sensul mișcării. Din punct de vedere dimensional, ecuația vitezei este $[v] = LT^{-1}$, iar ca unitate de măsură în SI este “metru pe secundă (m/s)”.

Accelerația

Noțiunea de **accelerație** este introdusă pentru a caracteriza modul de variație al vitezei în timpul mișcării, ca direcție, sens și modul. Variația vitezei $\Delta \vec{v}$ între două poziții vecine A_1 și A_2 , raportată la intervalul de timp Δt se definește ca o mărime medie vectorială și anume, accelerația medie:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (11)$$



Accelerația instantanee $\bar{a}$ (numită simplu **acclerație**) se obține prin trecere la limită, adică:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \quad (11)$$

Ca și viteza, accelerația este un vector legat punctului în mișcare. Ecuația de dimensiuni a accelerației este $[a] = LT^{-2}$. Unitatea de măsură pentru accelerație în SI este m/s^2 .

Studiul mișcării punctului material în sistemul de coordonate cartezian

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

unde: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor sistemului de referință cartezian;
 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sunt proiecțiile vitezei pe aceleași axe;
 $|\bar{v}|$ este modulul vitezei.

Studiul mișcării punctului material în sistemul de coordonate polar (cilindrice)

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$\rho = \rho(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$z = z(t)$$

$$\bar{r} = r\bar{\rho}$$

$$\bar{v} = \dot{\rho}\bar{i}_r + r\dot{\varphi}\bar{i}_\varphi + \dot{z}\bar{i}_z$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$

unde:

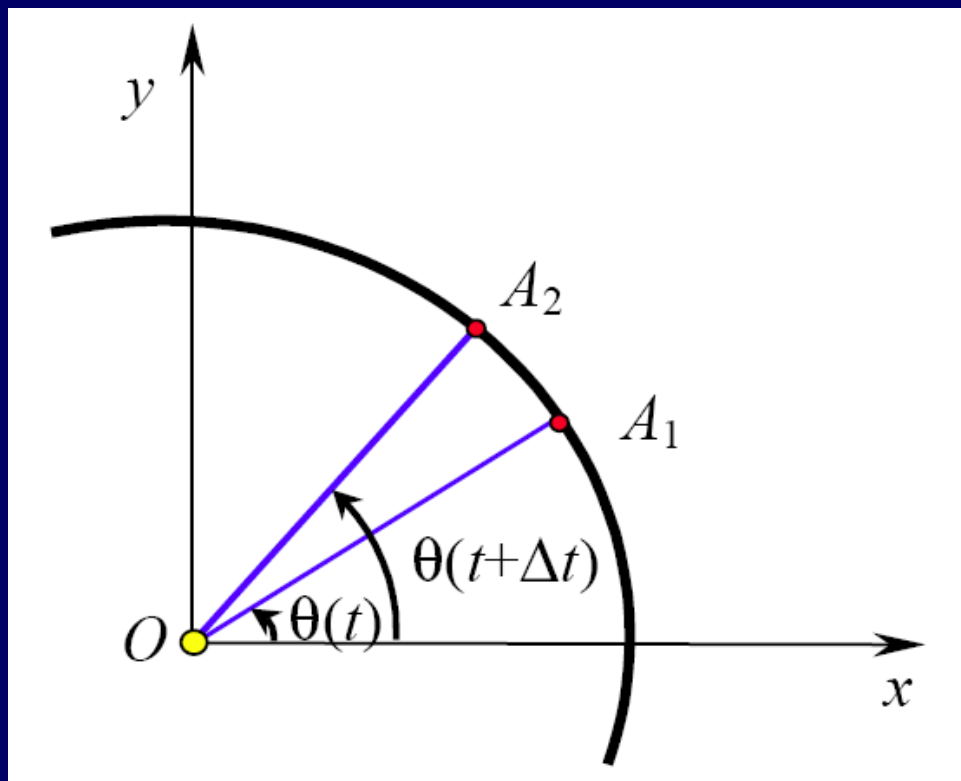
- $\bar{i}_r$ este versorul proiecției vectorului de poziție în planul xOy ;
- $\bar{i}_\varphi$ este versorul direcției perpendiculare pe proiecția vectorului de poziție în planul xOy ;
- $\bar{i}_z$ este versorul axei Oz .

Viteza și accelerația unghiulară

Poziția unui punct pe o traiectorie circulară poate fi precizată cu ajutorul unui unghi polar θ , raportat la o axă fixă:

$$\theta = \theta(t) \quad (12)$$

Pe cercul din figura alăturată se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 .



Analog cu viteza medie, **viteza unghiulară medie** se definește:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (13)$$

Viteza unghiulară instantanee este:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (14)$$

iar **acclerația instantanee**

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \quad (15)$$

Dimensiunile acestor mărimi fizice sunt $[\omega] = T^{-1}$ și $[\varepsilon] = T^{-2}$, iar unitățile lor de măsură sunt respectiv *rad/s* și *rad/s²*.

Clasificarea mișcărilor

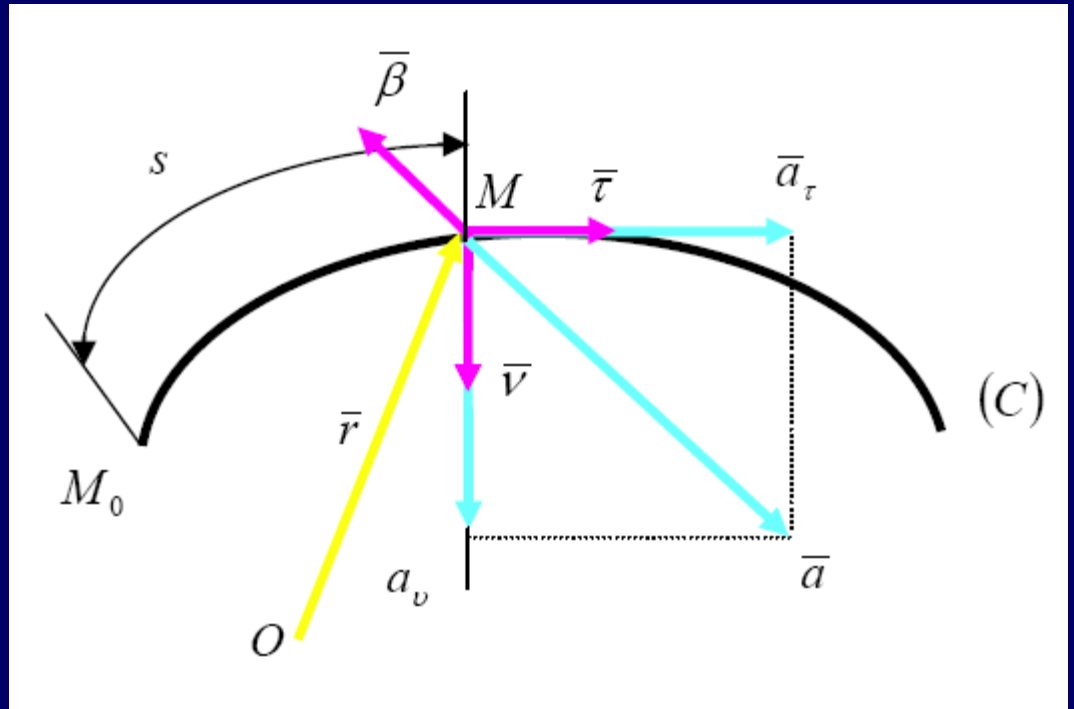
Criteriile de clasificare folosite în mod obișnuit sunt după forma traiectoriei (rectilinie sau curbilinie) și după modul de variație a vitezei sau a accelerației.

Mișcarea în care viteza este constantă în modul se numește *mișcare uniformă*, iar mișcarea în care viteza este variabilă se numește *mișcare variată*.

Dacă viteza este o funcție liniară în raport cu timpul, mișcarea se numește *uniform variată*. Se cunosc două posibilități: dacă viteza și componenta tangențială a accelerației au același sens, mișcarea este *uniform accelerată*, iar dacă au sensuri contrare, mișcarea este *uniform încetinită*.

Studiul mișcării punctului material în triedrul lui Frenet

Se consideră un punct material M în mișcare pe o traiectorie C , poziționat prin arcul de curbă s față de poziția inițială M_0 , ca în figură.



Triedrul lui Frenet

Triedrul lui Frenet este un sistem triortogonal drept, în ordinea axelor τ, υ, β , cu originea mobilă plasată în punctul material M în mișcare și având următoarele axe:

- axa tangentă la curbă, de versor $\bar{\tau}$, orientat pozitiv în sensul mișcării, adică în sensul creșterii arcului s ;
- axa normală principală, de versor $\bar{\upsilon}$, cu direcția și sensul către centrul de curbura;

Planul $(\bar{\tau}, \bar{\upsilon})$ se numește plan osculator.

- axa binormală, de versor $\bar{\beta}$, perpendiculară pe planul osculator și cu sensul pozitiv orientat astfel încât ordinea τ, υ, β să formeze un sistem drept.

Făcând apel la ***formulele lui Frenet***:

unde ρ este curbura, obținem:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{ds}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \bar{\tau} = v \bar{\tau}$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} \\ \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\upsilon} \end{cases} \quad (16)$$

(17)

Deci viteza punctului material are direcția axei normale principale.

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{ds}{ds} = \frac{d(v\bar{\tau})}{ds} \frac{ds}{dt} = \left(\frac{dv}{ds} \bar{\tau} + \frac{d\bar{\tau}}{ds} v \right) \frac{ds}{dt} = \\ &= \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} \bar{\tau} + \frac{1}{\rho} \bar{v} v \dot{s} = \dot{v} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{v}\end{aligned}\quad (18)$$

Din relația (18) rezultă că accelerația punctului material are două componente în planul osculator:

$$\begin{cases} a_{\tau} = \dot{v} = \ddot{s} \\ a_v = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad (19)$$

Accelerația tangențială a_{τ} ne oferă informații în legătură cu viteza de variație a mărimii vectorului viteză, iar accelerația normală a_v oferă informații legate de viteza de variație a direcției vectorului viteză.

Cazuri particulare de mișcare ale punctului material

a) **mișcare rectilinie uniformă**: Mișcarea punctului material este rectilinie și uniformă atunci când traiectoria punctului este o dreaptă și modulul vitezei este constant în timp.

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 t \\v &= v_0 = ct.\end{aligned}\quad (20)$$

b) **mișcare rectilinie uniform variată**: Traiectoria punctului material este o dreaptă și modulul accelerației este constant în timp.

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\v &= v_0 + a_0 t \\a &= a_0 = ct.\end{aligned}\quad (21)$$

c) mișcare circulară uniformă:

$$\begin{aligned}v &= \omega R \\a &= \omega^2 R \\ \omega &= ct.\end{aligned} \quad (22)$$

d) mișcare rectilinie oscilatorie armonică:

$$\begin{aligned}x &= A \sin(\omega t + \varphi) \\v &= \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\a &= \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \\A &= ct., \quad \omega = ct., \quad \varphi = ct.\end{aligned} \quad (23)$$