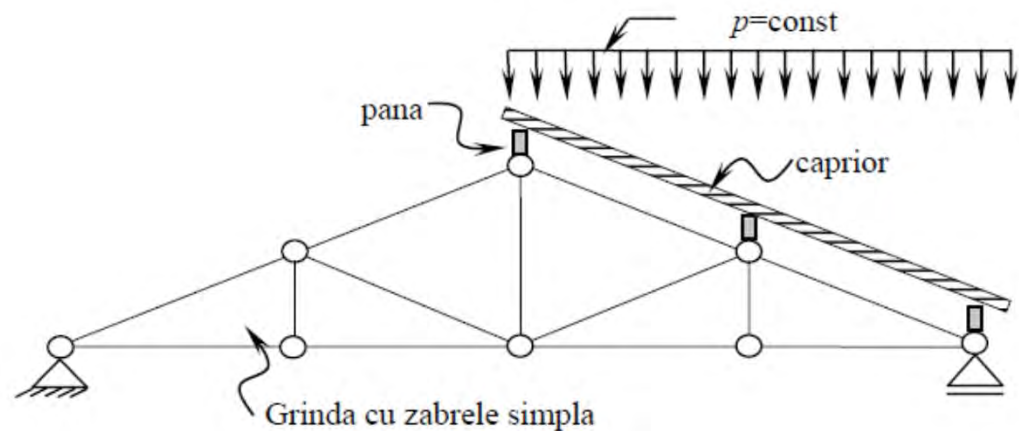




CURS 6

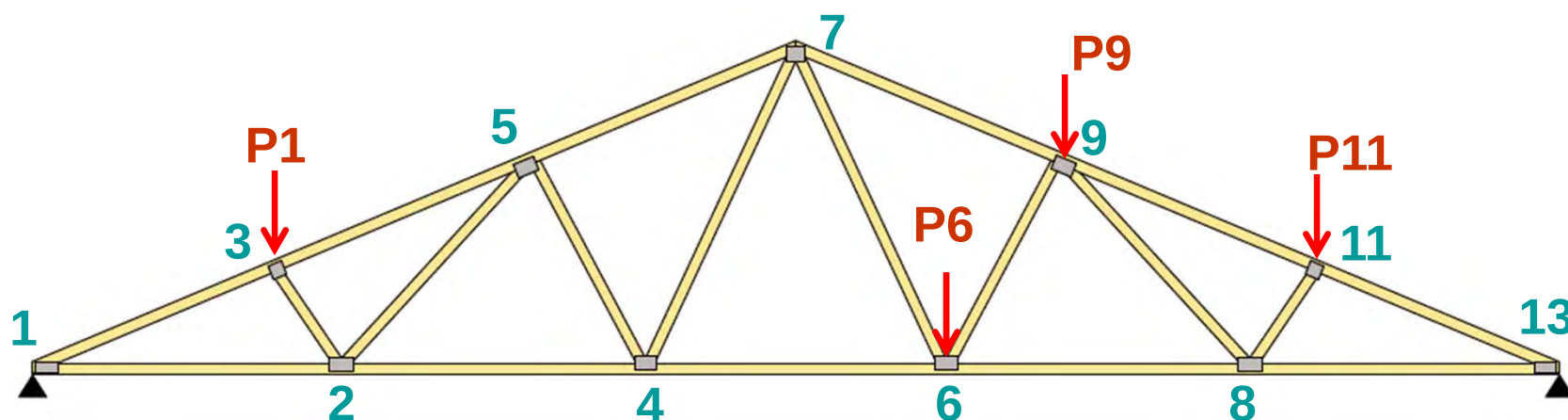
MECANICA

CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

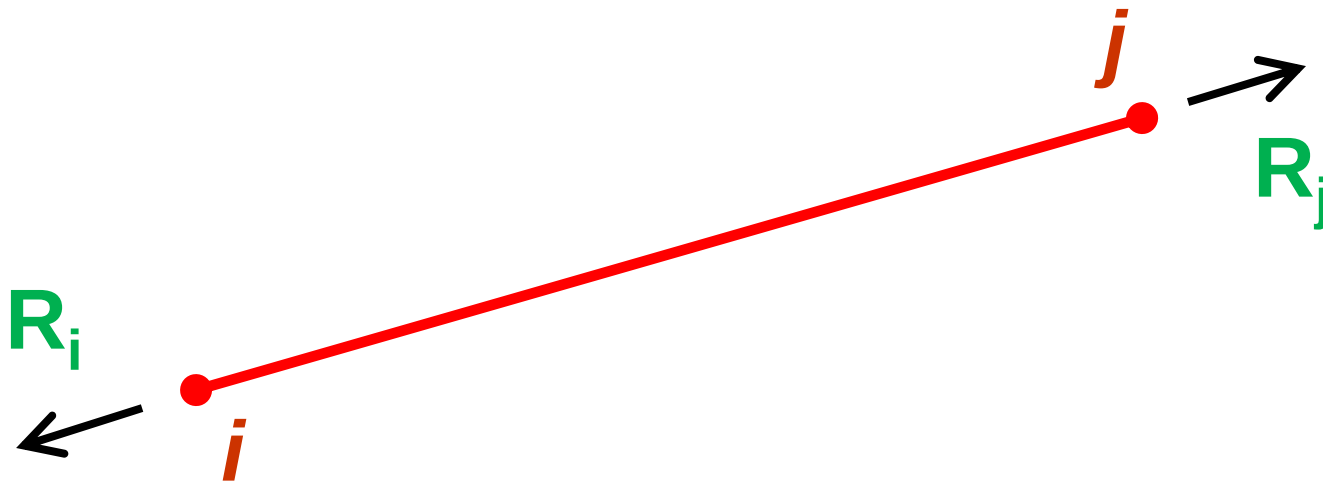
GRINZI CU ZĂBRELE PLANE

Grinzile cu zăbrele plane sunt formate din bare drepte, articulate în noduri (fiecare bară este articulată la ambele sale extremități), structura fiind în același timp indeformabilă geometric.



Grinzile cu zăbrele sunt încărcate în mod obișnuit numai în noduri, cu forțe concentrate, de aceea singurele eforturi care apar în bare sunt forțele axiale N , de întindere sau compresiune.

Pentru ca bara ij sa fie in echilibru, rezultantele R_i si R_j , din cele doua capete articulate ale barei trebuie sa fie egale si de semne contrare.



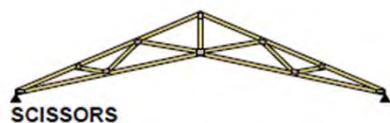
Grinzile cu zăbrele se folosesc ca ferme pentru acoperișuri, cadre pentru hale industriale, grinzi principale la poduri, grinzi pentru poduri rulante etc.

Schematizarea grinzilor cu zăbrele are la bază următoarele ipoteze simplificatoare:

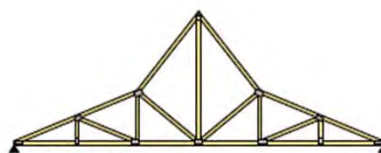
- 1. Barele grinzii cu zăbrele sunt perfect articulate în noduri, astfel încât în extremitățile lor nu pot apărea alte eforturi decât cele axiale (momente încovoietoare, forțe tăietoare);**
- 2. Axele barelor sunt concurente în nodul teoretic, astfel încât acțiunile barelor asupra nodului formează un ansamblu de forțe concurente;**
- 3. Sarcinile se aplică numai în noduri sub forma de forțe concentrate, astfel încât în bare apar numai forțele axiale N .**

Realizarea practică a grinzilor cu zăbrele duce la o îndepărtare de aceste ipoteze simplificatoare (mai puțin la grinzile cu zăbrele metalice și mai mult la cele din beton armat).

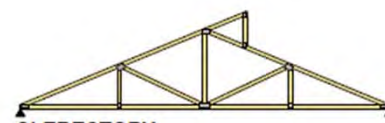
TIPURI DE GRINZI CU ZĂBRELE



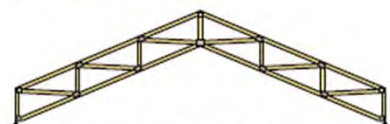
SCISSORS



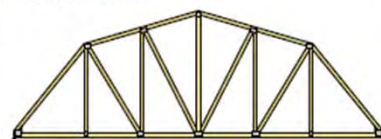
POLYNESIAN



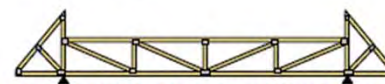
CLERESTORY



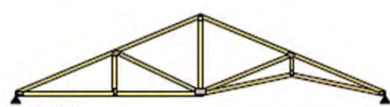
VAULTED PARALLEL CHORD



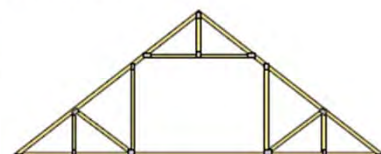
GAMBREL



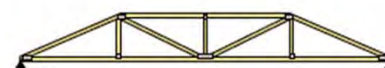
CANTILEVERED MANSARD W/PARAPETS



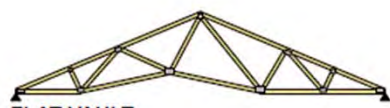
VAULT



ROOM-IN-ATTIC



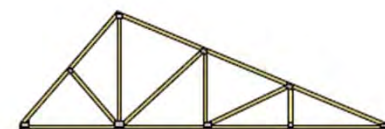
HIP



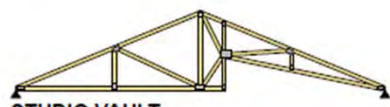
FLAT VAULT



BOWSTRING



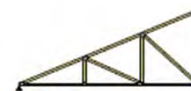
DUAL PITCH



STUDIO VAULT



DOUBLE CANTILEVER



MONO



TRAY OR COFFER



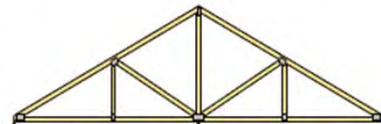
TRI-BEARING



HALF SCISSORS



BARREL VAULT



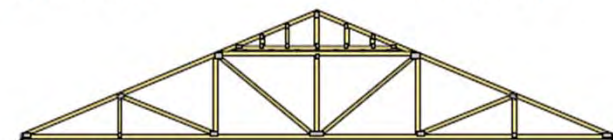
MULTI-PIECE



HALF HIP



SLOPING FLAT



DOUBLE INVERTED

TIPURI DE GRINZI CU ZĂBRELE



Bowstring truss



Towne lattice truss



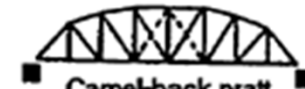
Pratt



Scissors truss



Saw-tooth truss



Camel-back pratt



Pratt truss



Pratt truss



Modified fink



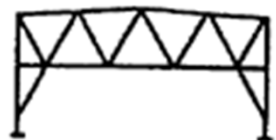
Truss with monitor



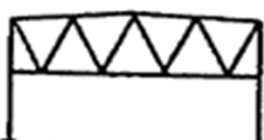
Traverse bent



Pratt (pitch)



Traverse bent



Traverse bent



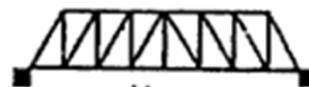
Fink or French



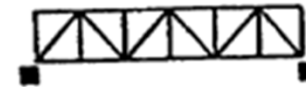
Fan fink



Howe



Howe



Warren trusses



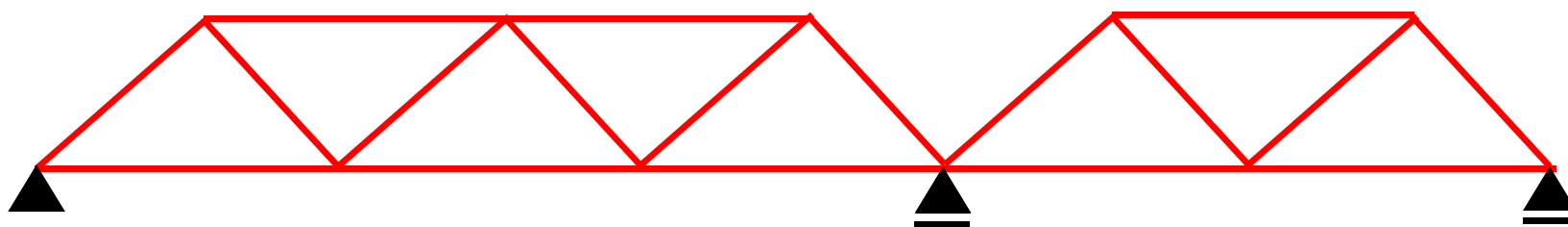
Howe (pitch)



Pratt



Condițiile de indeformabilitate geometrică și determinare statică



$$b = 18 ; r = 4 ; N = 11$$

$$b + r = 18 + 4 = 22 ; 2N = 2 \times 11 = 22$$

$b + r = \text{necunoscutele} ; 2N = \text{numărul de ecuații de echilibru static.}$

Concluzii:

-pentru $(b + r) = 2N$ grinda este static determinată;

$(b + r) > 2N$ mecanism;

$(b + r) < 2N$ grinda este static nedeterminată.

Condițiile de indeformabilitate geometrică și determinare statică

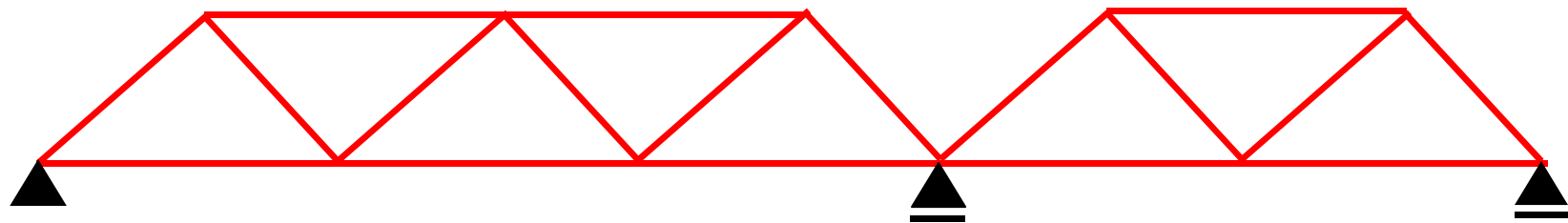
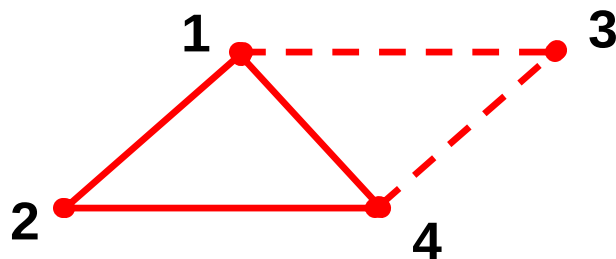


Figura geometrica care sta la baza alcătuirii grinzilor cu zăbrele este triunghiul.



GRINZI CU ZĂBRELE.

METODA IZOLĂRII NODURILOR

Etape în aplicarea metodei izolării nodurilor

Metoda izolării nodurilor se bazează pe teorema echilibrului părților indivizibile, unde se consideră ca parte indivizibilă, succesiv fiecare nod, respectiv pe teorema solidificării pentru aflarea reacțiunilor din legăturile exterioare.

Rezolvarea se face considerând următoarele etape:

- După verificarea condiției de determinare statică și invariabilitate geometrică, se aplică metoda solidificării pentru calculul reacțiunilor din legăturile exterioare; cele trei ecuații de echilibru sunt suficiente pentru calculul celor trei reacțiuni.

– Se izolează un nod în care converg două bare (eforturile din cele două bare sunt necunoscute) și se scriu două ecuații de proiecție pentru forțele care acționează în nod. Aceste forțe pot fi: forțele exterioare date, reacțiunile calculate anterior și cele două eforturi necunoscute. Se respectă convenția adoptată pentru sensul eforturilor necunoscute: totdeauna sunt considerate pozitive, ca “ieșind” din nod.

– Se rezolvă sistemul de două ecuații cu cele două necunoscute. Eforturile stabilite se reprezintă pe o schemă de forțe a grinzii, pe ambele noduri aferente fiecărei bare. Se înțelege că o valoare negativă a unui efort calculat conduce la reprezentarea acestuia cu sensul său de acțiune, adică “intrând” în nod.

- Se caută izolarea unui alt nod (de regulă vecin cu precedentele izolate), care are două bare de efort necunoscut. Acesta se încarcă cu forțele exterioare (date și de legătură) și cu eforturile cunoscute și necunoscute.
- Se exprimă condiția de echilibru prin scrierea celor două ecuații de proiecție.

Procedeul se continuă din aproape în aproape până când se epuizează toate nodurile grinzii și se stabilesc toate eforturile.

Observație:

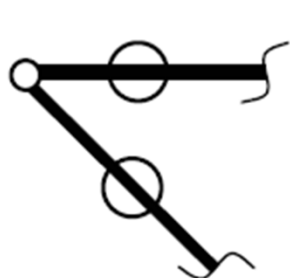
Ultimele două noduri izolate conțin trei ecuații de verificare.

Stabilirea barelor de efort nul

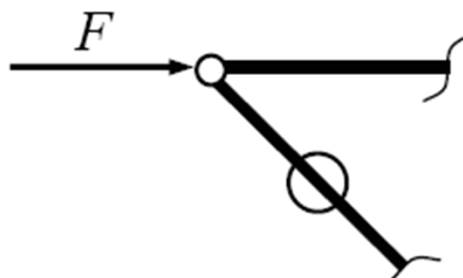
Cazul 1. Izolând un nod în care converg numai două bare, nodul fiind neîncărcat, atunci în ambele bare este efortul nul (fig. 1a).

Cazul 2. Nodul format din două bare și încărcat cu o forță F pe direcția uneia, are cealaltă bară de efort nul (fig. 1b). Tot în acest caz se încadrează și situația particulară a nodului alcătuit din două bare și care are un reazem simplu pe direcția unei bare. Atunci în cealaltă bară efortul este nul deoarece reacțiunea corespunzătoare reazemului are rolul forței F .

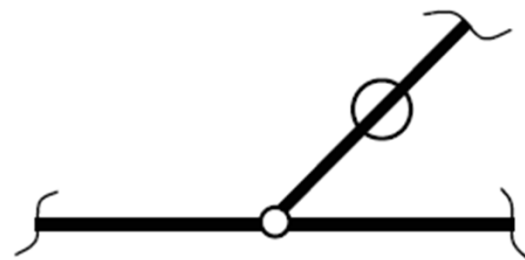
Cazul 3. Dacă un nod este neîncărcat și este alcătuit din trei bare dintre care două sunt în prelungire, atunci în cea de-a treia bară efortul este nul (fig. 1c).



a



b



c

fig. 1

Observație:

Determinarea barelor de efort nul poate fi aplicată chiar înainte de calculul reacțiunilor exterioare și are ca efect reducerea numărului necunoscutelor de calculat.

Aplicații

Să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura de mai jos folosind metoda izolării nodurilor.

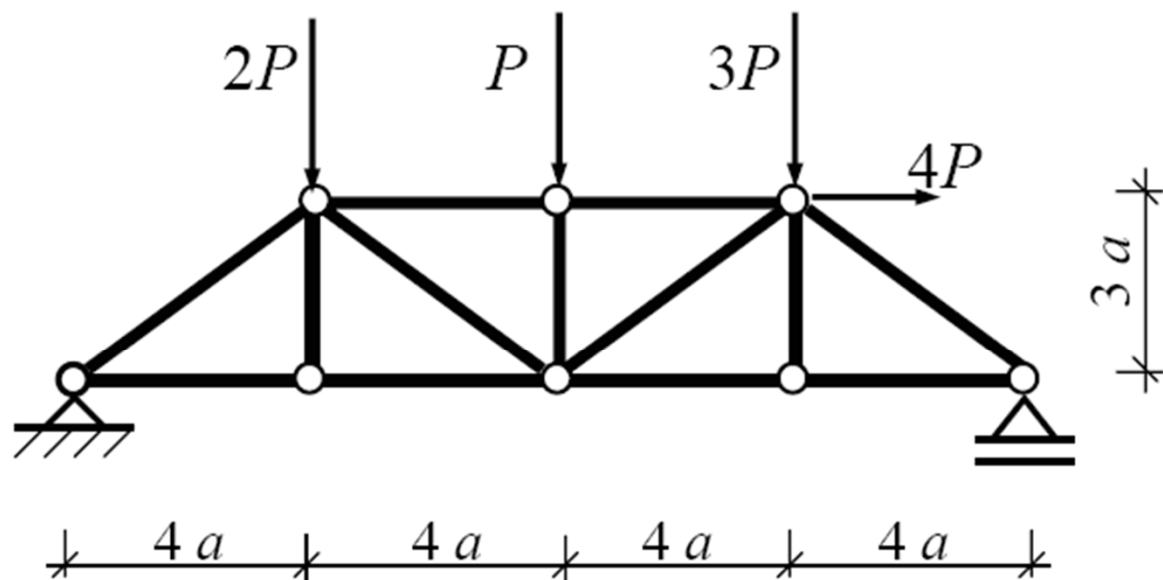


Fig. 10.2.

Rezolvare:

1) Se numerotează nodurile (fig. 10.3), stabilindu-se numărul acestora: $N = 8$.

2) Pentru verificarea condiției de determinare statică

$$2N = b + r,$$

se stabilește numărul de bare $b = 13$ și numărul legăturilor exterioare simple $r = 3$. Rezultă $2 \cdot 8 = 13 + 3$ și deci condiția este îndeplinită.

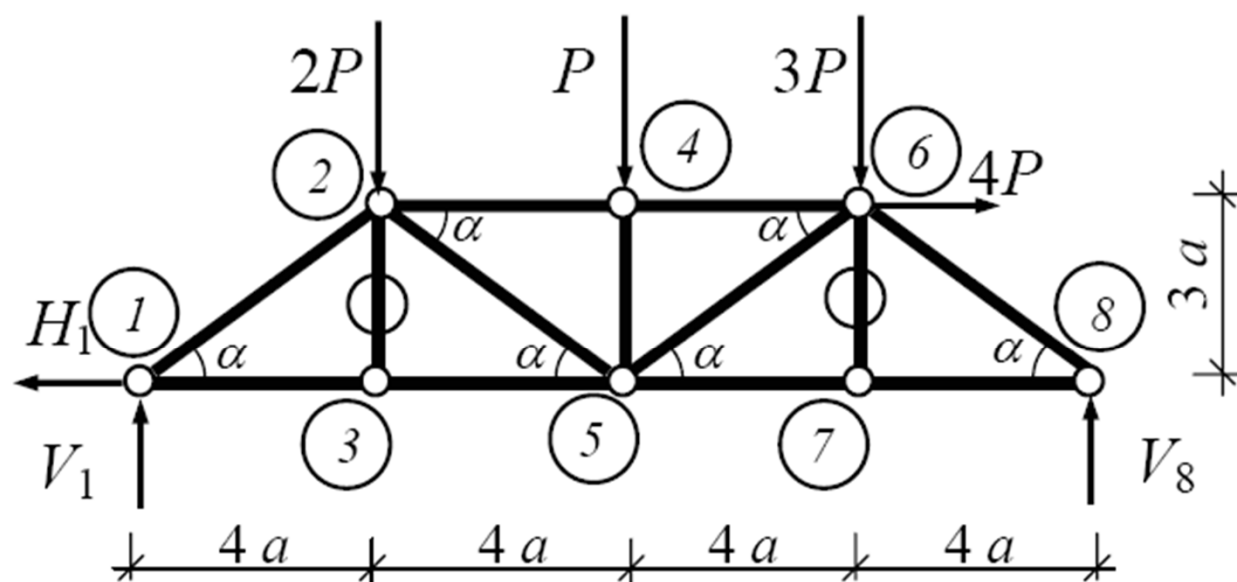


Fig. 10.3.

3) Calculul reacțiunilor din legăturile exterioare (din articulație și reazemul simplu) se face aplicând metoda solidificării. Ecuațiile de echilibru se scriu considerând schema de forțe din figura 10.3.

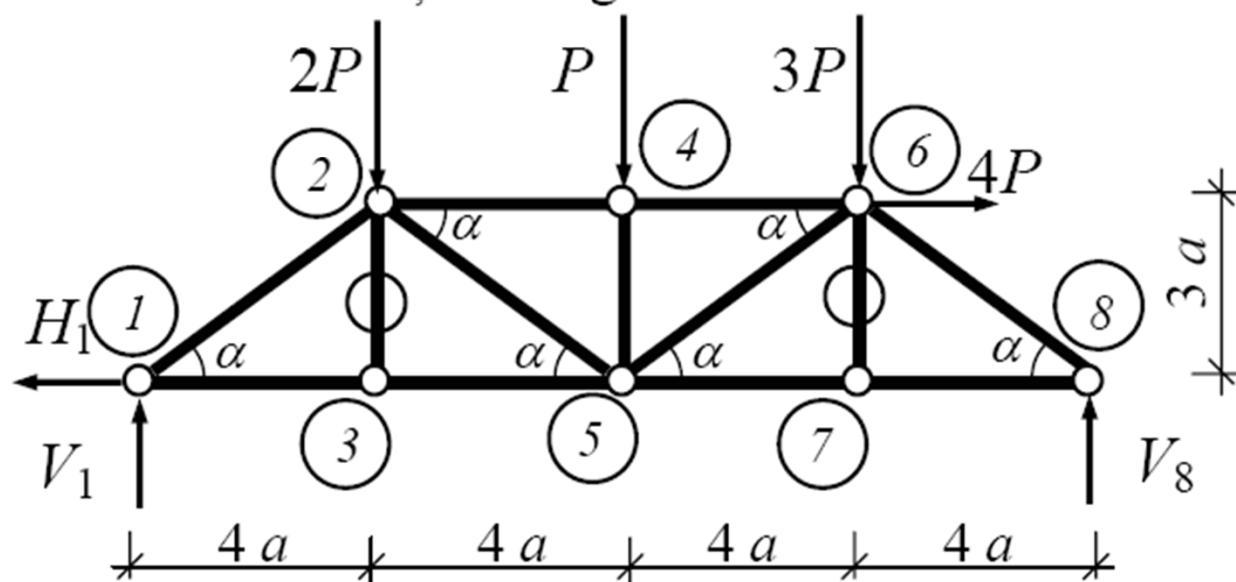


Fig. 10.3.

$$\begin{cases} \sum M_{(1)} = -2P \cdot 4a - P \cdot 8a - 3P \cdot 12a - 4P \cdot 3a + V_8 \cdot 16a = 0 \Rightarrow V_8 = 4P; \\ \sum M_{(8)} = -V_1 \cdot 16a + 2P \cdot 12a + P \cdot 8a + 3P \cdot 4a - 4P \cdot 3a = 0 \Rightarrow V_1 = 2P; \\ \sum X_i = 4P - H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 4P. \end{cases}$$

Verificarea reacțiunilor se face scriind ecuația de proiecție a forțelor pe axa Oy:

$$\sum Y_i = V_1 + V_8 - 2P - P - 3P \equiv 0.$$

4) Se caută barele de efort nul, înainte de izolarea efectivă a nodurilor, pentru a reduce numărul de eforturi necunoscute. Astfel, nodurile cu numerele 3 și 7, îndeplinesc condiția reprezentată în figura 10.1, c: “dacă un nod este alcătuit din trei bare dintre care două sunt în prelungire, și acesta este neîncărcat, atunci în cea de-a treia bară efortul este nul”, ceea ce înseamnă că barele 2-3 și 6-7 sunt de efort nul (fig. 10.3).

5) Izolarea nodurilor începe așa cum s-a arătat, cu un nod în care există două bare de efort necunoscut. În această situație există două noduri la grinda dată: nodul numărul 1 și nodul numărul 8. Se izolează primul nod (numărul 1).

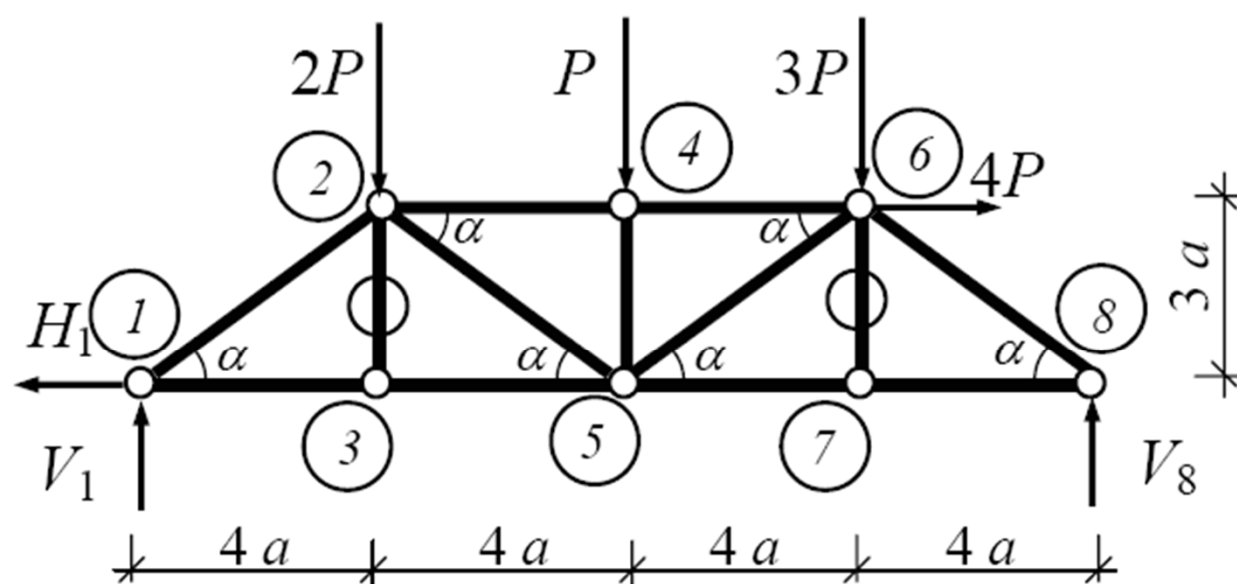


Fig. 10.3.

Schema de forțe corespunzătoare acestui nod izolat este arătată în figura 10.4, *a* unde eforturile necunoscute I_{13} și S_{12} sunt reprezentate ca “ieșind” din nod (conform convenției de lucru adoptate), iar reacțiunile V_1 și H_1 cu valorile lor.

Ecuatiile de proiecție de forțe pentru echilibrul nodului numărul 1 sunt:

$$\begin{cases} \sum X_i = -4P + I_{13} + S_{12} \cos \alpha = 0 \\ \sum Y_i = 2P + S_{12} \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{12} = -\frac{10}{3}P \\ I_{13} = \frac{20}{3}P \end{cases}$$

unde valorile funcțiilor trigonometrice $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ și $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ se stabilesc din triunghiul dreptunghic format de nodurile 1, 2 și 3.

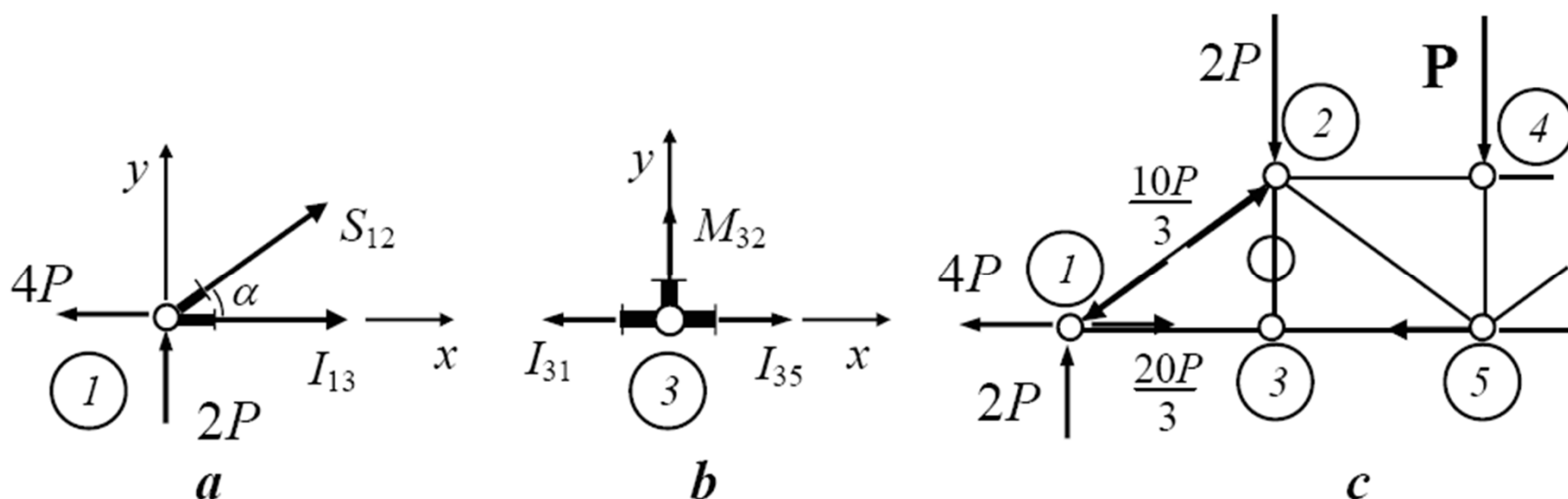


Fig. 10.4.

6) Etapa următoare constă în reprezentarea rezultatelor obținute pe o schemă generală a grinzii cu zăbrele. Efortul din talpa superioară S_{12} a rezultat cu semnul minus, ceea ce înseamnă că de fapt acest efort “intră” în nod, așa cum este reprezentat în figura 10.4, *c*. Transmitem imediat cele două eforturi calculate din nodul numărul 1, la nodurile vecine 2 și 3, de la celălalt capăt al barelor respective. Se observă de altfel că izolând nodul numărul 3, unde una din cele trei bare a fost identificată ca fiind de efort nul ($M_{32} = 0$), eforturile I_{13} și I_{35} sunt egale și de sensuri opuse (fig. 10.4, *b*), adică barele aflate în prelungire au același efort. Consecința imediată este aceea că numărul necunoscutelor de calculat (eforturi din bare) se mai reduce cu o unitate, efortul I_{13} ($= I_{35}$) putând fi transmis direct în nodul numărul 5 (fig. 10.4, *c*).

7) Analiza schemei generale de forțe reprezentate pe grinda cu zăbrele din figura 10.4, *c* arată că nodurile vecine care ar putea fi izolate sunt nodurile având numerele 2 și 5. În nodul numărul 2 sunt două bare de efort necunoscut (2-4 și 2-5), în timp ce în nodul numărul 5 există patru bare de efort necunoscut (5-2, 5-4, 5-6 și 5-7). Este evident că se alege nodul numărul 2 pentru a fi izolat și se scriu ecuațiile de proiecție corespunzător schemei de forțe din figura 10.5, *a*:

$$\begin{cases} \sum X_i = S_{24} + D_{25} \cos \alpha + \frac{10}{3}P \cos \alpha = 0; \\ \sum Y_i = \frac{10}{3}P \sin \alpha - D_{25} \sin \alpha - 2P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{24} = -\frac{8}{3}P; \\ D_{25} = 0. \end{cases}$$

Valorile obținute sunt reprezentate pe schema de forțe din figura 10.5, *b*.

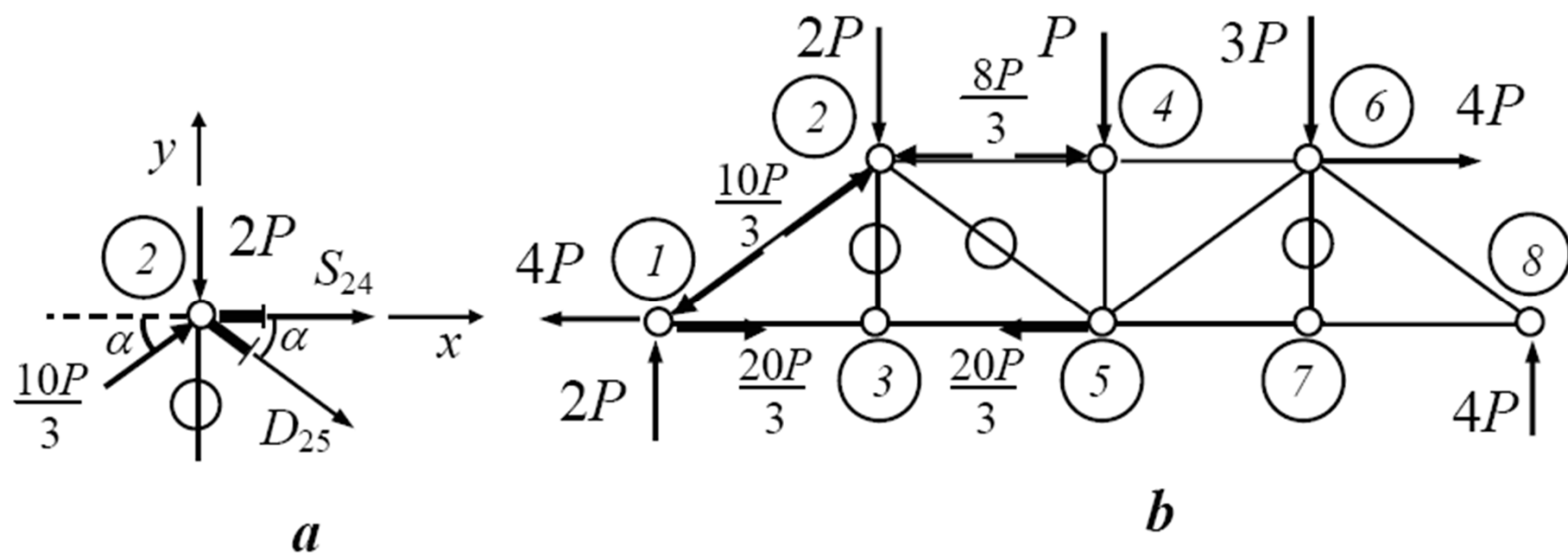


Fig. 10.5.

8) Se izolează nodul numărul 4 (fig. 10.6, *a*). Acest **nod** este **format din trei bare, dintre care două sunt în prelungire și există o forță exterioară acționând pe direcția celei de-a treia bare**. Ecuațiile de proiecție arată particularitățile acestui caz:

$$\begin{cases} \sum X_i = \frac{8}{3}P + S_{46} = 0 \\ \sum Y_i = -P - M_{45} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{46} = -\frac{8}{3}P; \\ M_{45} = -P. \end{cases}$$

Barele aflate în prelungire au același efort, iar forța exterioară este echilibrată de un efort egal și de sens contrar din cea de-a treia bară (M_{45}). Aceste constatări pot fi folosite și în cadrul altor aplicații, tot pentru micșorarea numărului de necunoscute.

9) Schema generală de forțe este completată cu rezultatele obținute la izolarea nodului numărul 4 (fig. 10.6, *b*).

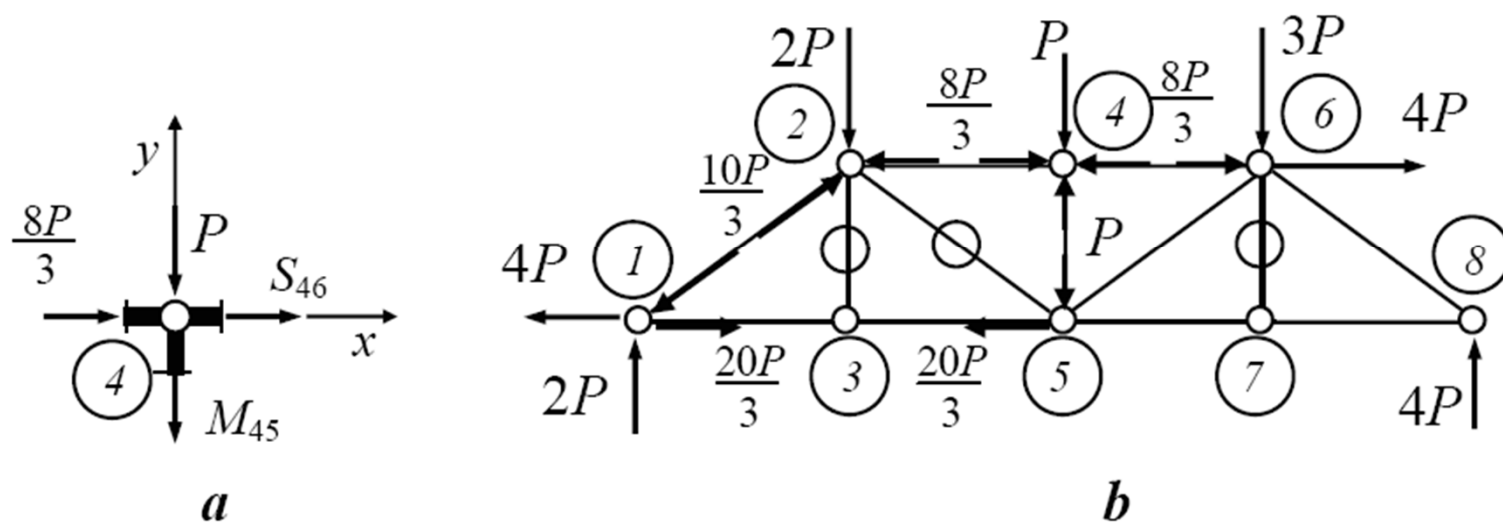


Fig. 10.6.

10) Se trece la izolarea nodului numărul 5 (fig. 10.7, *a*) și se scriu ecuațiile de proiecție:

$$\begin{cases} \sum X_i = -\frac{20}{3}P + D_{56} \cos \alpha + I_{57} = 0 \\ \sum Y_i = -P + D_{56} \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{56} = \frac{5}{3}P \\ I_{57} = \frac{16}{3}P, \end{cases}$$

apoi se reprezintă pe schema generală de eforturi a grinzii cu zăbrele (fig. 10.7, *b*). Efortul I_{57} calculat în nodul 5, se transmite direct la nodul 8 sub forma efortului $I_{87} = I_{57}$ pentru că în nodul intermediar 7 are loc egalitatea $I_{75} = I_{78}$ (a se vedea concluzia de la izolarea nodului numărul 3, aflat în aceeași situație).

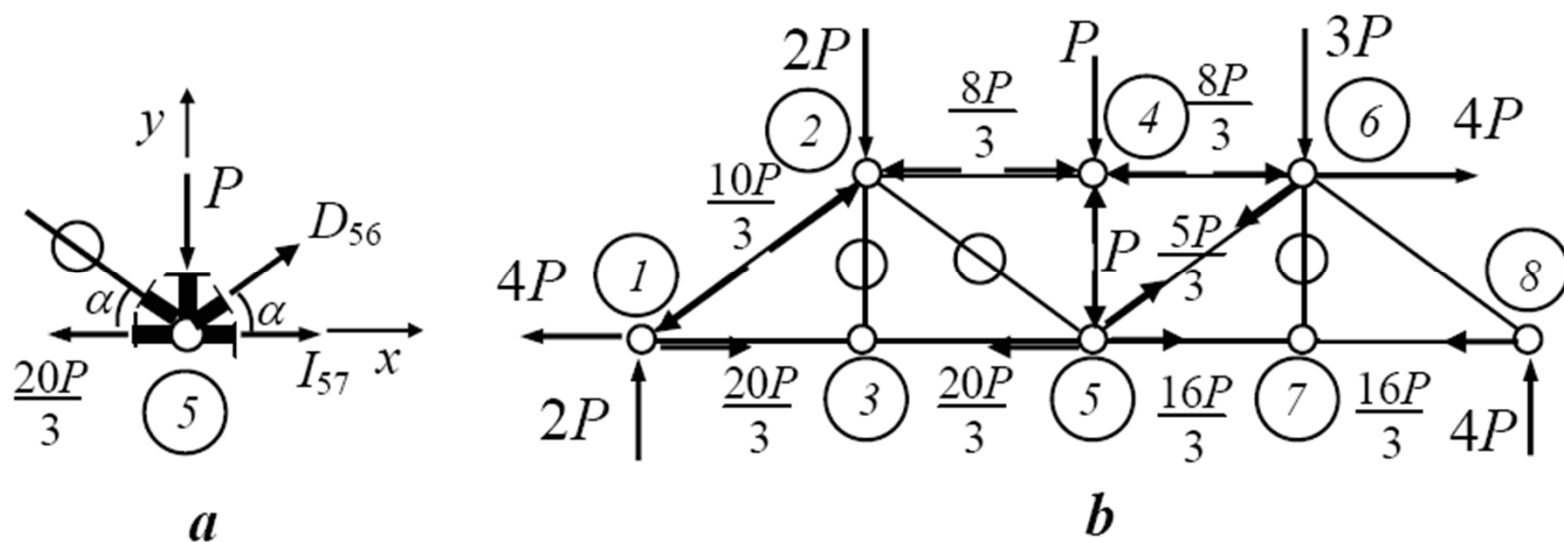


Fig. 10.7.

11) Se izolează nodul numărul 6 (fig. 10.8, *a*) la care există o singură bară de efort necunoscut. În acest nod se scrie prima ecuație de proiecție de forțe pe axa Ox :

$$\sum X_i = \frac{8}{3}P - \frac{5}{3}P \cos \alpha + 4P + S_{68} \cos \alpha = 0 \Rightarrow S_{68} = -\frac{20}{3}P$$

din care s-a aflat singura necunoscută S_{68}

12) Schema finală de forțe este reprezentată în figura 10.8, *b*.

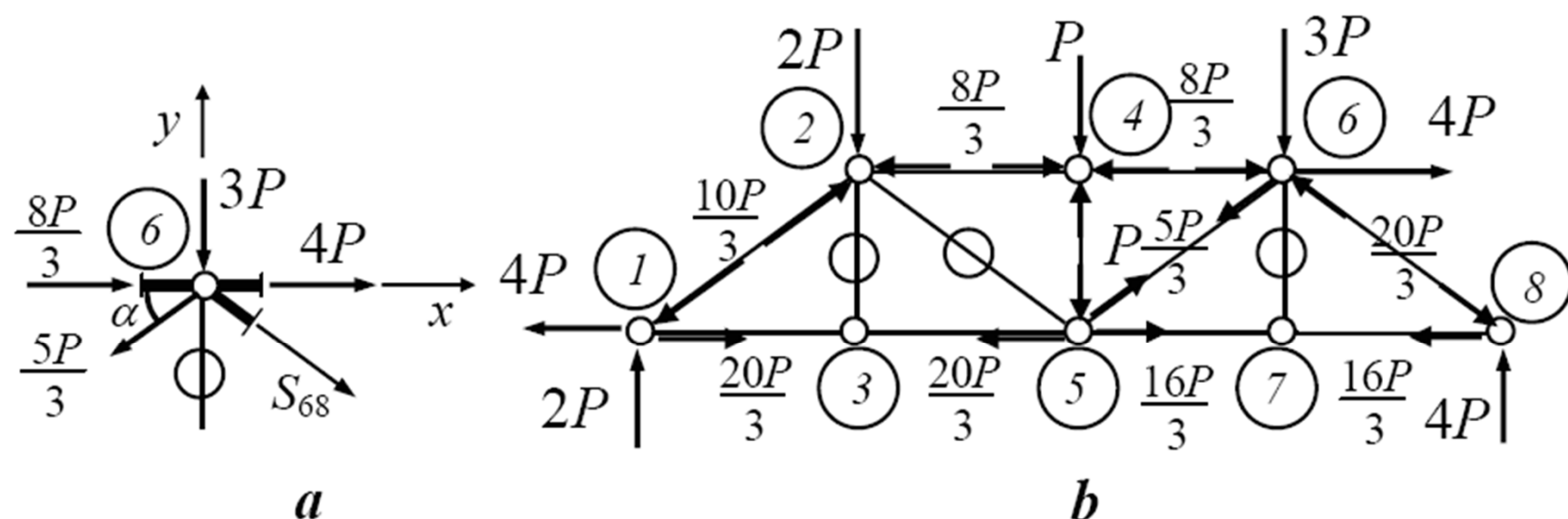


Fig. 10.8.

13) A doua ecuație de proiecție care se poate scrie în acest nod (numărul 6), este o ecuație de verificare:

$$\sum Y_i = -3P - \frac{5}{3}P \cos \alpha + 4P + S_{68} \sin \alpha = -3P - \frac{5}{3}P + 4P - \frac{20}{3}P \cdot \frac{3}{5} \equiv 0.$$

În ultimul nod, numărul 8 (fig. 10.9), cele două ecuații de proiecție se scriu tot ca ecuații de verificare, deoarece eforturile au fost aflate pentru toate eforturile din barele care converg în acest nod:

$$\begin{cases} \sum X_i = -\frac{16}{3}P + \frac{20}{3}P \cos \alpha = -\frac{16}{3}P + \frac{20}{3}P \cdot \frac{4}{5} \equiv 0; \\ \sum Y_i = 4P - S_{86} \sin \alpha = 4P - \frac{20}{3}P \cdot \frac{3}{5} \equiv 0. \end{cases}$$

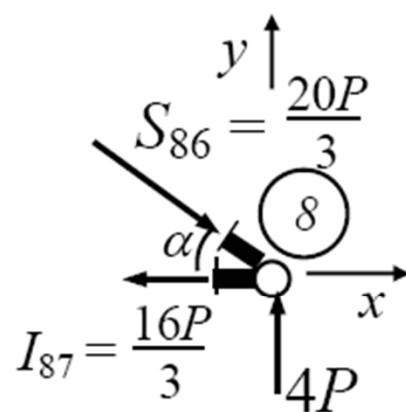


Fig. 10.9.

GRINZI CU ZĂBRELE. METODA SECȚIUNILOR

Etape în aplicarea metodei

A doua metodă analitică pentru calculul eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele este metoda secțiunilor care se bazează atât pe teorema solidificării cât și pe teorema echilibrului părților. Metoda se utilizează de obicei pentru verificarea rezultatelor eforturilor din bare stabilite în urma utilizării metodei izolării nodurilor, dar poate fi folosită și ca metodă directă pentru calculul eforturilor din bare.

Etapele de calcul la aplicarea acestei metode (utilizată ca metodă de verificare) sunt :

1) Se verifică condiția de determinare statică și invariabilitate geometrică, conform relației:

$$2N = b + r,$$

unde s-a notat cu N numărul nodurilor, cu b numărul barelor, iar cu r numărul legăturilor exterioare simple.

2) Se calculează reacțiunile din legăturile exterioare.

3) Se procedează la o secționare a grinzii cu zăbrele, recomandându-se îndeplinirea următoarelor condiții:

- secțiunea trebuie să despartă grinda în două părți distincte;
- secțiunea aplicată trebuie să întâlnească cel mult trei bare de efort necunoscut;
- alegerea celor trei bare de efort necunoscut, se face astfel încât aceste bare secționate să nu fie toate trei paralele, sau toate trei concurente în același punct.

4) Pentru una din cele două părți obținute în urma secționării se scriu trei ecuații de echilibru. Scrierea ecuațiilor se face astfel încât să se obțină un sistem de ecuații independente în vederea unei rezolvări rapide. De exemplu, pentru o grindă cu tălpi paralele, una dintre ecuații va fi ecuația de proiecție a forțelor pe direcția normală la direcția tălpilor, iar celelalte două, ecuații de proiecție de moment în raport cu punctele de intersecție în care se întâlnesc două câte două, direcțiile eforturilor căutate.

5) Se rezolvă sistemul de ecuații stabilit la punctul anterior și se figurează eforturile găsite pe o schemă de forțe a grinzii în ansamblul ei.

6) Verificarea se face pentru un efort calculat, considerând o altă secțiune.

Aplicații

Utilizând metoda secțiunilor, să se determine numai eforturile din barele grinzii cu zăbrele întâlnite de secțiunea $I - I$ (fig. 11.1).

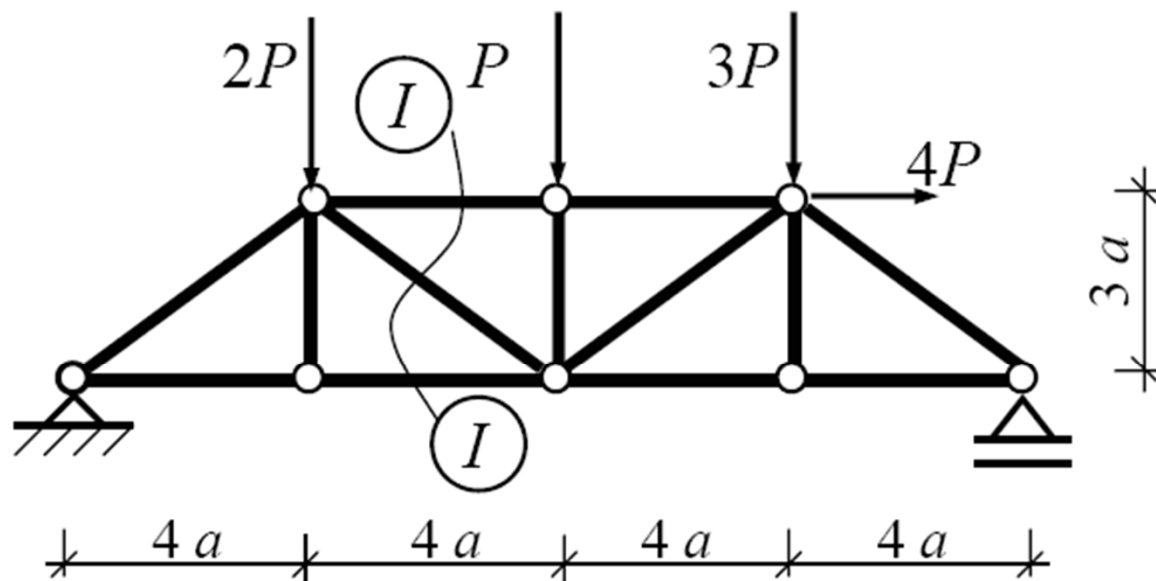


Fig. 11.1.

Rezolvare:

Grinda cu zăbrele din figura 11.1 a fost rezolvată în capitolul precedent, urmărindu-se verificarea rezultatelor obținute anterior cu metoda izolării nodurilor, numai pentru barele secționate. Astfel, secțiunea *I - I* desparte grinda cu zăbrele în două părți. Se alege una din cele două, de exemplu partea din stânga (fig. 11.2). Aceasta este supusă acțiunii forțelor exterioare date și de legătură, precum și eforturilor din cele trei bare secționate. Condiția de echilibru a părții alese, se exprimă prin trei ecuații de proiecție (conform teoremei echilibrului părților), ecuații care se aleg astfel încât fiecare din acestea să aibă câte o singură necunoscută.

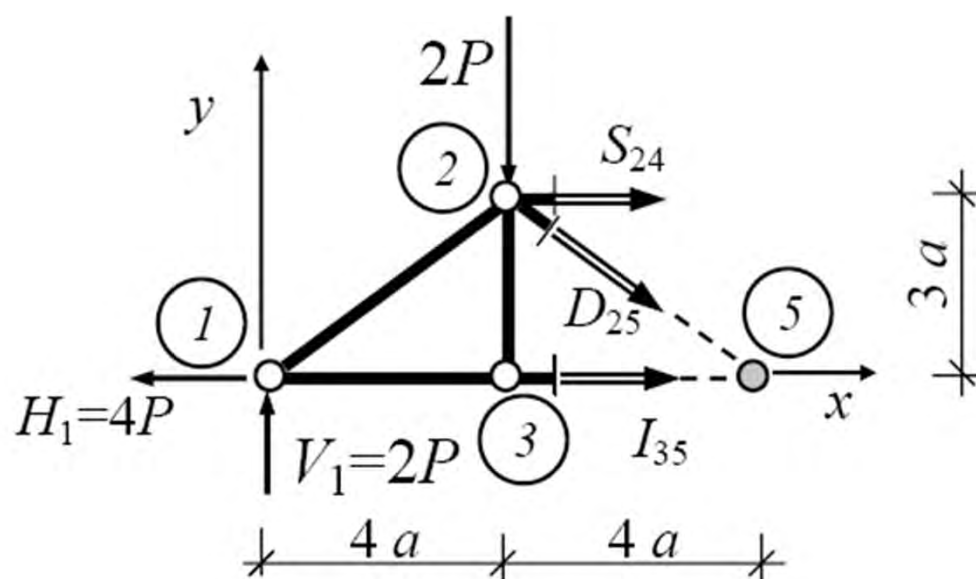


Fig. 11.2.

Pentru calculul efortului din talpa inferioară I_{35} se scrie ecuația de proiecție de moment în raport cu punctul 2, deoarece celelalte două eforturi necunoscute sunt concurente în acest punct și nu intervin în ecuație:

$$\sum M_{(2)} = -V_1 \cdot 4a - H_1 \cdot 3a + I_{35} \cdot 3a = 0 \Rightarrow I_{35} = \frac{20}{3}P.$$

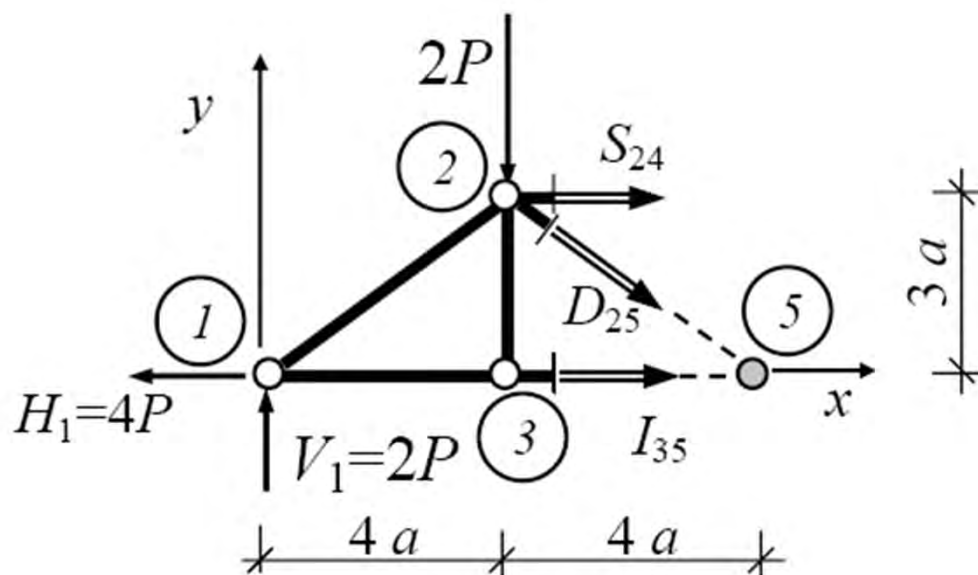


Fig. 11.2.

Aplicând același raționament pentru calculul efortului din talpa superioară S_{24} , se scrie a doua ecuație de proiecție tot de moment, dar de această dată în raport cu punctul 5, punct în care eforturile D_{25} din diagonală și I_{35} din talpa inferioară sunt concurente:

$$\sum M_{(5)} = -V_1 \cdot 8a + 2P \cdot 4a - S_{24} \cdot 3a = 0 \Rightarrow S_{24} = -\frac{8}{3}P.$$

Cel de-al treilea efort, D_{25} din diagonală se stabilește din ecuația de proiecție de forțe pe direcția verticală, deoarece S_{24} și I_{35} sunt orizontale și deci au proiecția nulă pe direcția verticală:

$$\sum Y_i = V_1 - 2P + D_{25} \sin \alpha = 2P - 2P + D_{25} \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow D_{25} = 0.$$

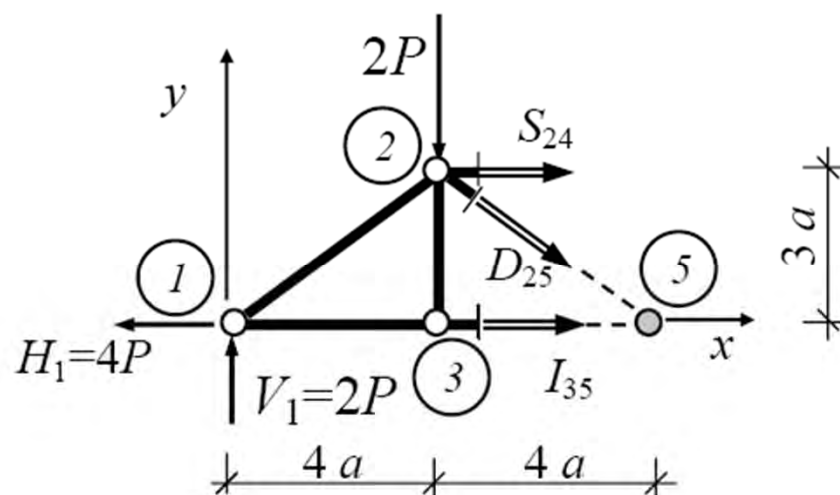


Fig. 11.2.



