CURS 8

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

GEOMETRIA MASELOR.
CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECTIUNILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR

1. Centrul de greutate şi centrul maselor

2. Teoremele lui Guldin - Pappus

3. Momente statice. Teorema momentelor statice

4. Momente de inerție. Raze de inerție

5. Variația momentelor de inerție la translația axelor

6. Variația momentelor de inerție la rotirea axelor

7. Direcții principale de inerție. Momente de inerție principale

$$A = \int_A dA$$

$$S_y = \int_A z dA \; ; \; S_z = \int_A y dA$$

$$y_G = \frac{1}{A}\int_A y dA \; ; \; z_G = \frac{1}{A}\int_A z dA$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \; ; \; z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

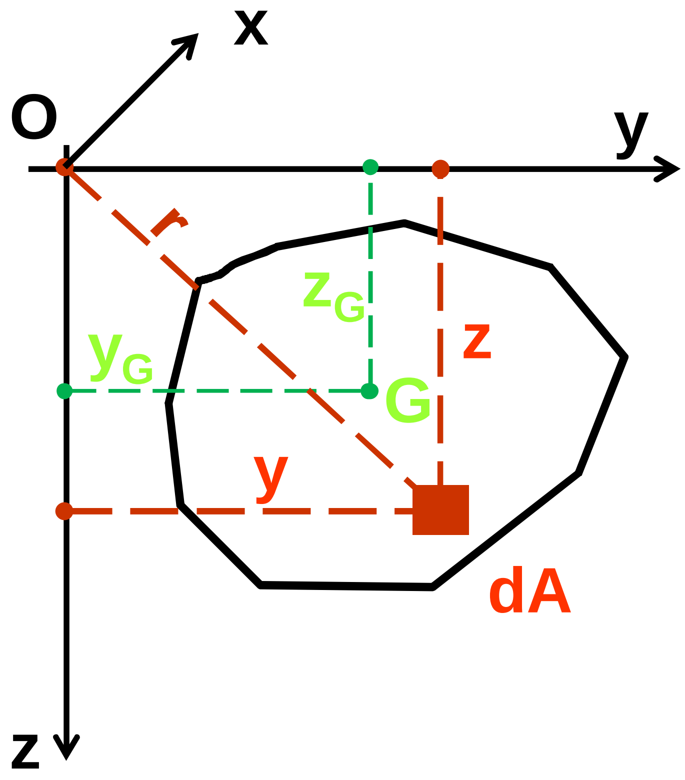
$$I_y = \int_A z^2 dA \; ; \; I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

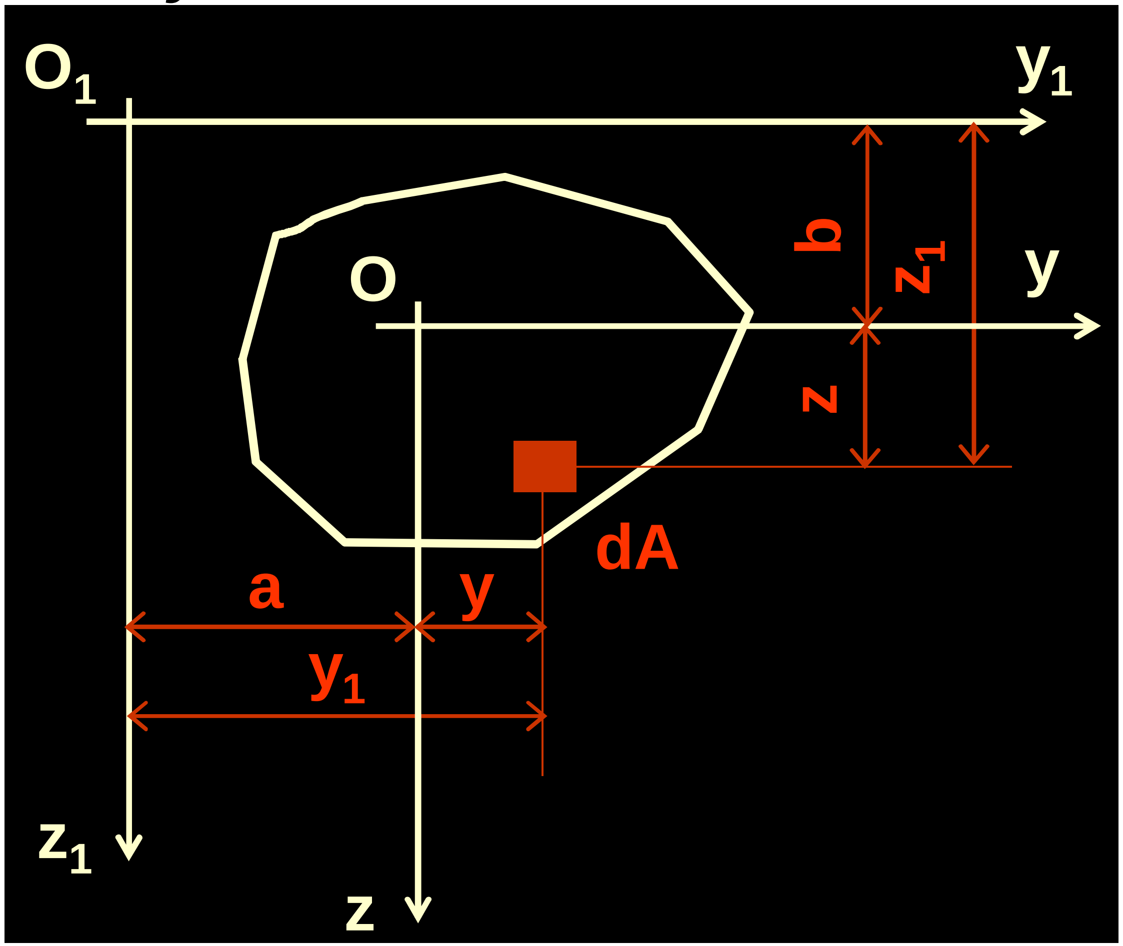
$$r^2 = z^2 + y^2$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$



5. Variația momentelor de inerție la translația axelor

Fie o figura plana de arie *A*, raportata la un sistem de axe ortogonale *Oyz*, pentru care sunt cunoscute momentele de inerție in raport cu axele *Oy* si *Oz*. Sa se determine momentele de inerție in raport cu noile axe O_1y_1 si O_1z_1 paralele cu primele.



$$z_1 = z + b$$

$$y_1 = y + a$$

a **si *b* sunt coordonatele originii sistemului vechi *Oyz* in noul sistem de coordonate $O_1y_1z_1$.**

⇒ momentele de inerție axiale:

$$I_{y1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z+b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b\int_A z dA + b^2\int_A dA$$

$$= I_y + 2bS_y + b^2 A$$

$$I_{z1} = I_z + 2aS_z + a^2 A$$

⇒ momentul de inerție centrifugal:

$$I_{y_1 z_1} = \int_A (y+a)(z+b) dA = I_{yz} + aS_y + bS_z + abA$$

S_y si S_z reprezintă momentele statice ale figurii in raport cu axele *Oy* si *Oz*.

⇒ Daca axele *Oy* si *Oz* sunt centrale, atunci momentele statice in raport cu ele sunt nule, iar momentele de inerție in raport cu axele paralele cu cele centrale devin:

$$
+\left|\begin{array}{l} I_{y1} = I_y + b^2 A \\ I_{z1} = I_z + a^2 A \end{array}\right.
$$
$$
I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA \qquad (1)
$$

Relațiile se folosesc pentru calculul momentelor de inerție ale figurilor compuse.

$$
I_{y1} + I_{z1} = I_y + I_z + (a^2 + b^2)A
$$
$$
\Rightarrow I_{o1} = I_o + (a^2 + b^2)A
$$

Daca sunt cunoscute momentele de inerție in raport cu nişte axe oarecare, pentru axele ce trec prin centrul de greutate al figurii, paralele cu axele date, rezulta:

$$I_y = I_{y1} - b^2 A$$

$$I_z = I_{z1} - a^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_1 z_1} - abA$$

⇒ Momentele de inerție in raport cu axele centrale au cea mai mica valoare in comparație cu momentele de inerție pentru oricare alte axe paralele cu primele.

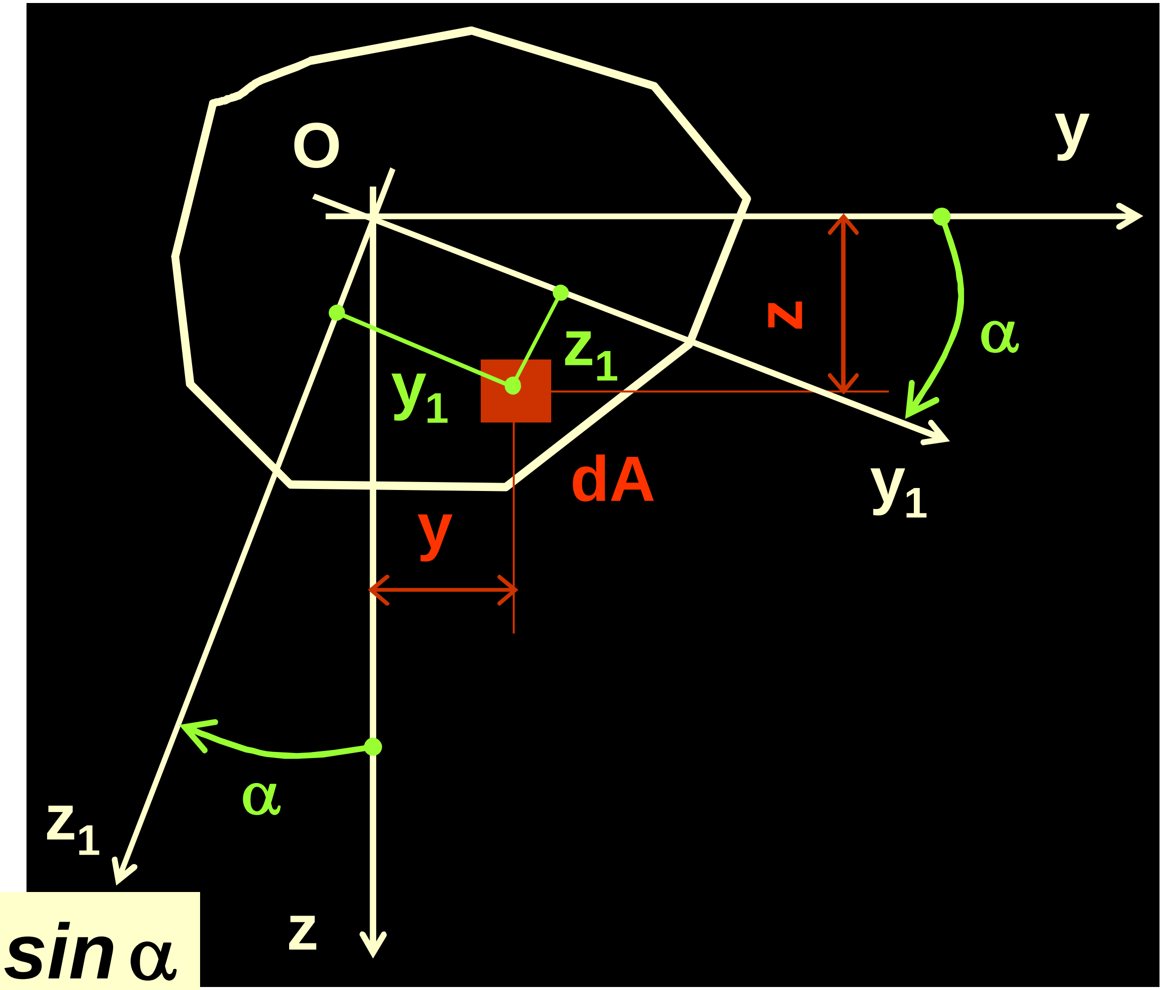
6. Variația momentelor de inerție la rotirea axelor

Cunoscând momentele de inerție I_y, I_z, I_{yz} ale unei figuri plane in raport cu un sistem ortogonal de axe *Oyz* din planul ei, sa se determine momentele de inerție in raport cu un nou sistem de axe ortogonal Oy_1z_1, rotit fata de primul cu un unghi α, considerat pozitiv daca este descris in sens orar.

Coordonatele unui element de arie *dA* in noul sistem de axe, funcție de coordonatele din vechiul sistem sunt:

$$y_1 = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$
$$z_1 = z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$

6. Variația momentelor de inerție la rotirea axelor



$$y_1 = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$

$$z_1 = z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$

$$y_1 = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$
$$z_1 = z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha)^2 dA =$$
$$= \cos^2\alpha \underbrace{\int_A z^2 dA}_{=I_y} + \sin^2\alpha \underbrace{\int_A y^2 dA}_{=I_z} - 2\sin\alpha\cos\alpha \underbrace{\int_A yzdA}_{=I_{yz}}$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha)^2 dA =$$
$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 dA + \sin^2\alpha \int_A z^2 dA + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A yzdA$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \sin\alpha\cos\alpha \left(\int_A z^2 dA - \int_A y^2 dA \right) +$$
$$+ \cos^2\alpha \int_A yzdA - \sin^2\alpha \int_A yzdA$$

$$+\left|\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{z_1} &= I_y\sin^2\alpha + I_z\cos^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \end{aligned}\right.$$

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

Se observa ca:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z$$

$\Rightarrow$ Suma momentelor de inerție axiale in raport cu doua axe ortogonale, pentru aceeaşi origine, este un invariant.

Cunoscând ca:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ ;\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} I_{y_1} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{z_1} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{y_1z_1} &= \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

7. Axe principale de inerție.
Momente de inerție principale

Din relațiile (2) rezulta ca mărimea momentului de inerție in raport cu o axa oarecare depinde de unghiul de înclinare a acestei axe fata de o axa de referința.

Se poate determina o valoare α_o a unghiului, pentru care momentul de inerție atinge o valoare extrema. Pentru evaluarea acestui extrem se va anula prima derivata a expresiei I_{y1} si se va înlocui $\alpha = \alpha_o$.

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = -2I_y \cos\alpha_o \sin\alpha_o + 2I_z \sin\alpha_o \cos\alpha_o - 2I_{yz} \cos 2\alpha_o = \tag{3}$$

$$= -2\left(\frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_o + I_{yz}\cos 2\alpha_o\right) = -2[I_{y_1 z_1}]_{\alpha=\alpha_o} = 0$$

$$tg\, 2\alpha_o = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \tag{4}$$

Relația (3) arata ca derivata momentului de inerție I_{y1} in raport cu unghiul α reprezintă dublul momentului de inerție centrifugal al secțiunii luat cu semn minus.

Similar se obține:

$$\frac{dI_{z_1}}{d\alpha} = 2[I_{y_1 z_1}]_{\alpha=\alpha_o} = 0$$

Relația (4) conduce la doua valori pentru unghiul α_o: α_o' si $\alpha_o' + \pi/2$. Din relația (4) se observa ca unghiul α_o' nu poate depăși unghiul $\pi/4$.

$\Rightarrow$ Exista doua axe normale intre ele pentru care momentele de inerție axiale iau valori extreme, iar momentul de inerție centrifugal al secțiunii este nul!

$\Rightarrow$ *Axe principale de inerție;*

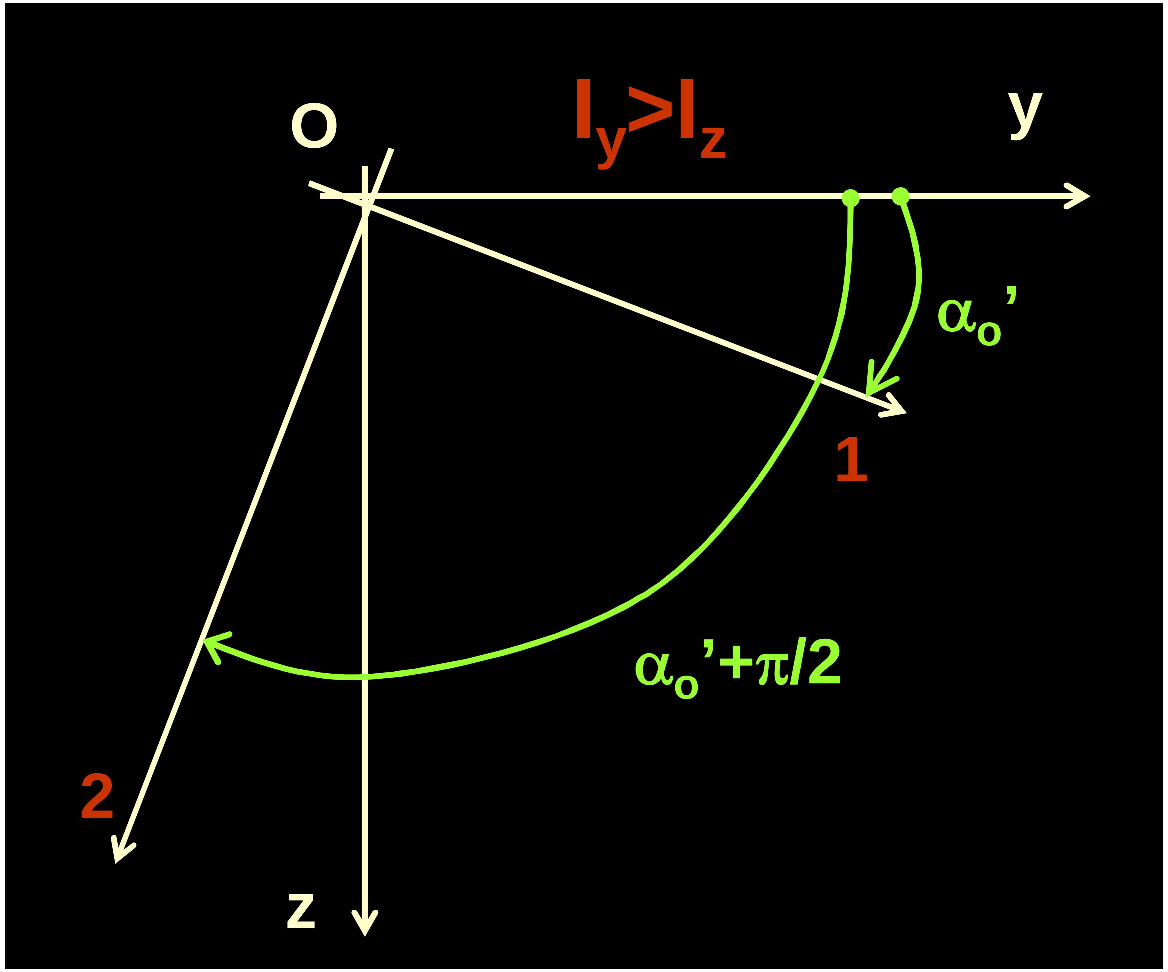
$\Rightarrow$ *Momente de inerție principale.*

Axelor principale de inerție le corespund doua valori pentru momentele de inerție principale. Deoarece suma momentelor de inerție fata de cele doua axe normale intre ele reprezintă un invariant la rotirea axelor, rezulta ca unei axe principale ii corespunde cel mai mare moment de inerție $I_{max}=I_1$, iar celeilalte axe – valoarea minima $I_{min}=I_2$.

Din relația (4) nu se poate deduce pentru care din axele α_o' si $\alpha_o' + \pi/2$ se obține I_1, respectiv I_2, fiind necesar sa se studieze semnul derivatei a doua a lui I_{y1}.

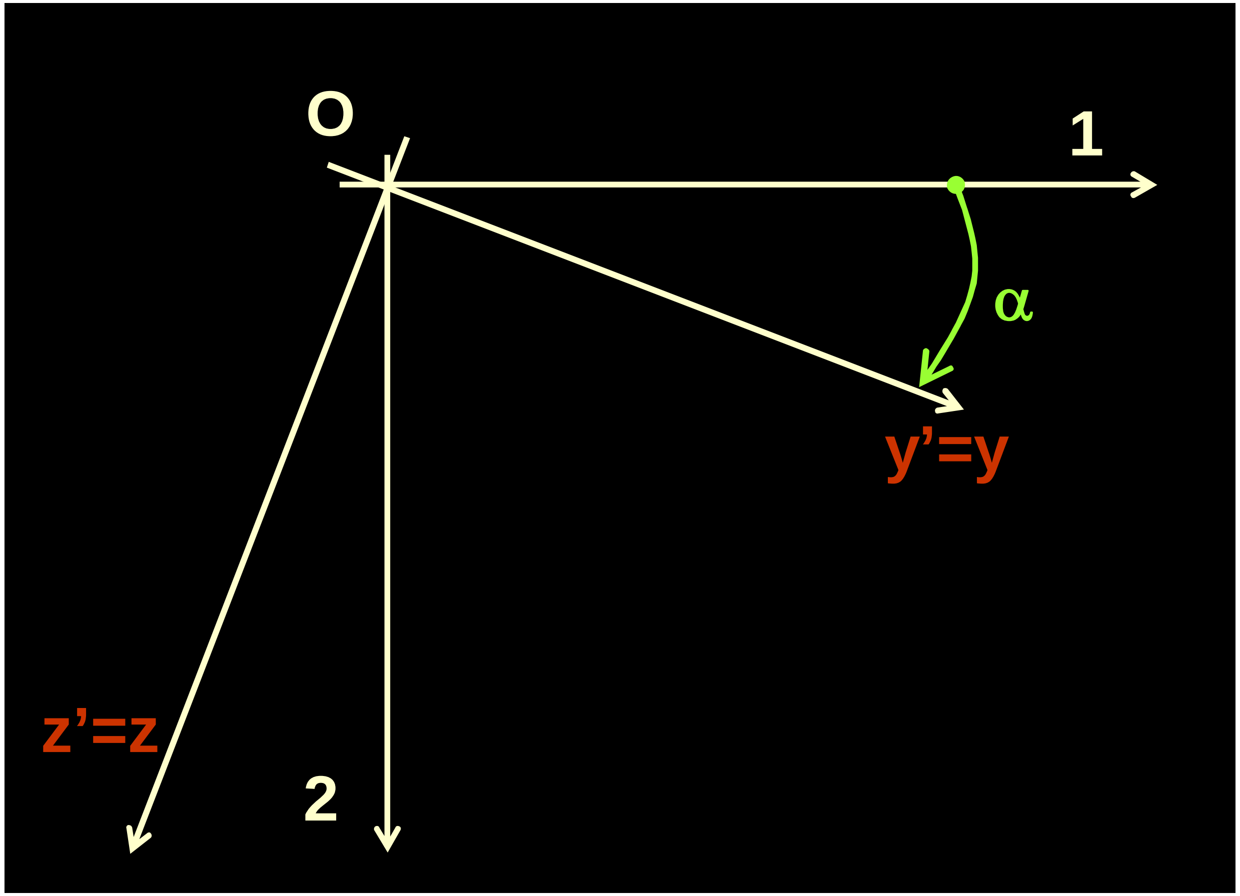
Raționament: **Presupunem $I_{yz}>0$ si $I_y>I_z$, din relația (4) rezulta ca α_o' se afla in cadranul IV. Deoarece $dI_{y1}/d\alpha=-2I_{y1z1}$ si din relația (2) rezulta $I_{y1z1}>0$, se deduce ca, la o creştere negativa a unghiului α, momentul de inerție I_{y1} va creste atingând o valoare extrema pentru α_o', valoare care va da momentul de inerție maxim $I_{max}=I_1$. Valoarea minima $I_{min}=I_2$ se va obține pentru axa de direcție $\alpha_o'+\pi/2$.**

Daca $I_{yz}>0$ si $I_z>I_y$, unghiul α_o' va fi situat in cadranul I si cum $I_{y1z1}>0$ pentru $\alpha<\alpha_o'$, rezulta ca la o creştere a unghiului α, momentul de inerție I_{y1} va descreşte atingând o valoare extrema pentru $\alpha=\alpha_o'$, valoare care va da momentul de inerție minim $I_{min}=I_2$. Valoarea maxima $I_{max}=I_1$ se va obține pentru axa de direcție $\alpha=\alpha_o'+\pi/2$.



Analog, daca $I_{yz}<0$, se ajunge la concluzia ca axa *1* (de maxim) face întotdeauna cel mai mic unghi cu aceea dintre axe (*y* sau *z*) fata de care momentul de inerție axial are cea mai mare valoare.

Relațiile (2) sunt valabile pentru oricare sistem ortogonal de axe rotit cu un unghi α fata de sistemul *Oyz*. Se poate presupune ca axele *Oy* si *Oz* sunt axele principale de inerție *1* si *2*, având fata de acestea momentele principale de inerție I_1 si I_2. Sistemul de axa *Oy'z'* rotit cu unghiul α fata de sistemul *O12*, se notează cu Oyz.



Prin înlocuire, din relațiile (2) se obțin:

+(-)

$$I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$I_z = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$I_{yz} = \frac{I_1 - I_2}{2}\sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} I_y + I_z &= I_1 + I_2 \\ I_y - I_z &= (I_1 - I_2)\cos 2\alpha \end{aligned}$$

Prin calcule matematice se obțin cele doua momente de inerție principale I_1 si I_2, prin formula:

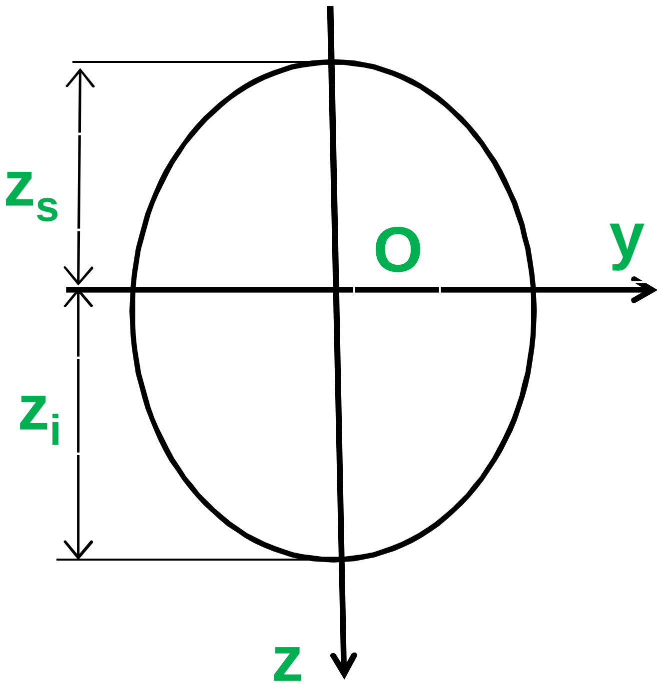
$$I_1, I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

unde semnul (+) din fata termenului al doilea din membrul drept sa fie atribuit lui I_1, iar semnul (-) lui I_2.

!!! Când figura are cel puțin o axa de simetrie, una din axele centrale principale de inerție va corespunde cu axa de simetrie trecând prin centrul de greutate al figurii.

Modul de rezistenta

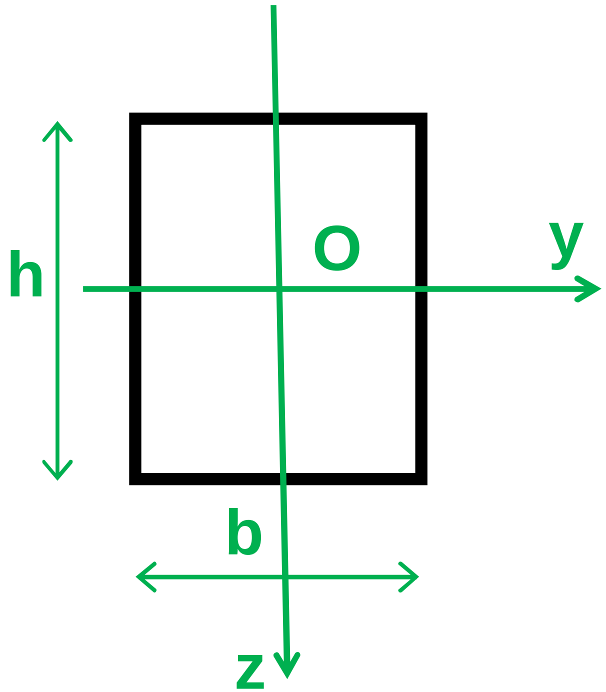
Raportul dintre momentul de inerție al unei secțiuni fata de o axa centrala de inerție si distanta celui mai îndepărtat punct din secțiune de aceasta axa se numeşte modul de rezistenta.



$$W_{ys} = \frac{I_y}{z_s} \; ; \; W_{yi} = \frac{I_y}{z_i}$$

Modulul de rezistenta se măsoară in unitari de lungime la puterea a treia [L³].

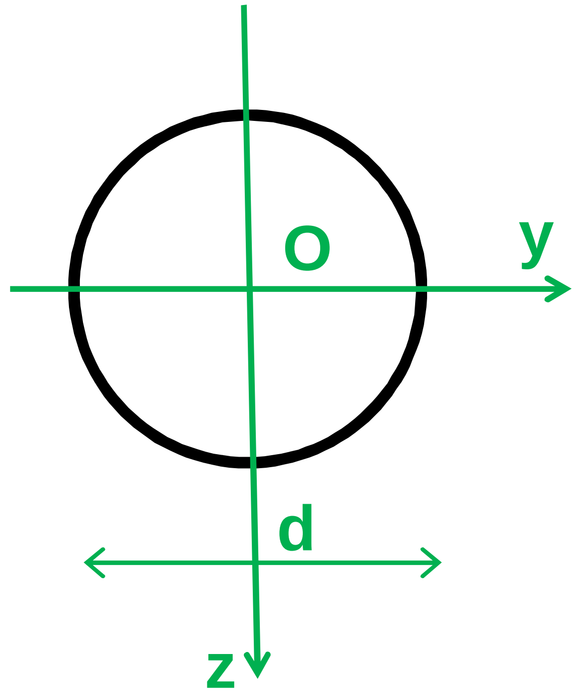
Cazuri particulare:



$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{\mathrm{bh}^3/12}{h/2} = \frac{\mathrm{bh}^2}{6}$$

$$W_z = \frac{I_z}{b/2} = \frac{\mathrm{hb}^3/12}{b/2} = \frac{\mathrm{hb}^2}{6}$$

$$W = \frac{I_y}{d/2} = \frac{\pi \mathrm{d}^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$



Raze de inerție

Momentul de inerție al secțiunii in raport cu o axa se poate reprezenta sub forma produsului dintre aria secțiunii si pătratul unei mărimi numite *raza de inerție* sau *raza de girație*:

$$I_y = \int_A z^2 dA = A \cdot i_y^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \; ; \; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad [L]$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \; ; \; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$