



CURS 7

MECANICA

CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

GEOMETRIA MASELOR. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR

1. Centrul de greutate și centrul maselor

2. Teoremele lui Guldin – Pappus

3. Momente statice. Teorema momentelor statice

4. Momente de inerție. Raze de inerție

**5. Variația momentelor de inerție la translația axelor.
Teorema lui Steiner**

6. Variația momentelor de inerție la rotația axelor

**7. Direcții principale de inerție. Momente de inerție
principale**

1. Centrul de greutate și centrul maselor

Particulele materiale aflate la suprafața Pământului sunt supuse acțiunii câmpului gravitațional terestru care se manifestă prin forța de atracție:

$$\overline{G} = m \overline{g}$$

denumită **greutate**.

Se observă că această forță depinde de masa particulei materiale și de vectorul, care se numește **acclerație gravitațională**.

Pentru un sistem de puncte materiale, greutatea sistemului material are expresia:

$$\overline{G} = \sum_{i=1}^n \overline{G}_i$$

iar punctul de aplicație se numește **centru de greutate** al sistemului de puncte materiale.

Poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale este dată de relația:

$$\overline{r_c} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

sau:

$$\overline{x_c} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad \overline{y_c} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad \overline{z_c} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$$

Prin definiție, suma maselor punctelor materiale ale unui sistem este **masa sistemului** de puncte materiale:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

iar **centrul maselor** unui sistem de puncte materiale este dat de relația:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

sau:

$$\overline{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \overline{y}_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \overline{z}_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Proprietăți:

– dacă un sistem de puncte materiale admite un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, centrul de masă se găsește în acel plan, pe acea axă, respectiv în acel centru (centrul de masa al unui sistem material constituit dintr-o linie dreaptă se afla pe acea dreaptă, iar centrul maselor unui sistem material plan se afla în acel plan);

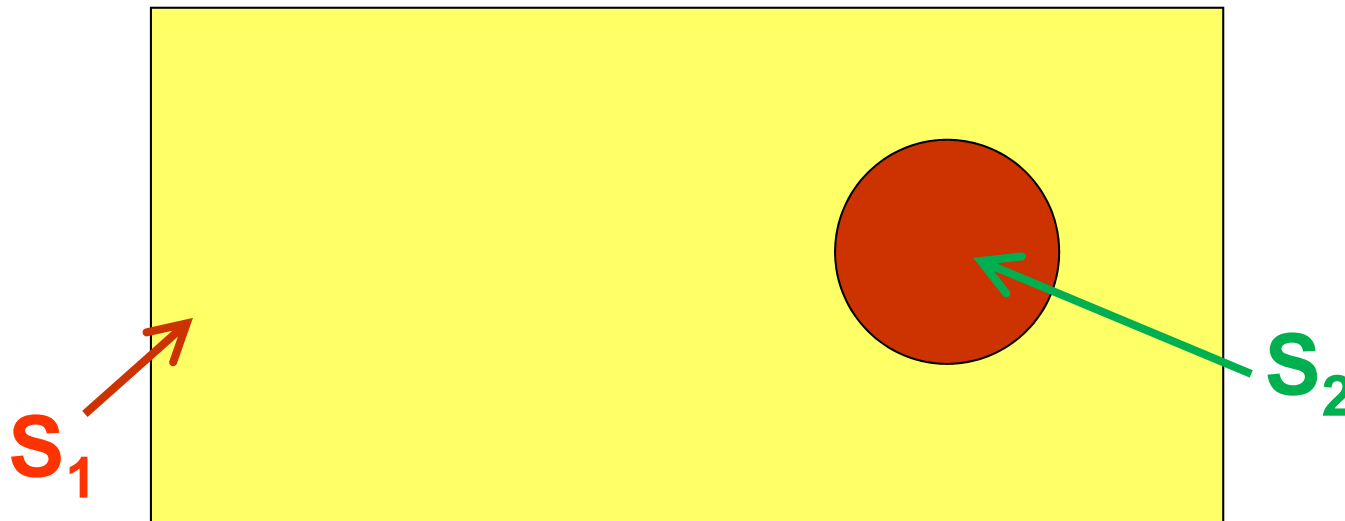
– dacă un sistem de puncte materiale (S) se descompune într-un număr de subsisteme (S_1), (S_2), ..., (S_p) ale căror mase M_1 , M_2 , ..., M_p și centre de masă (C_1), (C_2), ..., (C_p) se cunosc, poziția centrului său de masă se poate determina

cu relația:

$$\overline{r_c} = \frac{M_1 \overline{r_{c1}} + M_2 \overline{r_{c2}} + \dots + M_p \overline{r_{cp}}}{M_1 + M_2 + \dots + M_p}$$

– dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca rezultând dintr-un sistem (S₁) din care lipsește un sistem (S₂), atunci:

$$\overline{r_c} = \frac{M_1 \overline{r_{c1}} - M_2 \overline{r_{c2}}}{M_1 - M_2}$$



- poziția centrului de masa nu depinde de sistemul de coordonate ales, deoarece depinde numai de poziția reciproca a punctelor materiale M_i ;
- dacă valorile maselor sistemului material sunt multiplicare cu o constanta scalară nenulă, poziția centrului de masa al sistemului nu se modifică. Proprietatea aceasta permite reprezentarea maselor prin linii, arii sau volume, constanta fiind densitatea sistemului considerat omogen.

Centre de masa pentru corpuri omogene

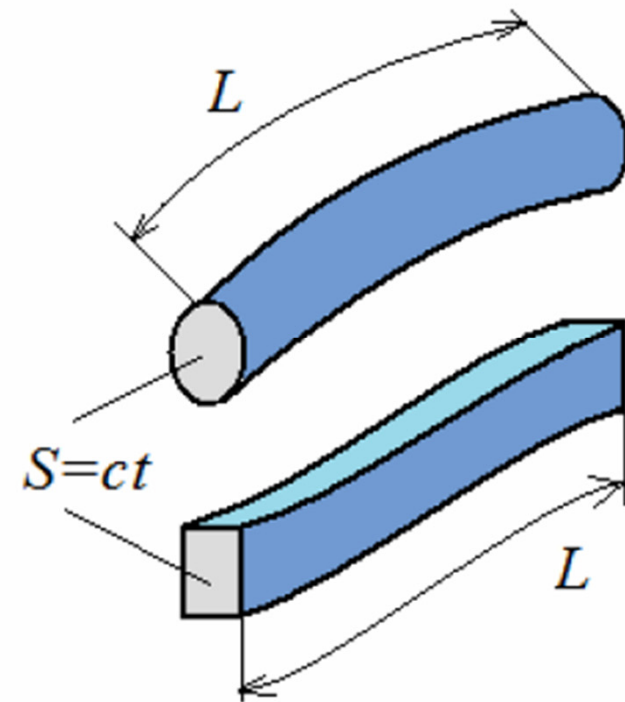
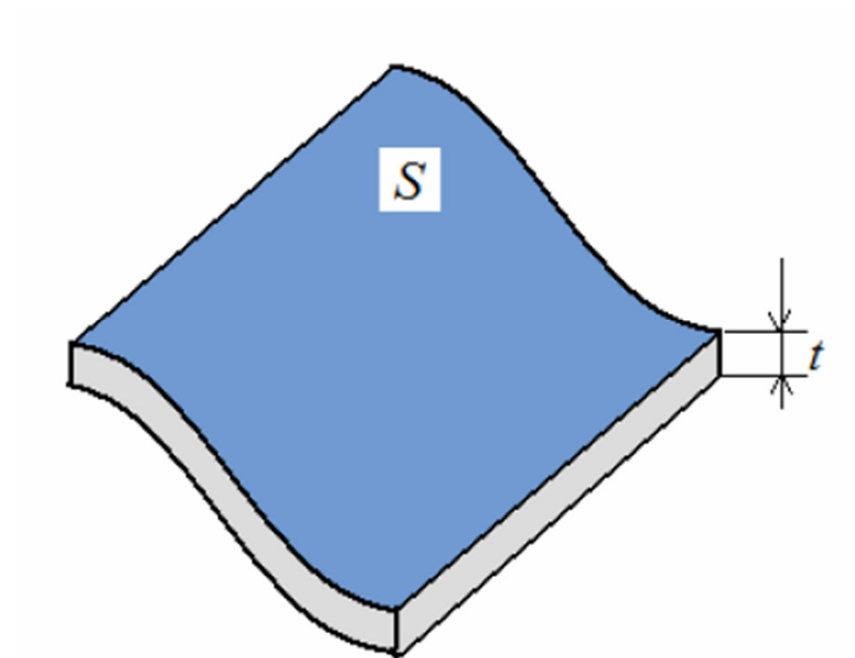
Pentru o bara omogena având masa M uniform distribuita pe lungimea ei (notata L), se definește **densitatea unității de lungime** $\rho=M/L$. Relația centrelor de masa se scrie după simplificarea cu ρ :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n l_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n l_i}$$

Pentru o placa omogena cu aria A si masa M cunoscute, se definește **densitatea unității de suprafață** $\rho=M/A$. Relația centrelor de masa se scrie după simplificarea cu ρ :

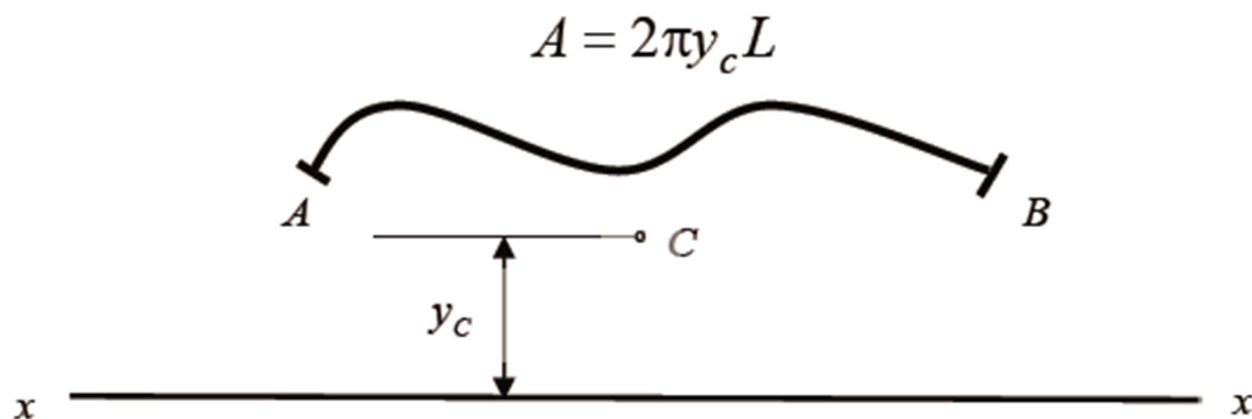
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Centre de masa pentru corpuri omogene



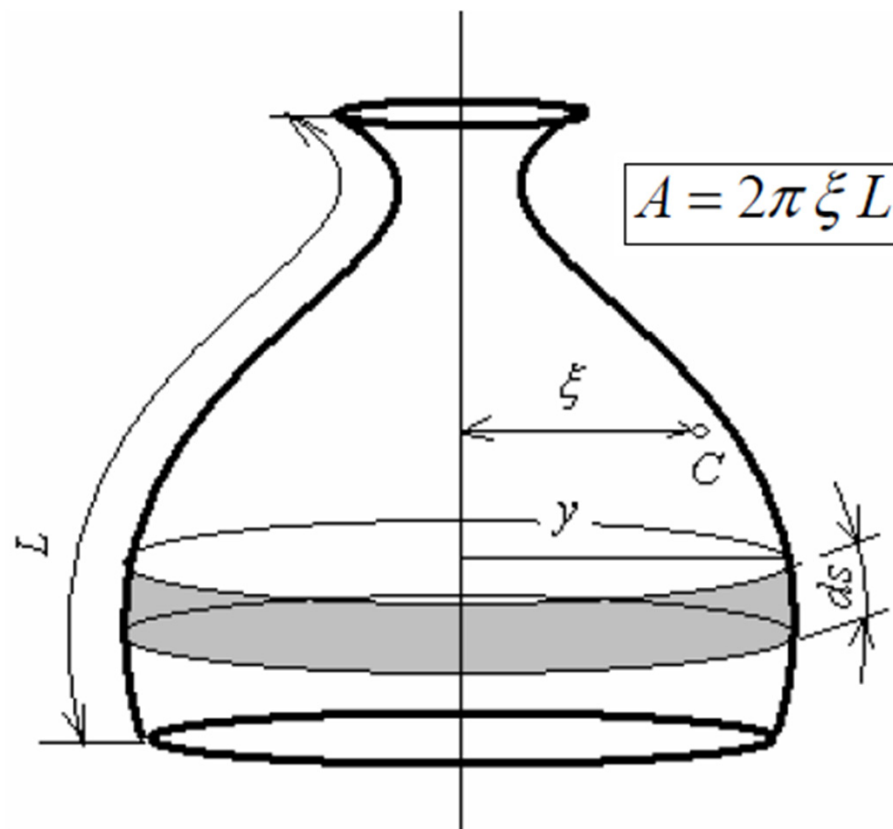
2. Teoremele lui Guldin – Pappus

(a) Aria suprafeței generate de un arc de curbă plană, care se rotește în jurul unei axe din planul curbei, pe care nu o intersectează, este egală cu lungimea arcului de curbă multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de masă al curbei date, presupuse omogene:



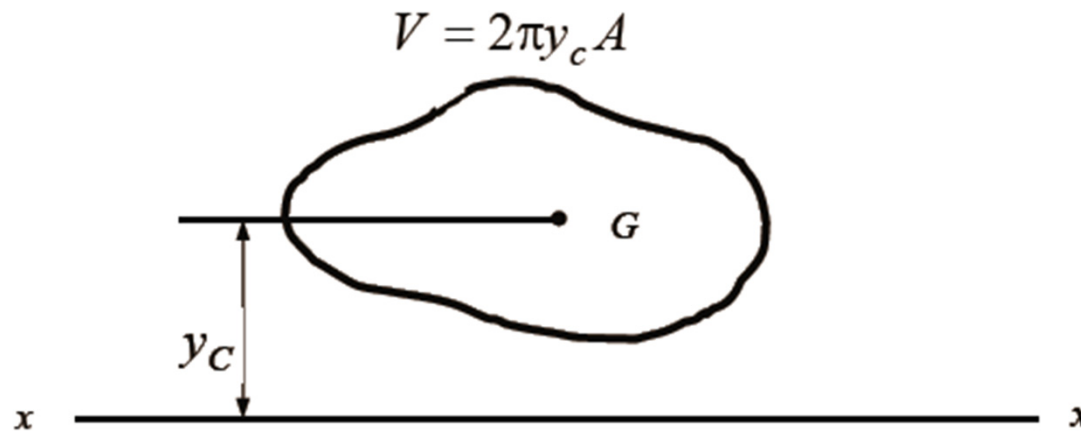
Teorema I Guldin-Pappus

2. Teoremele lui Guldin – Pappus

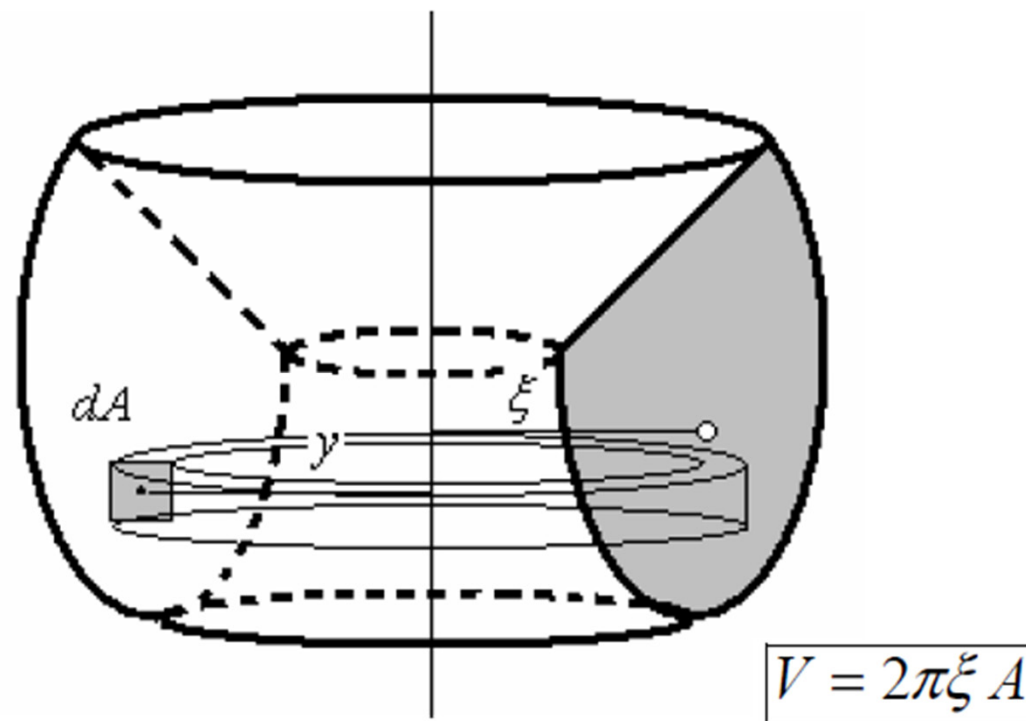


Teorema I Guldin-Pappus

(b) Volumul generat prin rotirea unei suprafețe plane în jurul unei axe din planul său pe care nu o intersectează, este egal cu aria considerată multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de masă al ariei:



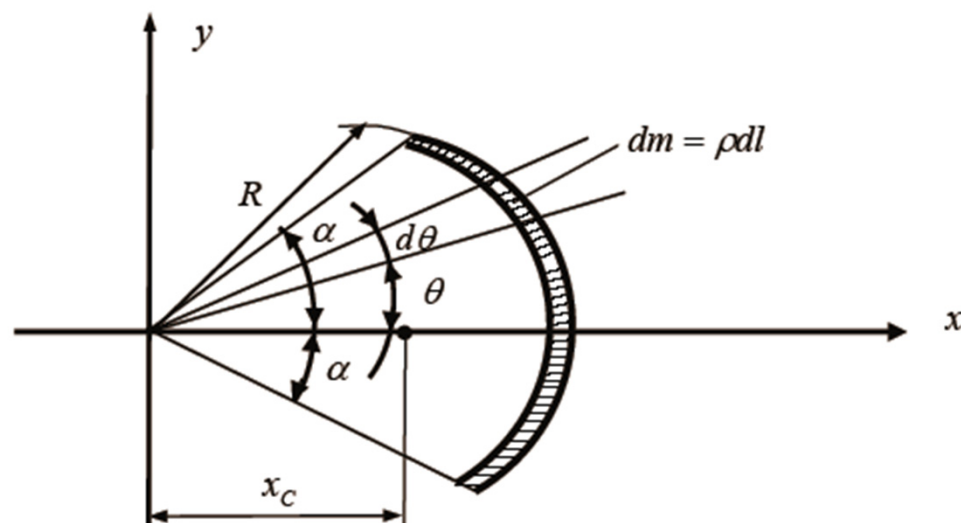
Teorema II Guldin-Pappus



Teorema II Guldin-Pappus

Determinarea poziției centrului de masă pentru o bară omogenă de forma unui:

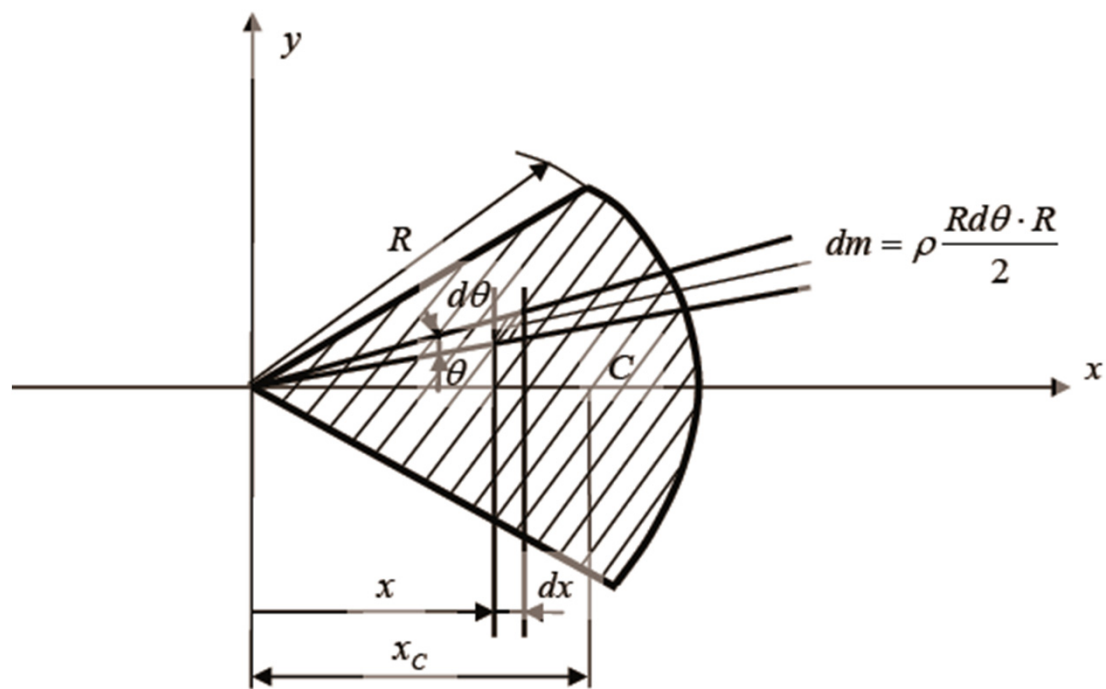
– arc de cerc



$$dm = \rho dl ; \quad x = R \cos \theta ; \quad dl = R d\theta$$

$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int R \cos \theta \cdot \rho \cdot dl}{\int \rho dl} = \frac{\int R \cos \theta \cdot R d\theta}{\rho \int R d\theta} = \frac{R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \cdot d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

– sector de cerc

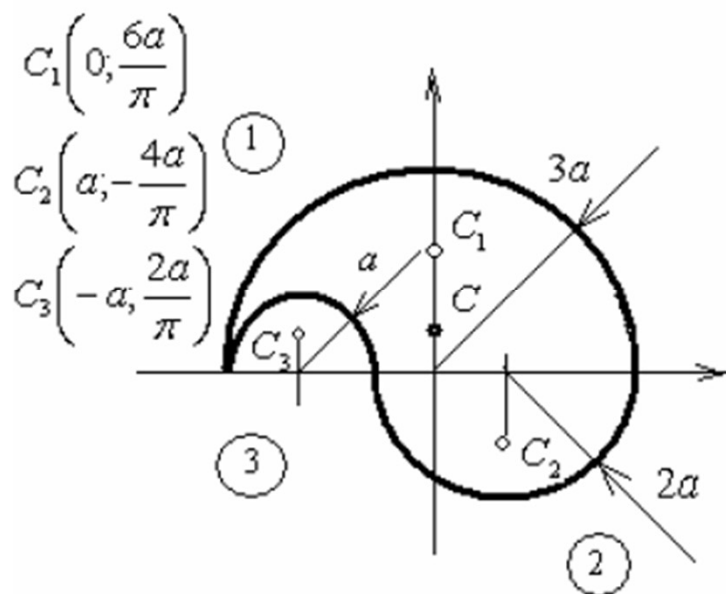


$$x = \frac{2}{3} R \cos \theta$$

$$dm = \rho \frac{R \cdot d\theta \cdot R}{2}$$

$$x_c = \frac{\rho \int \frac{2}{3} R \cos \theta \frac{R^2 d\theta}{2}}{\rho \int \frac{R^2}{2} d\theta} = \frac{2}{3} \frac{R \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \cdot d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

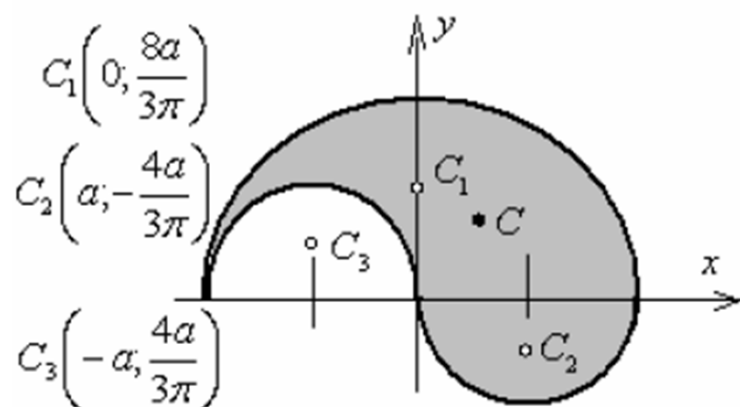
1. Să se determine centrul de greutate al unei figuri alcătuită din trei linii materiale omogene, în formă de jumătate de cerc, ca în figura de mai jos.



Corp ul	x_i	y_i	L_i	$x_i L_i$	$y_i L_i$
1	0	$\frac{6a}{\pi}$	$3\pi a$	0	$18a^2$
2	a	$-\frac{4a}{\pi}$	$2\pi a$	$2\pi a^2$	$-8a^2$
3	$-2a$	$\frac{2a}{\pi}$	πa	$-2\pi a^2$	$2a^2$
Σ	X	X	$6\pi a$	0	$12a^2$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i L_i}{\sum_{i=1}^n L_i} = \frac{0}{6\pi a} = 0 \quad ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i L_i}{\sum_{i=1}^n L_i} = \frac{12a^2}{6\pi a} = \frac{2a}{\pi} .$$

2. Să se determine centrul de greutate plăcii plane omogene din figura.



N r.	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	0	$\frac{8a}{3\pi}$	$2\pi a^2$	0	$\frac{16a^3}{3}$
2	a	$-\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{\pi a^3}{2}$	$-\frac{2a^3}{3}$
3	$-a$	$\frac{4a}{3\pi}$	$-\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{\pi a^3}{2}$	$-\frac{2a^3}{3}$
Σ	X	X	$2\pi a^2$	πa^3	$4a^3$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{4a^3}{2\pi a^2} = \frac{2a}{\pi}$$

3. Momente statice. Teorema momentelor statice

Se numește **moment static** al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un pol, suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și distanțele de la aceste puncte la planul, axa sau polul considerat:

$$S = \sum_{i=1}^n m_i d_i$$

$$S_{yoz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Pentru un sistem de referință cartezian, expresiile: 

$$S_{xoz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

reprezintă momentele statice ale sistemului de particule materiale, în raport cu planele yoz, zox, respectiv xoy.

$$S_{xoy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Dacă punctele materiale sunt situate toate în același plan, atunci expresiile:

$$S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

reprezintă momentele statice ale sistemului în raport cu axa O_y , respectiv O_x .

Din relațiile care dau coordonatele centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale, rezultă:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = x_c M$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = y_c M$$

$$\sum_{i=1}^n m_i z_i = z_c M$$

relații cunoscute sub denumirea de **teorema momentelor statice**.

Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan sau o axă este egal cu produsul dintre masa întregului sistem și distanța de la centrul de masă al sistemului la acel plan sau la acea axă.

4. Momente de inerție. Raze de inerție

Se numește ***moment de inerție*** al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan, o axă sau un pol, suma produselor dintre masele particulelor care alcătuiesc sistemul și pătratul distanțelor acestor particule până la planul, axa sau polul considerat:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$$

Față de un sistem de referință cartezian avem:

– momente de inerție planare:

$$I_{xoy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

$$I_{yoz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$

$$I_{xoz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$$

– momente de inerție axiale:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

– moment de inerție polar:

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$$

– momente de inerție centrifugale:

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

$$I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i$$

Se numește **rază de inerție (girație)** distanța la care trebuie plasată întreaga masă a sistemului material M , concentrată într-un singur punct la un plan, o axă sau un pol pentru a obține aceeași valoare a momentului de inerție planar, axial sau polar ca și cea dată de întreg sistemul material.

$$I = M \cdot i^2 \Rightarrow i = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Proprietăți:

- momentele de inerție planare, axiale sau polare sunt mărimi pozitive. Ele sunt nule numai atunci când sistemul de puncte materiale este conținut în planul, pe axa sau în polul la care ne referim;
- momentele de inerție axiale sunt egale cu suma momentelor de inerție în raport cu două plane rectangulare:

$$I_x = I_{xoz} + I_{xoy}$$

$$I_y = I_{yoz} + I_{xoy}$$

$$I_z = I_{xoz} + I_{yoz}$$

- **momentul de inerție polar poate fi calculat ca:**
 - **semisuma momentelor de inerție axiale în raport cu trei axe rectangulare ce trec prin acel punct:**

$$I_o = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

- **suma momentelor de inerție planare:**

$$I_o = I_{yoz} + I_{xoz} + I_{xoy}$$

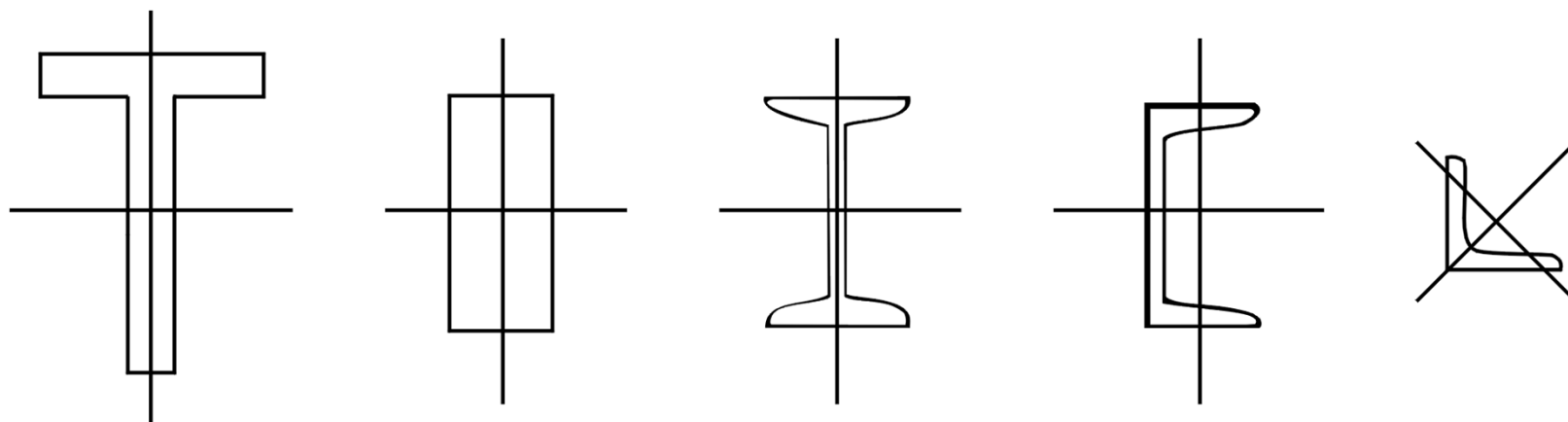
- **suma momentelor de inerție în raport cu un plan și o axă normală la acel plan:**

$$I_o = I_x + I_{yoz} = I_y + I_{xoz} = I_z + I_{xoy}$$

- **momentele de inerție centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule.**

CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR

În definirea răspunsului elementelor de construcții de tipul barelor la acțiunea forțelor exterioare, privind forțele interioare și deformațiile care se produc în acestea, alături de proprietățile fizice ale materialelor din care sunt alcătuite și dimensiunile acestora, intra și unele mărimi legate direct de forma și dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor numite *caracteristici geometrice ale secțiunilor*.





Daca se considera secțiunea transversala compusa dintr-o infinitate de arii elementare dA , rezulta:

Aria secțiunii:

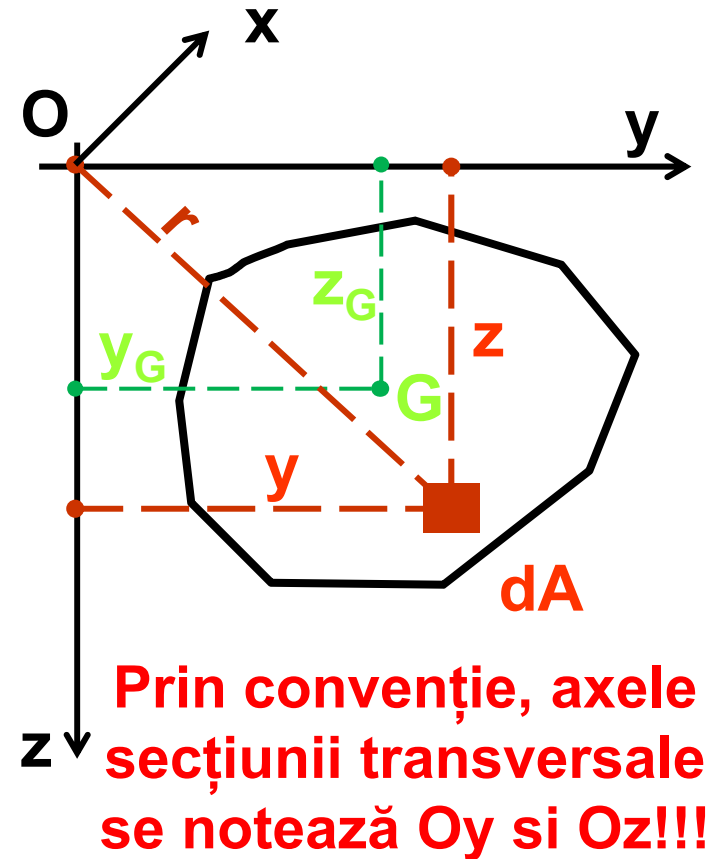
$$A = \int_A dA$$

unde indicele A la semnul de integrare specifica extinderea integralei pe toata secțiunea.

Momentele statice fata de axa y , respectiv z :

$$S_y = \int_A z dA ; S_z = \int_A y dA$$

reprezintă suma produselor ariilor elementare dA cu distanta la axa corespunzătoare (y sau z) .

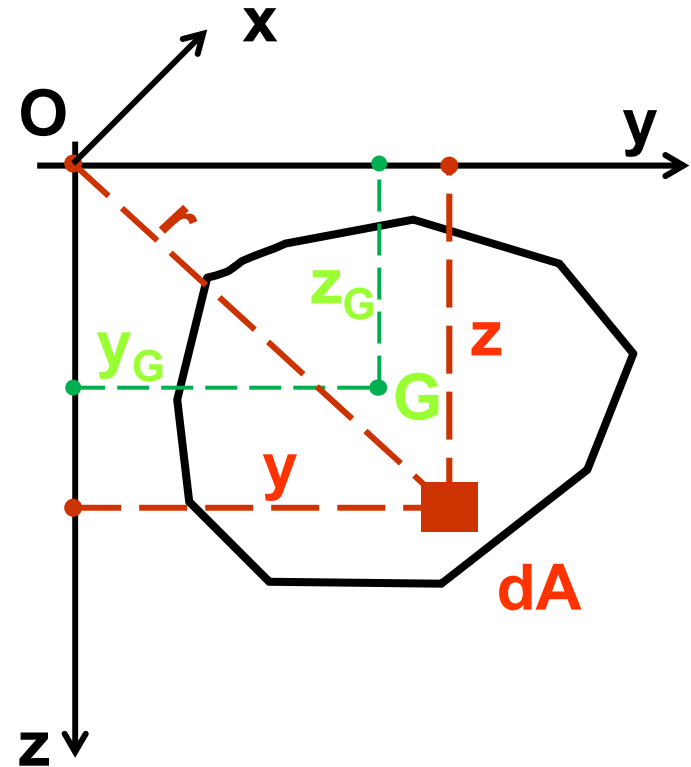


Daca se considera secțiunea transversala compusa dintr-o infinitate de arii elementare dA , rezulta:

Daca se notează cu y_G si z_G coordonatele centrului de masa sau de greutate ale secțiunii rezulta:

$$y_G = \frac{1}{A} \int_A y dA ; z_G = \frac{1}{A} \int_A z dA$$

Obs. Din relația de mai sus se deduce ca momentul static al secțiunii fata de o axa care trece prin centrul de greutate al acestei secțiuni este nul. Axele de coordonate care trec prin centrul de greutate al secțiunii se numesc **axe centrale**, sistemele de axe rectangulare yOz cu originea in centrul de greutate al secțiunii numindu-se **sisteme de axe centrale**.



In cazul unei secțiuni compuse din mai multe secțiuni simple A_i , pentru care sunt cunoscute coordonatele y_i și z_i ale centrului de greutate G_i , coordonatele centrului de masa sau de greutate ale întregii secțiuni rezulta:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} ; z_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Obs.

Ariile secțiunilor transversale plane au dimensiunea (L^2), și se măsoară în mm^2 , cm^2 , m^2

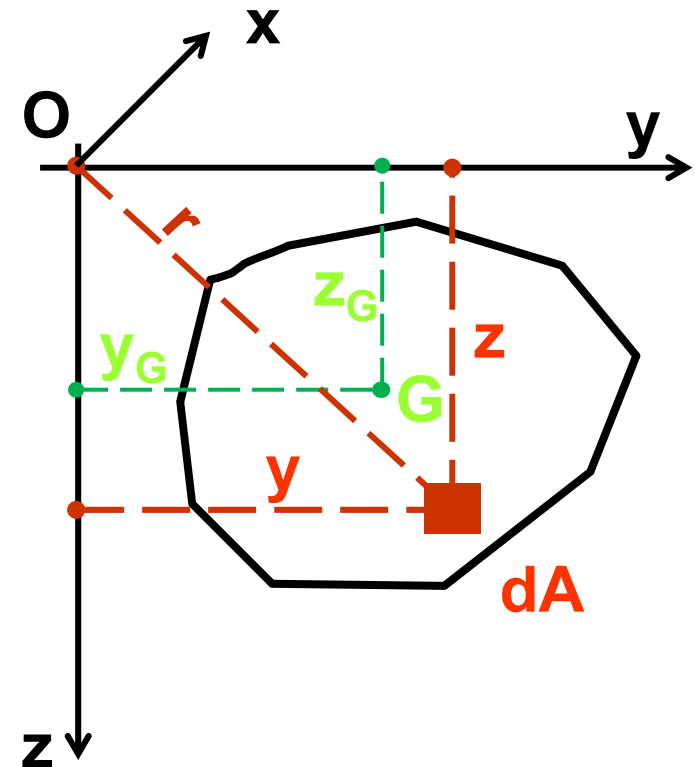
Momentele statice ale secțiunilor transversale plane au dimensiunea (L^3), și se măsoară în mm^3 , cm^3 , m^3

Se numește **moment de inerție axial** al figurii plane, de arie A , în raport cu o axa din planul său, suma produselor elementelor de arie dA cu pătratele distanțelor lor la axa considerată. În raport cu axele Oy și Oz momentele de inerție sunt:

$$I_y = \int_A z^2 dA ; I_z = \int_A y^2 dA$$

Suma produselor elementelor de arie dA cu distanțele lor la un sistem de axe rectangular Oyz se numește **moment de inerție centrifugal** al figurii plane în raport cu axele Oyz .

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$



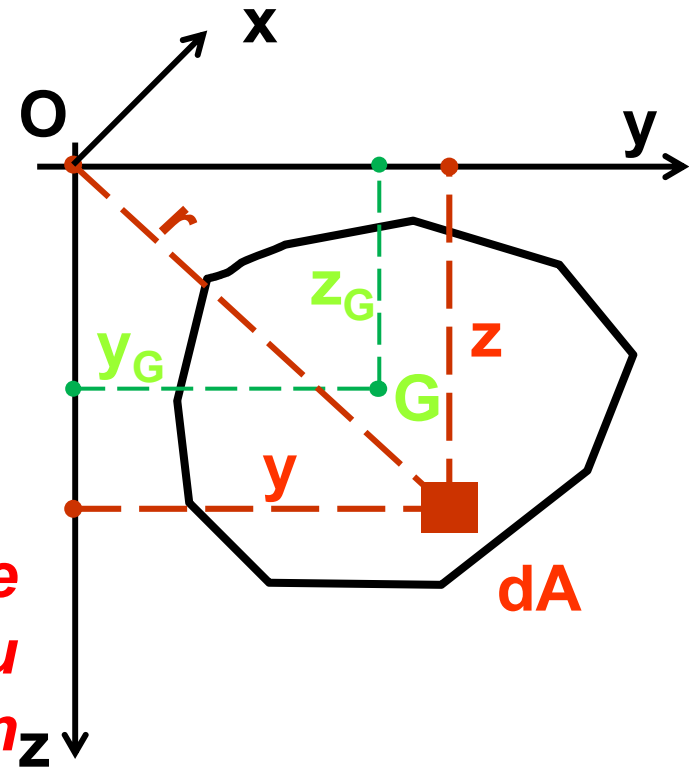
Moment de inerție polar al unei figuri plane, în raport cu un punct (pol) din planul figuri, este suma produselor elementelor de arie dA cu pătratele distanțelor lor la acel punct.

$$I_o = \int_A r^2 dA$$

$$r^2 = z^2 + y^2$$

$$I_o = \int_A r^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z$$

⇒ Suma momentelor de inerție axiale în raport cu axele rectangulare cu aceeași origine O reprezintă un invariant la rotirea sistemului de axe.



Obs. Momentele de inerție (axiale, centrifugale și polare) au dimensiunea (L^4), și se măsoară în mm^4 , cm^4 , m^4

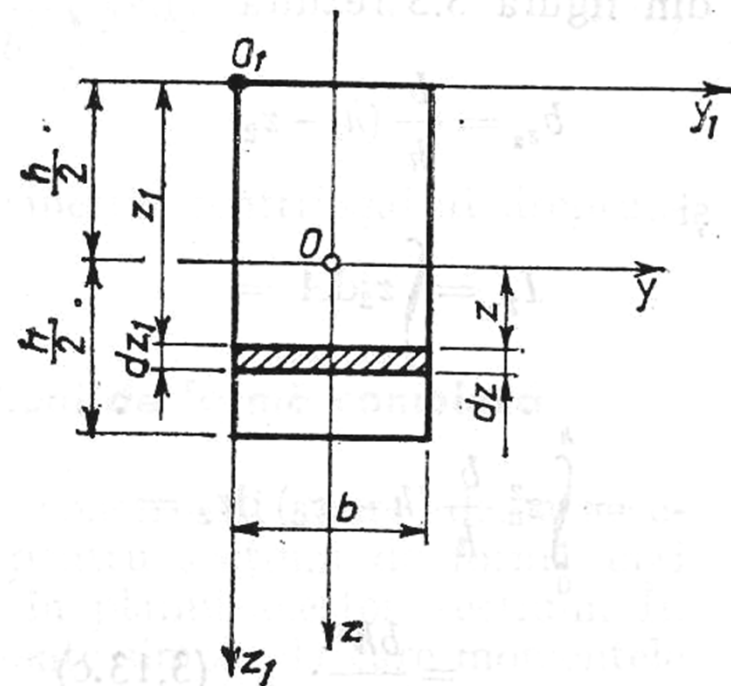
Momente de inerție la dreptunghi

Sa se determine momentele de inerție axiale in raport cu axele centrale Oy si Oz paralele cu laturile dreptunghiului.

Axa centrala Oy ; suprafața elementare dA || axa Oy

$$\Rightarrow dA = b \cdot dz$$

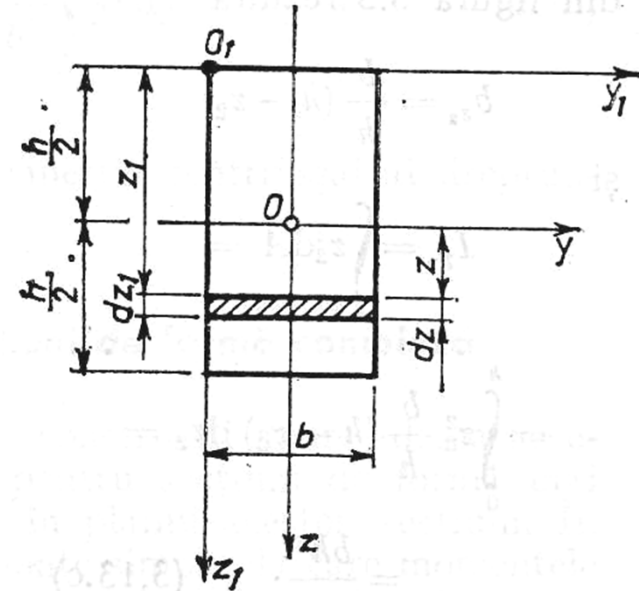
$$I_y = \int_A z^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{bh^3}{12}$$
$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{hb^3}{12}$$



Pentru axele O_1y_1 si O_1z_1 care conțin laturile dreptunghiului se obține:

$$I_{y1} = b \int_0^h z_1^2 dz_1 = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{z1} = \frac{hb^3}{3}$$



Momentul de inerție centrifugal in raport cu sistemul de axe Oyz este nul, deoarece acestea sunt axe de simetrie. Pentru momentul de inerție centrifugal in raport cu acele $O_1y_1z_1$ se obține:

$$I_{y1z1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_0^h \frac{b}{2} z_1 b dz_1 = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Momente de inerție la triunghi

Fie un triunghi oarecare de lățime b și înălțime h . Pentru evaluarea momentului de inerție axial în raport cu axa y_1-y_1 care trece prin vârful triunghiului, paralel cu baza, se va considera aria elementară $dA=b_z dz$.

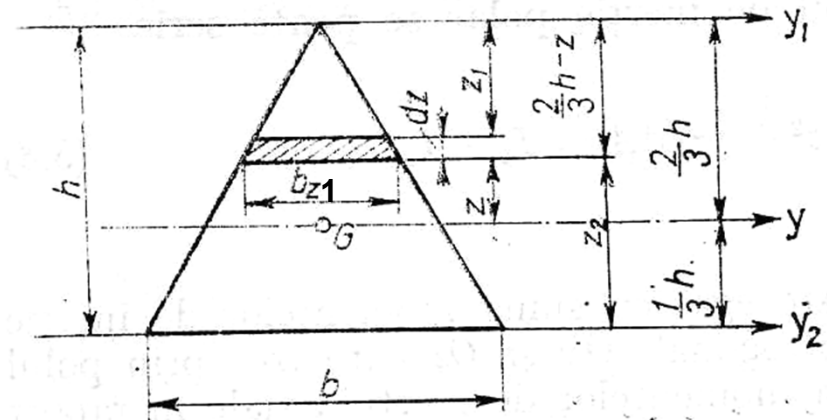
$$b_{z1} = b \frac{z_1}{h}$$

$$I_{y1} = \int_A z_1^2 dA = \int_0^h z_1^2 b_{z1} dz_1 = \frac{b}{h} \int_0^h z_1^3 dz_1 = \frac{bh^3}{4}$$

În raport cu axa centrală $y-y$ paralelă cu baza:

$$b_z = \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - z \right)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} z^2 \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - z \right) dz = \frac{bh^3}{36}$$



In raport cu axa y_2 - y_2 trecând prin baza triunghiului:

$$b_{z_2} = \frac{b}{h}(h - z_2)$$

$$I_{y_2} = \int_A z_2^2 dA = \int_0^h z_2^2 \frac{b}{h}(h - z_2) dz_2 = \frac{bh^3}{12}$$

