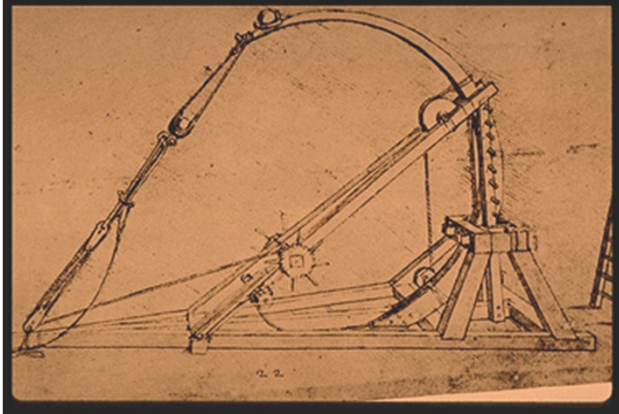




CURS 5

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

STATICA SOLIDULUI RIGID

CONDITIILE DE ECHILIBRU ALE SOLIDULUI RIGID

Solidele rigide sunt corpuri indeformabile, distanta dintre doua puncte aparținând solidului rămânând invariabila, indiferent de mărimea si natura solicitări.

Un rigid este liber daca poate ocupa orice poziție in spațiu, aceasta fiind determinata numai de forțele care acționează asupra lui.

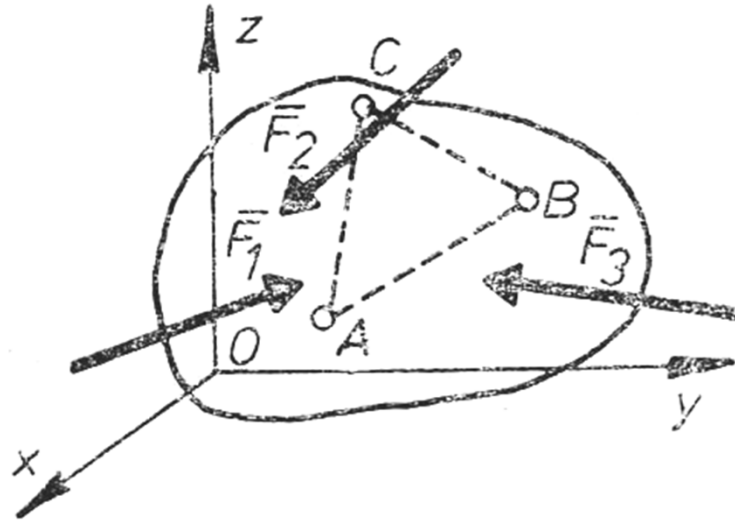
Pentru determinarea poziției in spațiu a unui solid liber este necesar si suficient sa se cunoască poziția, fata

$$| \overline{AB} | = C_1 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2};$$

$$| \overline{BC} | = C_2 = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2};$$

$$| \overline{AC} | = C_3 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}.$$

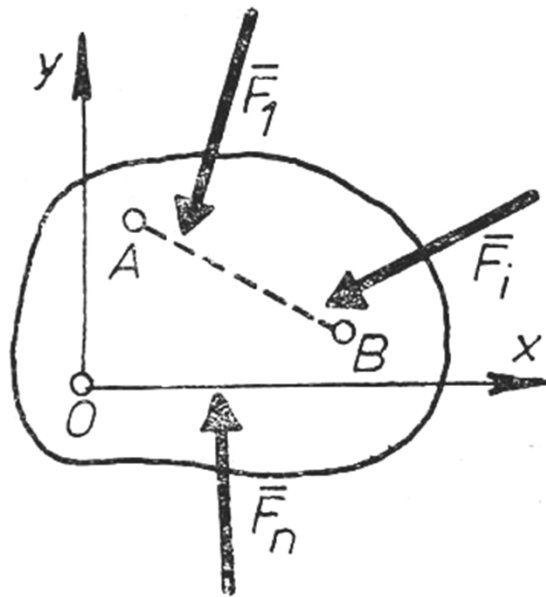
CONDITIILE DE ECHILIBRU ALE SOLIDULUI RIGID



⇒ Un rigid liber in spațiu are 6 grade de libertate

In plan este necesar sa se cunoască poziția a doua puncte A si B.

Deoarece distanta AB este constanta, **rezulta ca rigidul liber in plan are 3 grade de libertate.**



Pentru ca un sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid liber să fie în echilibru este necesar și suficient ca într-un punct arbitrar din spațiu rezultanta sistemului de forțe și momentul resultant față de punctul respectiv să fie egale cu zero:

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{M_o} = 0$$

Relațiile vectoriale prezentate mai sus conduc la ecuațiile scalare de echilibru prezentate în continuare.

• În cazul sistemelor de forțe în spațiu se pot scrie 6 ecuații scalare, 3 ecuații de proiecție și trei ecuații de momente:

$$\sum X_i = 0 ; \quad \sum M_{i_x} = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \quad \sum M_{i_y} = 0 ;$$

$$\sum Z_i = 0 ; \quad \sum M_{i_z} = 0.$$

- In cazul sistemelor de forte in plan (de exemplu in planul xOy) se pot scrie 3 ecuații scalare de echilibru, 2 ecuații de proiecție si o ecuație de momente:

$$\sum X_i = 0 ; \sum Y_i = 0 ; \sum M_{i_z} = 0 ;$$

- In cazul sistemelor de forte paralele (de exemplu cu axa Oz):

$$\sum Z_i = 0 ; \sum M_{i_x} = 0 ; \sum M_{i_y} = 0.$$

- In cazul sistemelor de forte concurente (se considera punctul de concurenta originea O a sistemului de axe) raman următoarele 3 ecuații scalare:

$$\sum X_i = 0 ; \sum Y_i = 0 ; \sum Z_i = 0.$$

- In cazul unui sistem de cupluri rămân distincte numai ecuațiile de momente:

$$\sum M_{i_x} = 0 ; \sum M_{i_y} = 0 ; \sum M_{i_z} = 0.$$

ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGATURI IDEALE

In natura, corpurile materiale sunt legate de mediul înconjurător prin “obligații” de natura geometrică pe care trebuie să le satisfacă diferitele puncte (obligația unuia sau mai multor puncte ale solidului de a se afla pe suprafețe, curbe sau în anumite puncte din spațiu).

Legătura este o condiție geometrică impusă care restrânge libertatea de mișcare a unui solid rigid sau a unui sistem de solide rigide.

AXIOMA LEGĂTURILOR

Orice legătură poate fi suprimată și înlocuită cu o forță sau cu un sistem de forțe numit reacțiune(i) care acționând asupra corpului produce același efect mecanic ca și legătura însăși.

Sub acțiunea forțelor exterioare efectiv aplicate și a forțelor de legătura, solidul poate fi considerat și tratat ca atare, iar condițiile de echilibru se exprima prin relațiile:

$$\sum X_i = 0 ; \sum M_{i_x} = 0 ;$$

$$\sum Y_i = 0 ; \sum M_{i_y} = 0 ;$$

$$\sum Z_i = 0 ; \sum M_{i_z} = 0.$$

În aceste relații se introduc în plus, ca necunoscute, reacțiunile.

Din punct de vedere al proprietăților fizice, legăturile se clasifică în:

- *legături lucii sau ideale*, unde frecările sunt neglijate;
- *legături aspre sau cu frecare*, care în fapt sunt legăturile reale.

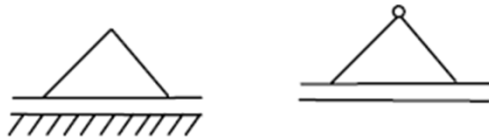
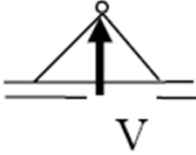
Din punct de vedere al rolului funcțional, legăturile solidului rigid frecvent utilizate în mecanica tehnică se clasifică în:

- reazeme simple;***
- reazeme articulate;***
 - sferică;***
 - cilindrică;***
- încastrarea;***
- legăturile prin fire sau bare.***

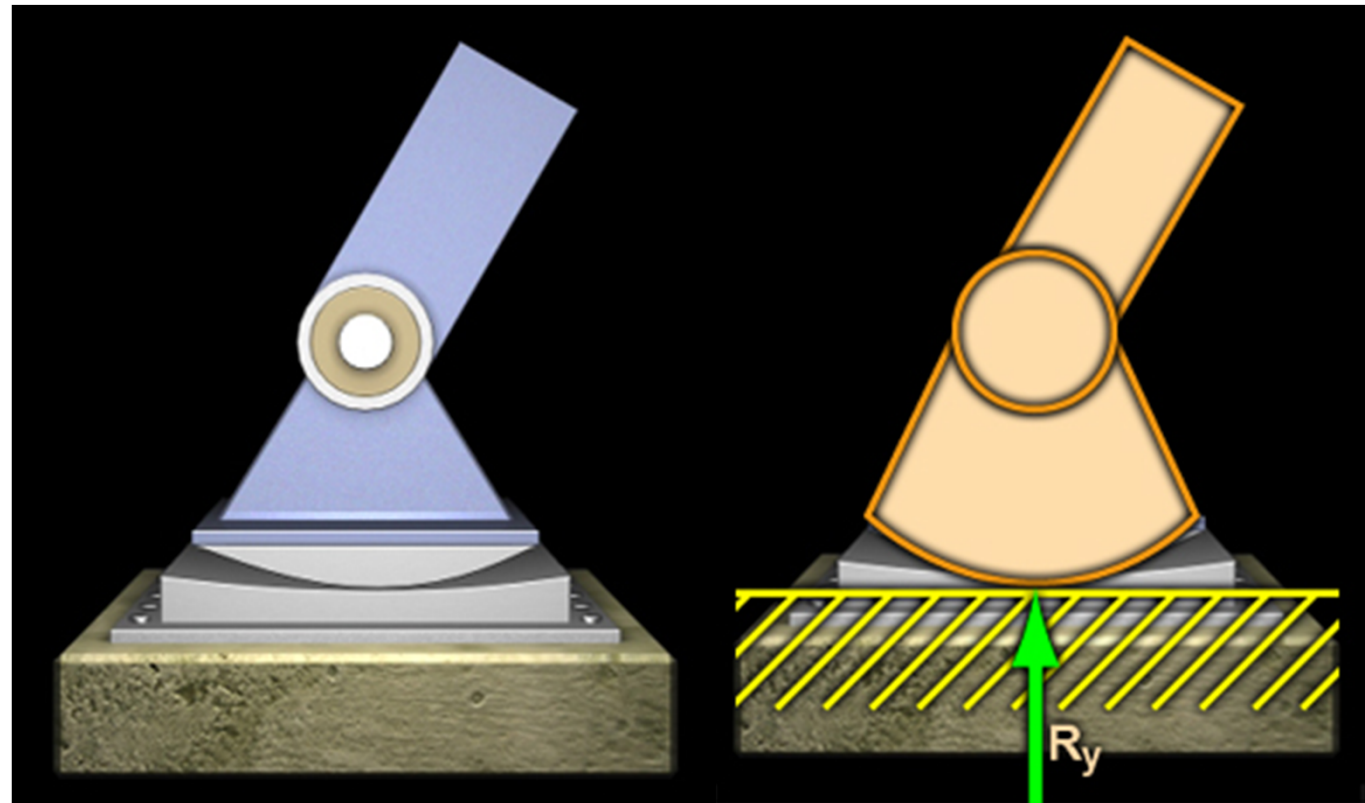
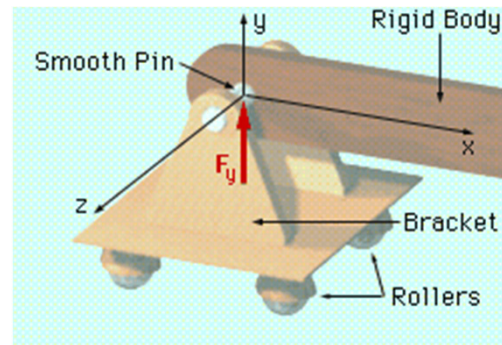
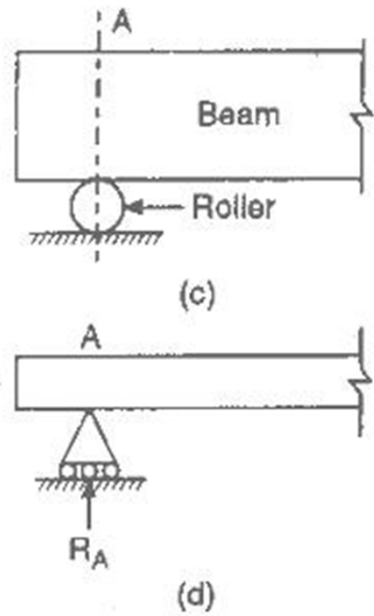
Reazeme simple

- sunt anulate posibilitățile de translație pe direcția reazemelor.

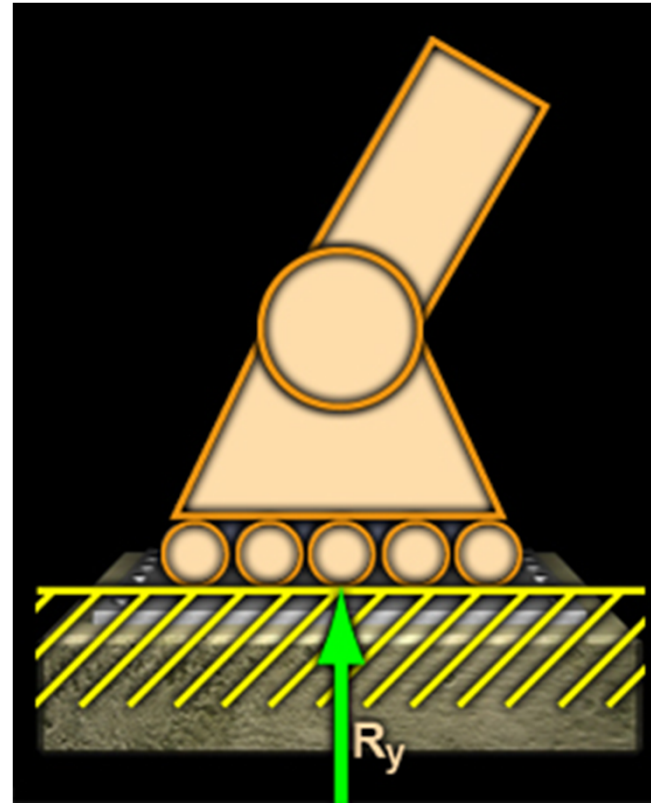
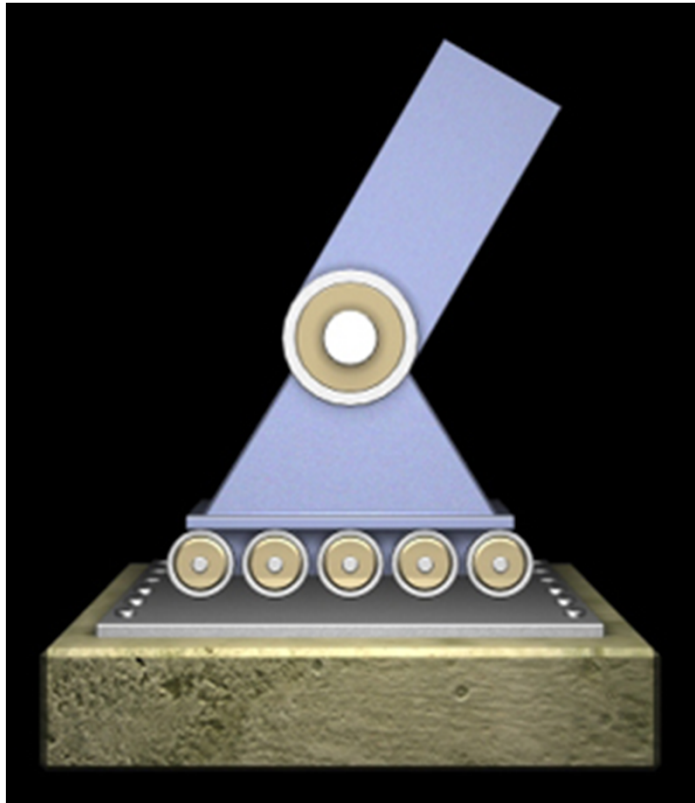
Daca un solid rigid este obligat sa se găsească pe o curba sau o suprafață, fiind împiedicată deplasarea acestuia după direcția unei normale la curba sau după direcția normalei la suprafață, dar fiind posibile deplasarea după direcția tangentei sau in plan tangent si rotirea in jurul punctului considerat, se spune ca legătura reprezintă un *reazem simplu*.

Tip de legătură	Schematizare	Reacțiune
Reazem simplu		

Reazeme simple



Reazeme simple

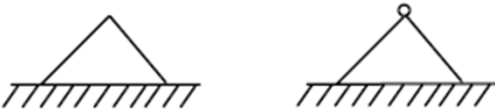
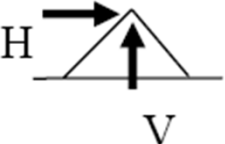


Reazeme articulate

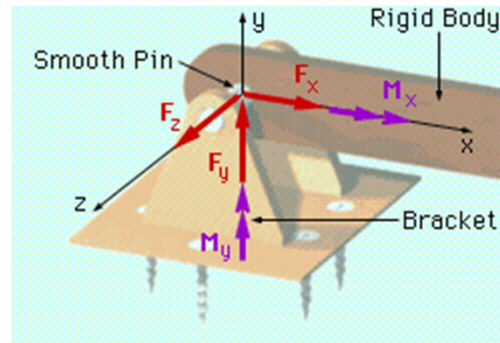
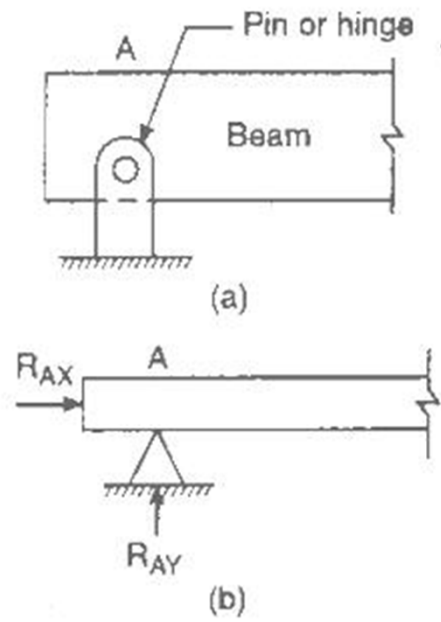
Articulația este legătura care obliga un punct al unui solid sa se găsească într-un punct fix în spațiu.

Articulația poate fi:

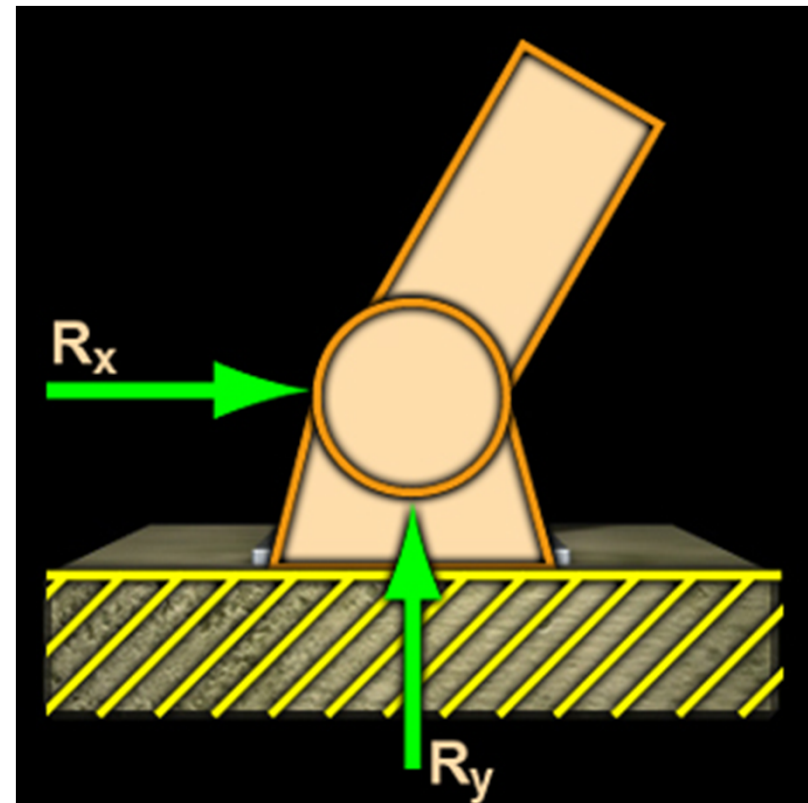
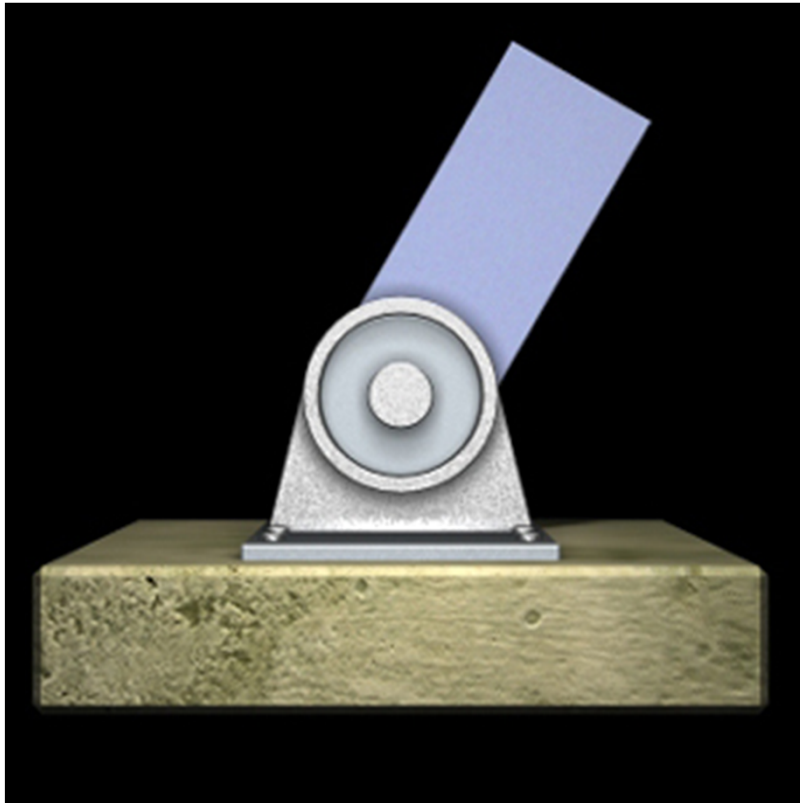
- **sferică**: sunt anulate solidului rigid 3 grade de libertate lăsând posibile numai rotațiile acestuia în raport cu axele rectangulare ale sistemului (sistem de forte în spațiu);
- **cilindrică**: sunt anulate doua din cele trei grade de libertate ale solidului; singura posibilitatea pe care o are corpul este o rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul forțelor (sistem de forte în plan).

Tip de legătură	Schematizare	Reacțiuni
Reazem articulat		

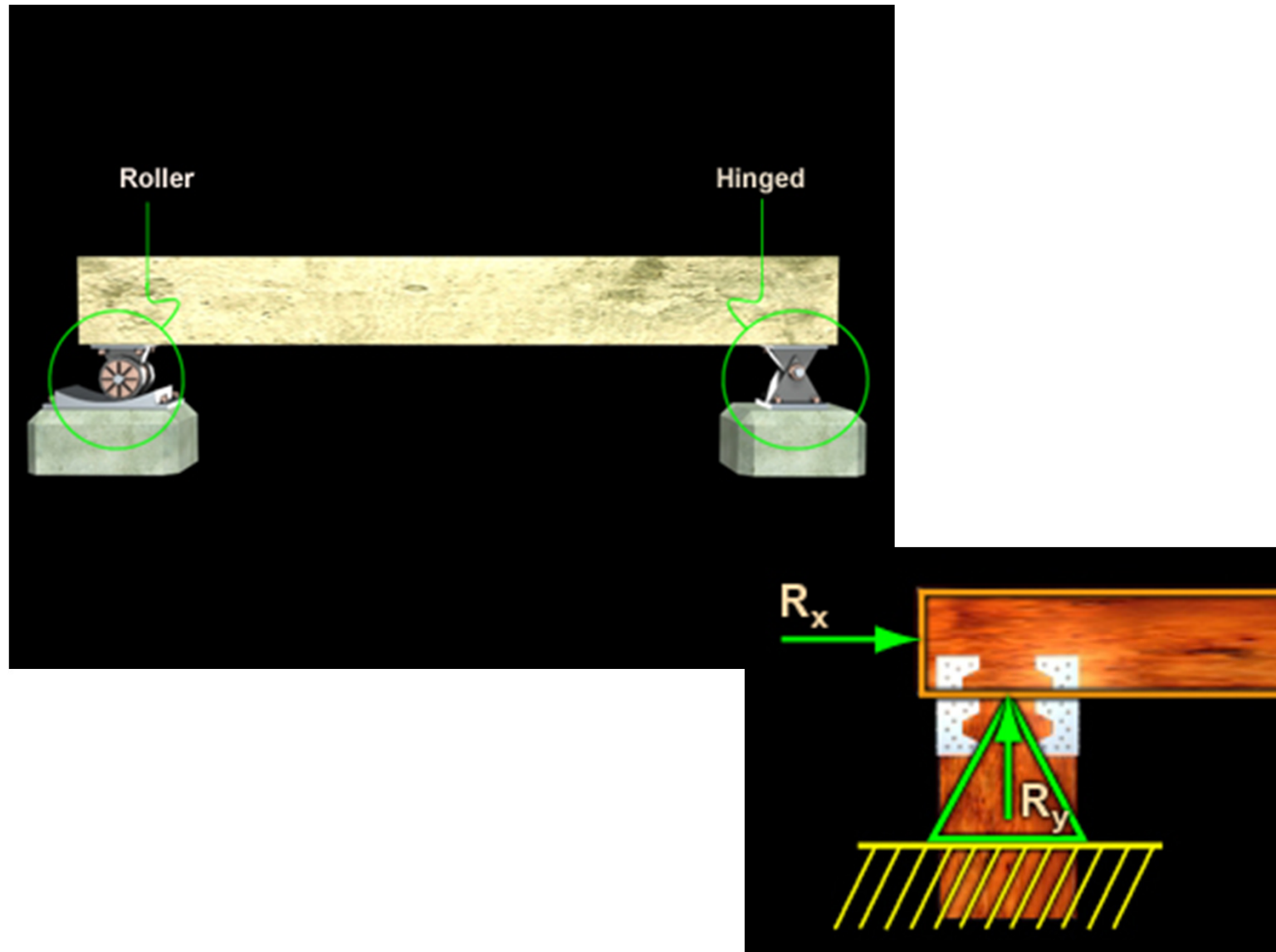
Reazeme articulate



Reazeme articulate

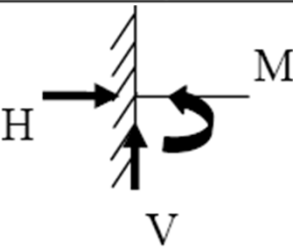


Reazeme articulate

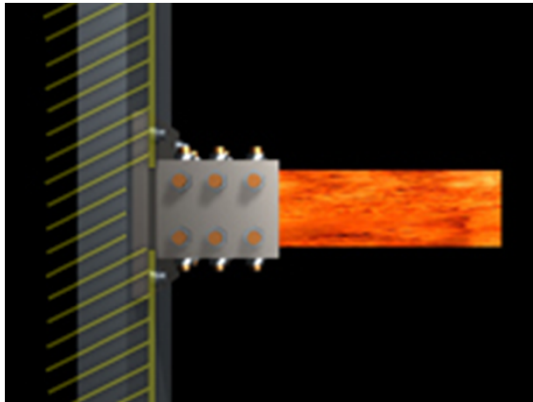
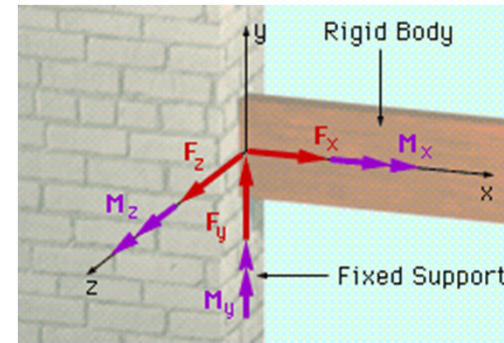
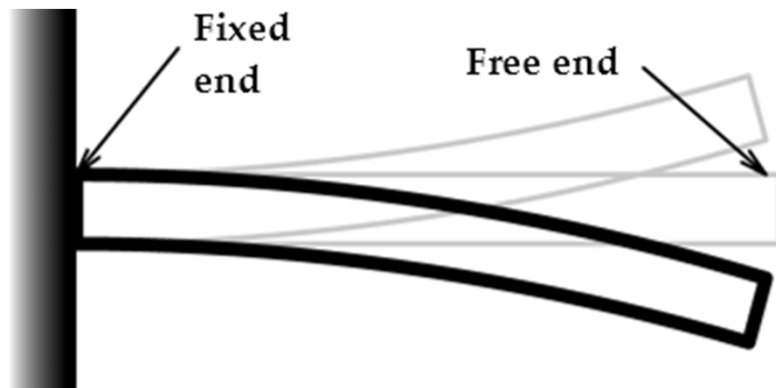


Încastrarea

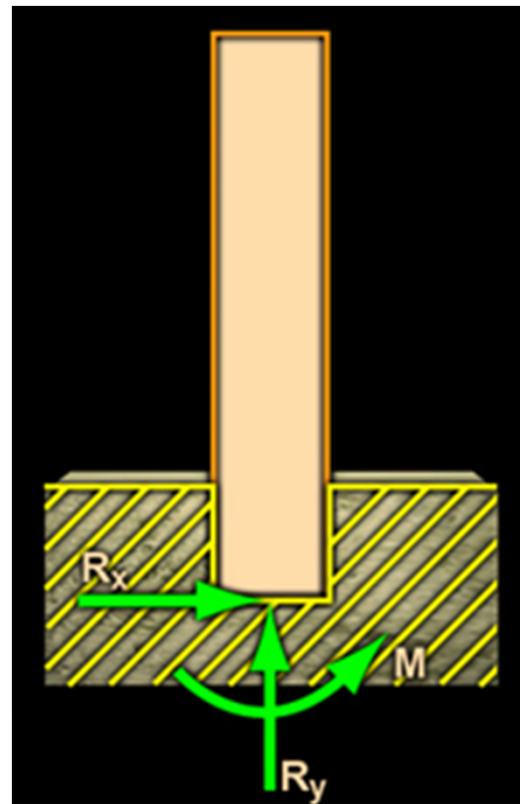
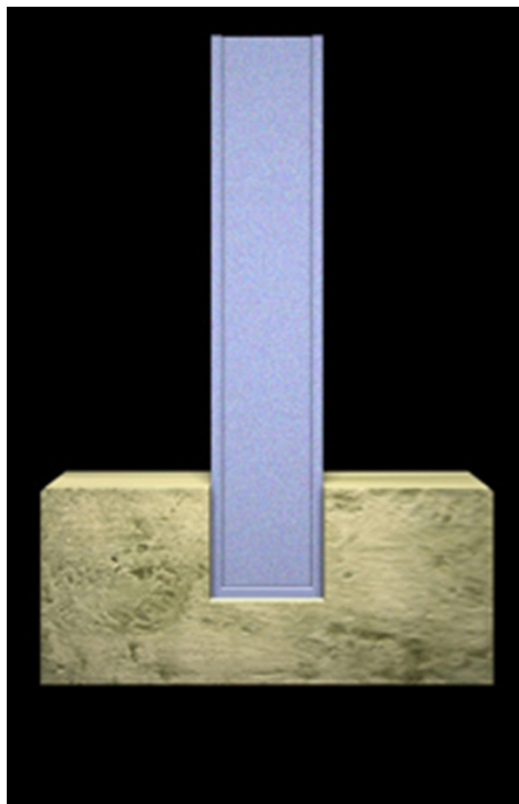
Încastrarea este legătura care suprimă unui rigid toate gradele de libertate. Corpul nu mai are nici o posibilitate de mișcare.

Tip de legătură	Schematizare	Reacțiuni
Încastrare		

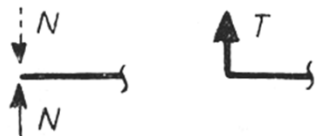
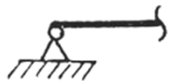
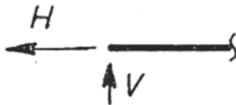
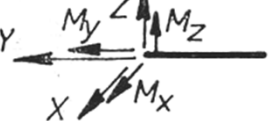
Încatrarea



Încatrarea



TIPURI DE LEGĂTURI ȘI REACȚIUNILE AFERENTE

Legătura		Simbol	Reacțiuni	Numărul de necunoscute pe care le introduce
Reazemul simplu				1
Articulația	Plană			2
	Spațială (sferică)			3
Încadrarea	Plană			3
	Spațială			6

ECHILIBRUL RIGIDULUI SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARÉ

În realitate, corpurile prezintă legături aspre sau cu frecare, care împiedică în anumite limite orice fel de mișcare.

În cazul legăturilor cu frecare, apar la contactul dintre corpuri următoarele reacțiuni:

- **forța de frecare de alunecare**, situată în planul tangent la contact, dirijată în sens contrar mișcării sau tendinței de mișcare, de valoare variabilă:

$$0 \leq T \leq \mu N$$

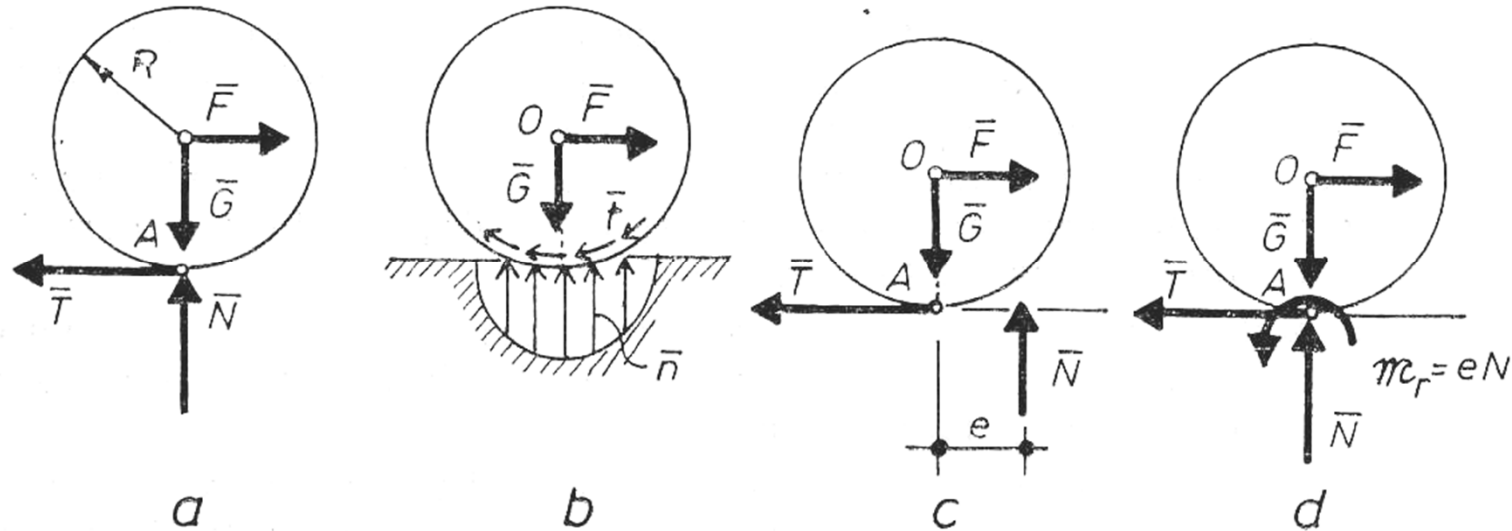
unde μ este coeficientul de frecare la alunecare;

- **reacțiunea normală** pe planul tangent comun N ;

- **cuplul de frecare la rostogolire**, având momentul, M_r , opus sensului mișcării sau tendinței de mișcare de rostogolire, de valoare variabilă:

$$0 \leq M_r \leq sN$$

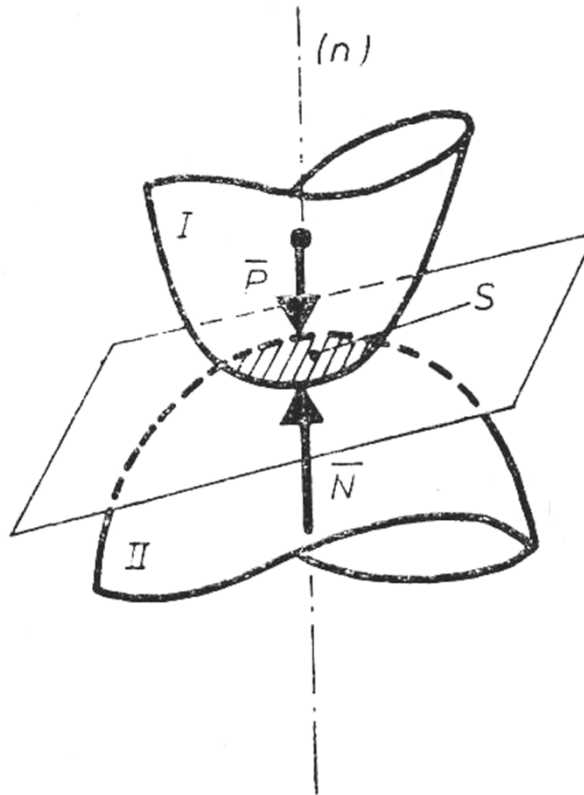
unde s este coeficientul de frecare la rostogolire;



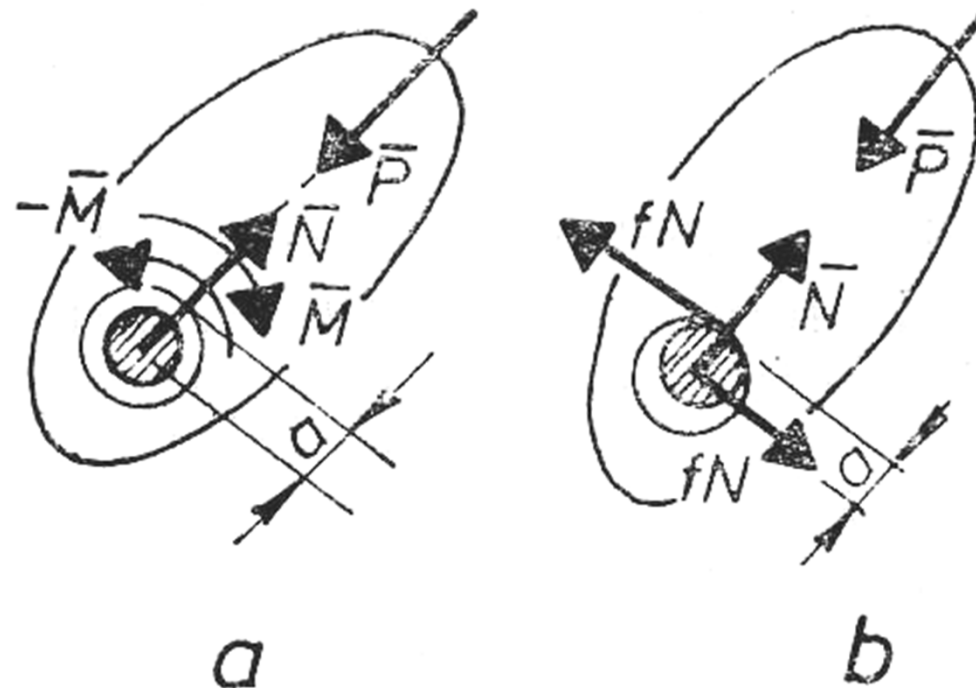
- **cuplul de frecare de pivot**, având momentul M_p opus mișcării de pivotare sau tendinței de mișcare de pivotare:

$$0 \leq M_p \leq M_1$$

unde M_1 se determină experimental de la caz la caz.



- **frecarea intr-o articulație:** se manifesta printr-un moment de sens contrar care tinde sa rotească corpul fata de articulație. Mărimea momentului de frecare din articulație variază de la zero la valoarea $f \cdot |N| \cdot a$, unde $|N|$ reprezintă mărimea reacțiunii din articulație, a raza articulației si f un coeficient de frecare de alunecare determinat experimental.

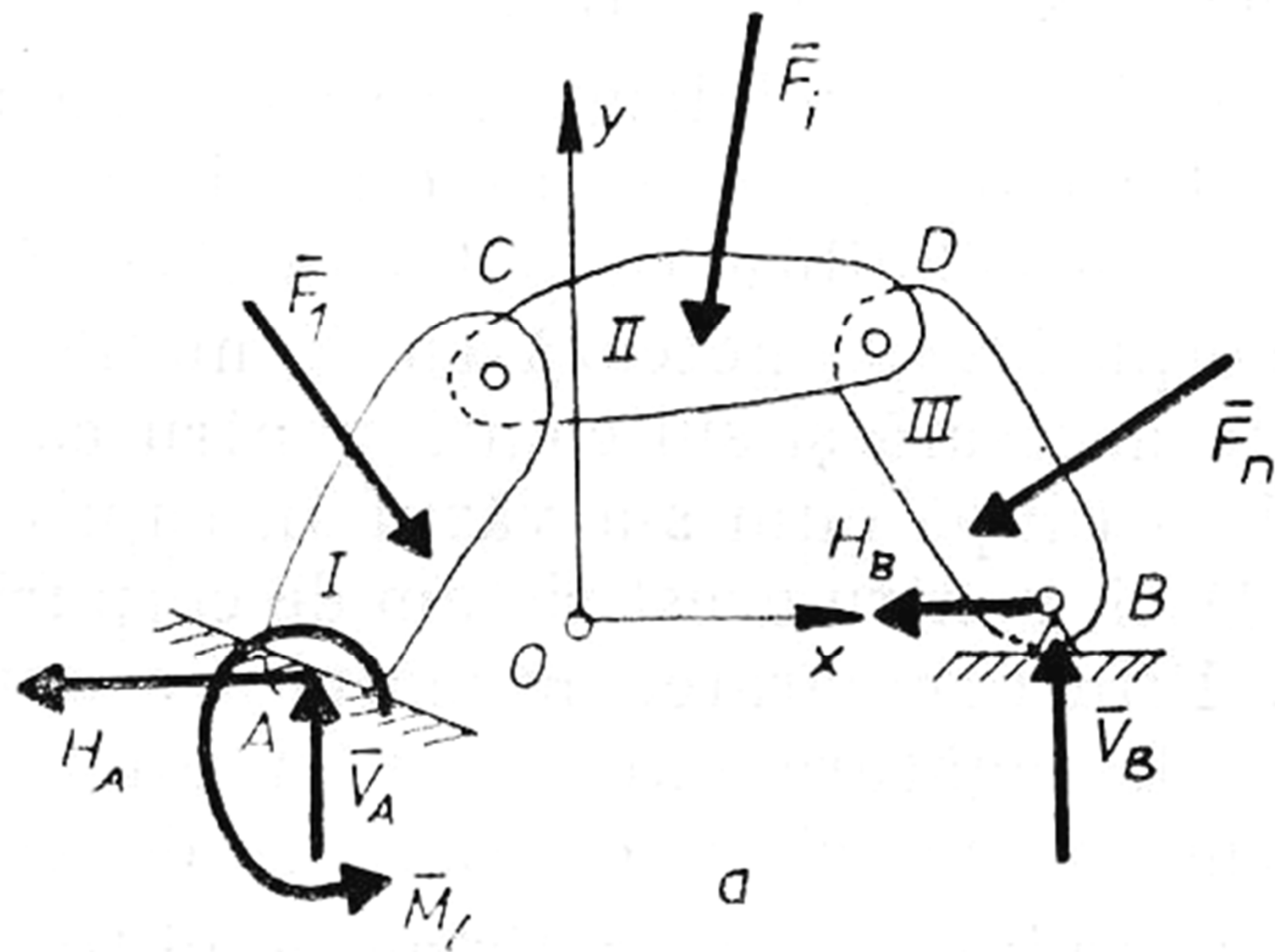


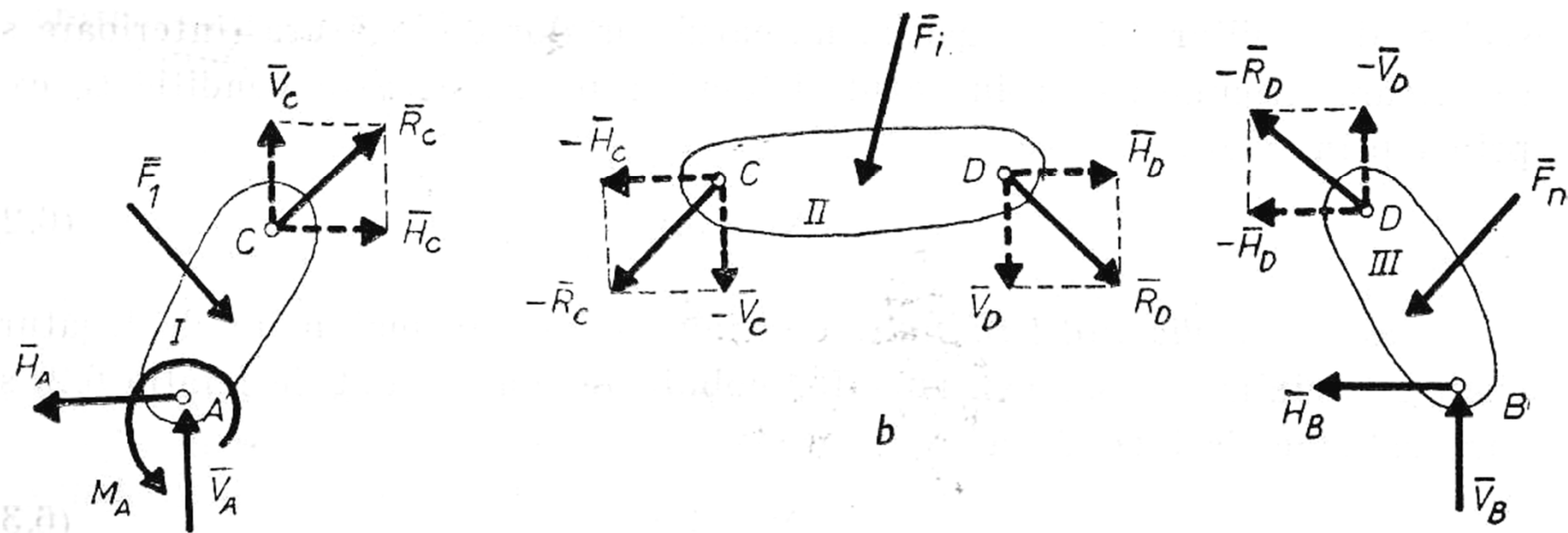
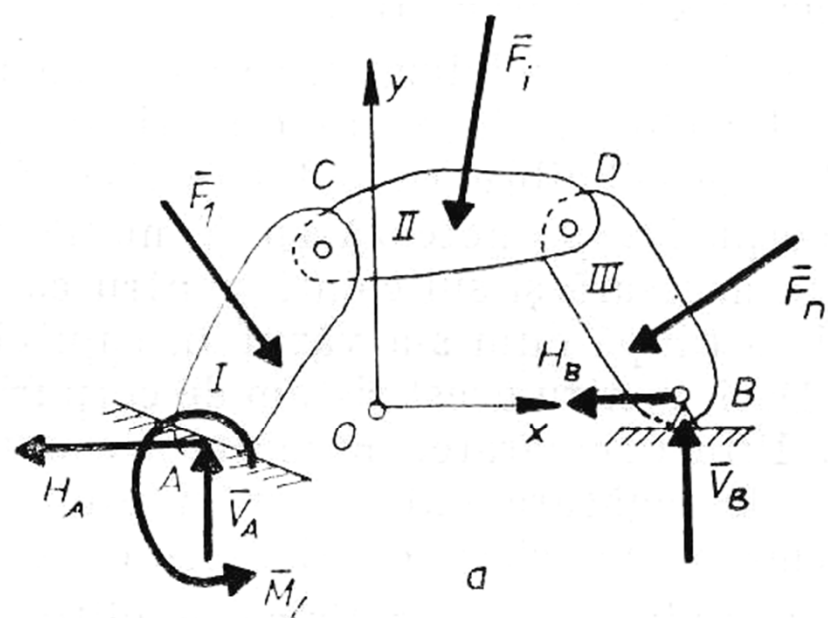
STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

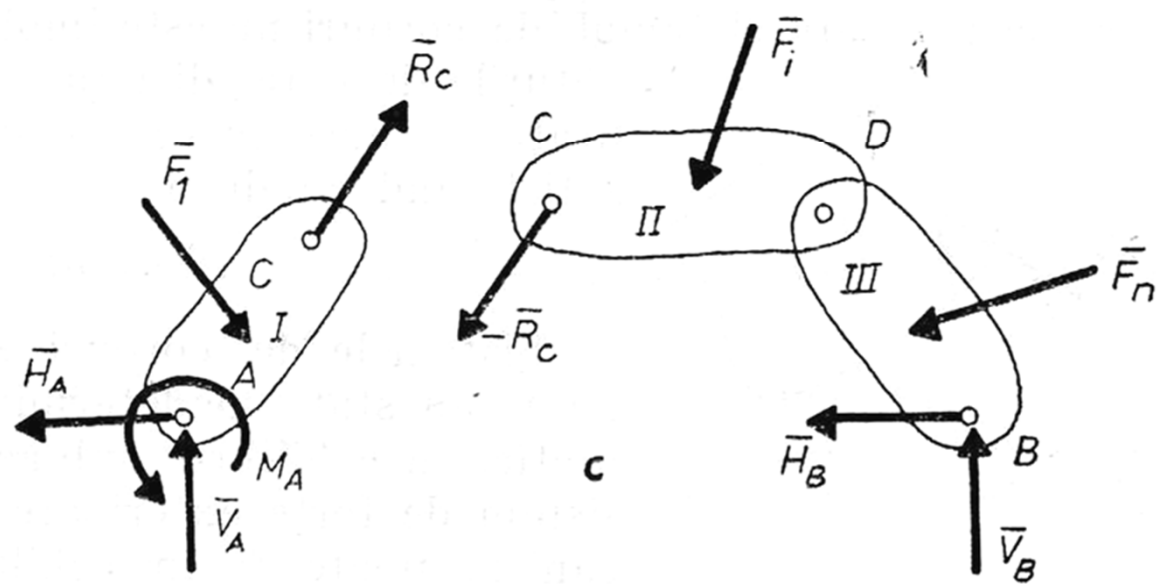
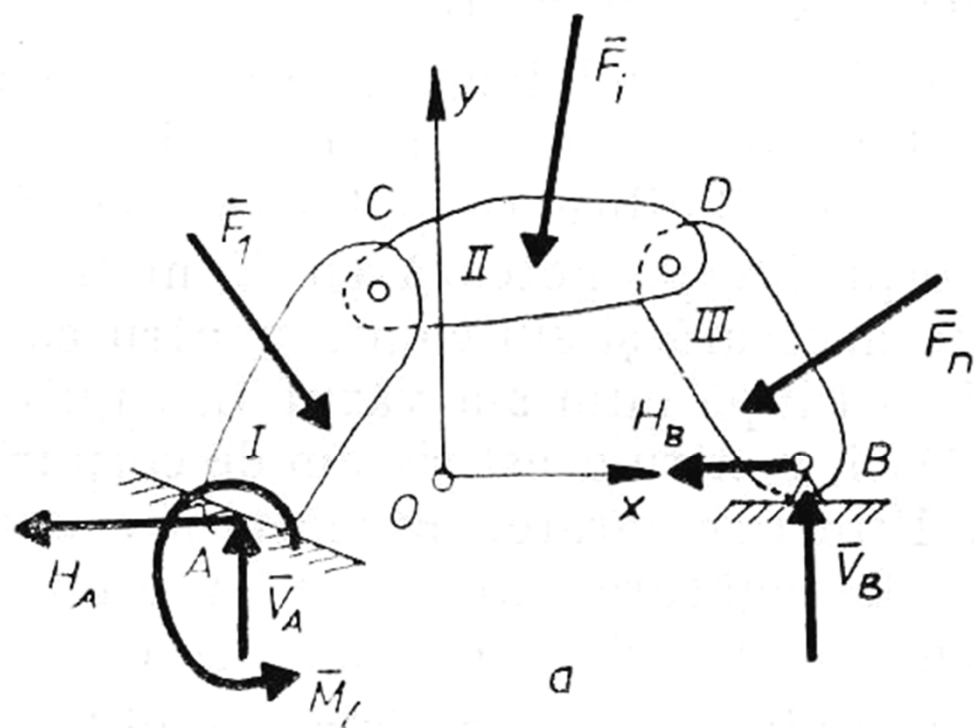
Se numește sistem de corpuri un ansamblu de corpuri legate între ele prin articulații sau reazeme simple și legate de mediul înconjurător prin reazeme simple, articulații și/sau încastrări.

Forțele care acționează asupra unui sistem de corpuri pot fi clasificate astfel:

- *forțe exterioare date*;
- *forțe exterioare de legătură* din legăturile cu mediul exterior (reacțiunile din A și B);
- *forțele interioare de legătură* dintre corpuri (legăturile din C și D).







Prin compararea numărului ecuațiilor de echilibru ($3n$) cu numărul forțelor de legătura exterioare și interioare (N) necunoscute, se pot identifica următoarele clase de sisteme de corpuri:

- **sisteme static determinate:** $N=3n$;
- **sisteme static nedeterminate:** $N>3n$;
- **mecanisme:** $N<3n$;

unde n = numărul de corpuri al sistemului.

În studiul echilibrului sistemului ne interesează:

- valorile parametrilor independenți care determină poziția de echilibru a sistemului;**
- reacțiunile legăturilor exterioare la care este supus sistemul;**
- interacțiunile reciproce.**

Pentru rezolvarea acestor probleme, studiul echilibrului sistemelor de corpuri poate fi efectuat prin mai multe metode la baza cărora stau următoarele teoreme:

a) *teorema solidificării*: pentru ca un sistem de solide rigide să fie în echilibru este necesar ca torsiul forțelor exterioare, efectiv aplicate sistemului, să fie nul în raport cu orice pol O ;

b) *teorema echilibrului părților*: dacă un sistem de corpuri rigide se află în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură care îi sunt aplicate, atunci și o parte oarecare a sistemului se va afla în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor aplicate părții considerate.

Se pot defini trei tipuri de probleme:

- fiind date forțele exterioare care acționează asupra sistemului de puncte materiale să se determine poziția de echilibru a punctelor materiale ale sistemului;**
- fiind dată poziția punctelor care formează un sistem în echilibru, să se determine forțele care acționează asupra acestui sistem;**
- probleme mixte referitoare atât la poziția de echilibru, cât și la forțele de legătură.**

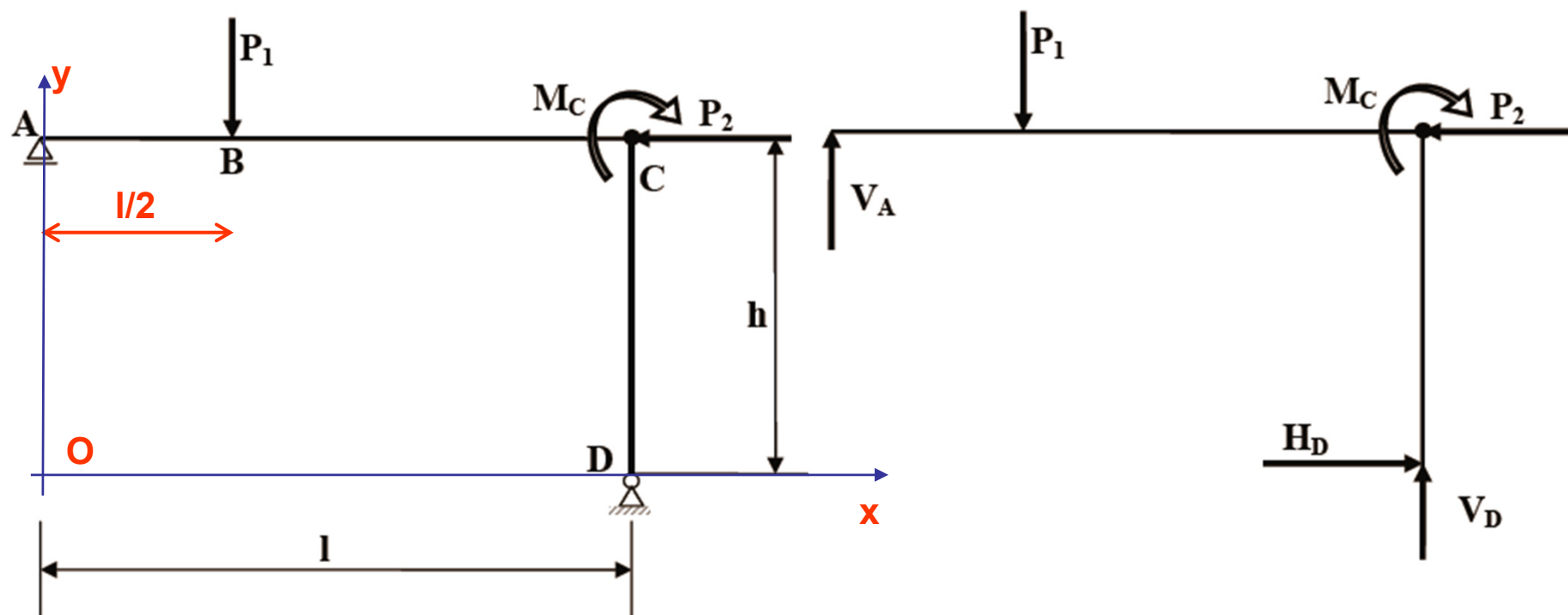
Etapele de lucru în rezolvarea acestor tipuri de probleme sunt următoarele:

- se trasează schema statică în care se izolează partea a cărei echilibru se studiază eliminând legăturile pe care le are partea considerată cu celelalte corpuri din sistem și cu corpurile exterioare sistemului;**
- se reprezintă forțele exterioare date care acționează numai asupra părții izolate și reacțiunile legăturilor suprimate în baza axiomei legăturilor și având în vedere principiul acțiunii și reacțiunii când se trece de la un corp la altul;**
- se evidențiază parametrii geometrici care determină poziția de echilibru a părții izolate în raport cu un sistem de referință ales;**
- se scriu ecuațiile de echilibru pentru porțiunea izolată, admitând ipoteza solidificării și teorema echilibrului părților;**
- se analizează rezultatele.**

APLICAȚIA 1:

Să se determine reacțiunile din bara cotită (cadrul incomplet) alcătuit din bare rigide ca în figura de mai jos.

Caz numeric: $l=4,0m$; $h=3,0m$; $P_1=2kN$; $P_2=1kN$; $M_C=4kNm$.



Se reprezintă schema cadrului cu încărcările și cele trei reacțiuni necunoscute. Se scriu cele trei ecuații de echilibru.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P_1 \frac{l}{2} + M_c - P_2 \cdot h = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P_1}{2} + \frac{1}{l}(P_2 h - M_c)$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow -P_2 + H_D = 0 \Rightarrow H_D = P_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P_1 \frac{l}{2} + M_c - H_D h - V_D l = 0 \Rightarrow V_D = \frac{P_1}{2} + \frac{1}{l}(M_c - H_D h)$$

Caz numeric:

$$V_A = \frac{2,0}{2} + \frac{1}{4}(1 \cdot 3 - 4) = 0,75 \text{ kN}$$

$$H_D = 1 \text{ kN}$$

$$V_D = \frac{2}{2} + \frac{1}{4}(4 - 1 \cdot 3) = 1,25 \text{ kN}$$

Verificare:

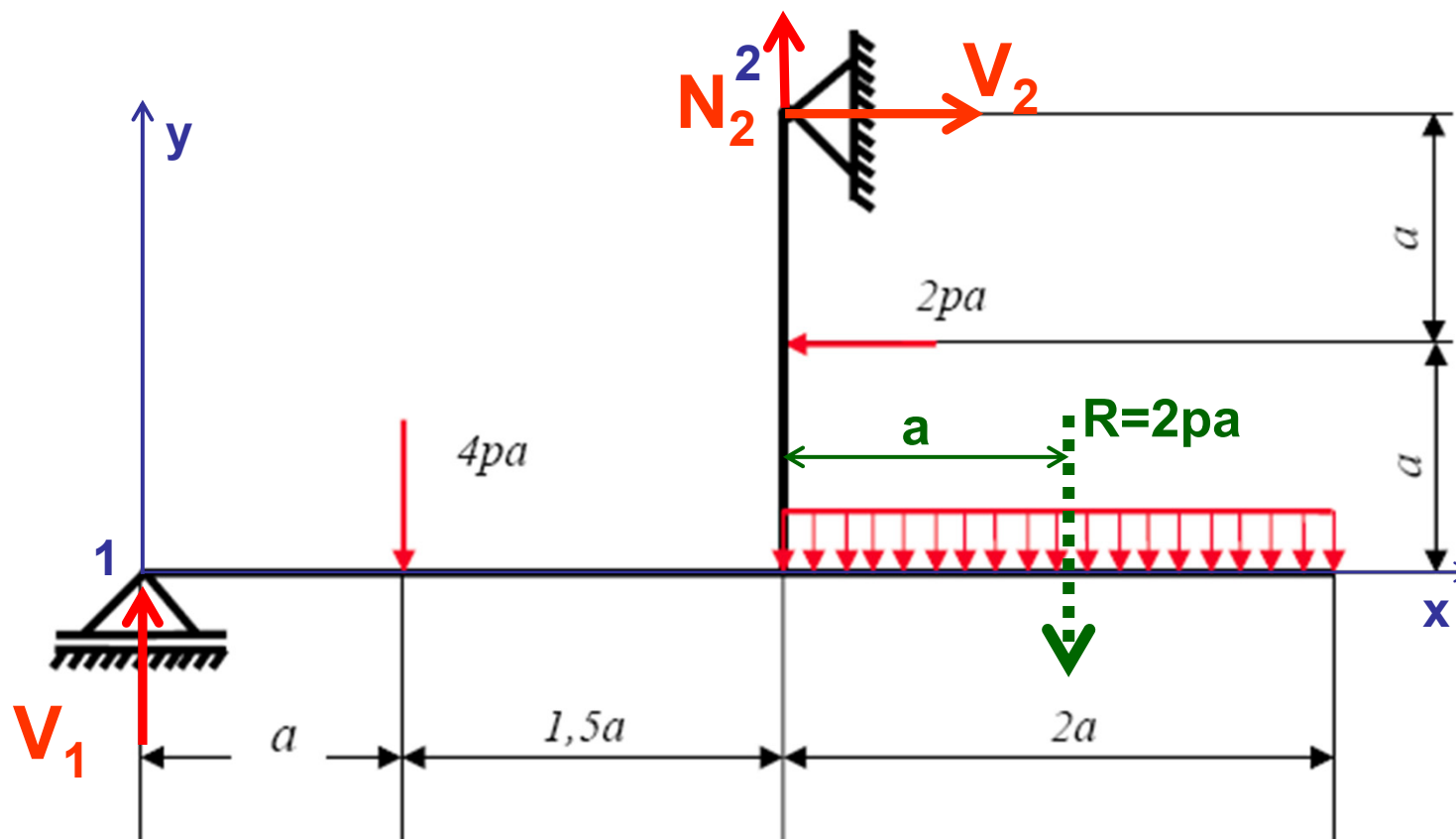
$$\sum Y = 0 \Rightarrow P_1 - V_A - V_D = 0$$

$$2 - 0,75 - 1,25 = 0$$

APLICAȚIA 2:

Să se determine reacțiunile din reazeme pentru sistemul de bare din figura de mai jos.

Caz numeric: $p=5\text{kN/m}$; $a=1\text{m}$.



Rezolvare:

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot 2,5a - 4pa \cdot 1,5a + p \cdot 2a \cdot a + 2pa \cdot a = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{2pa^2}{2,5a} = 0,8pa$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow V_2 = 2pa$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow 4pa \cdot a - N_2 \cdot 2,5a - 2pa \cdot a + p \cdot 2a \cdot 3,5a - 2pa \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{13pa^2}{2,5pa^2} = 5,2pa$$

Verificare:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_1 + N_2 = 4pa + 2pa \Leftrightarrow 0,8pa + 5,2pa = 6pa(A)$$

Caz numeric:

$$V_1 = 0,8pa = 0,8 \cdot \frac{5kN}{m} \cdot 1m = 4kN$$

$$V_2 = 2pa = 2 \cdot \frac{5kN}{m} \cdot 1m = 10kN$$

$$N_2 = 5,2pa = 5,2 \cdot \frac{5kN}{m} \cdot 1m = 26kN$$