



## **CURS 4**

# **MECANICA CONSTRUCȚIILOR**

**Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu**

# **SISTEME DE FORȚE OARECARE**

- **Forța – vector alunecător;**
  - **Momentul unei forțe în raport cu un punct;**
  - **Momentul unei forțe față de o axă;**
  - **Teorema lui VARIGNON;**
  - **Cupluri de forțe;**
  - **Sisteme de forțe echivalente;**
  - **Reducerea sistemelor de forțe în raport cu un punct.**
- Torsorul. Variația torsorului cu punct de reducere;**

- **Invariantul unui sistem de forțe față de punctul de reducere;**
  - **Torsorul minim. Axa centrală;**
  - **Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare.**
- Sisteme echivalente;**
- **Sisteme de forțe particulare.**

# INVARIANTII UNUI SISTEM DE FORȚE FAȚĂ DE PUNCTUL DE REDUCERE (1)

La schimbarea punctului în raport cu care se efectuează operația de reducere, cei doi vectori care formează torsorul sistemului de forțe, vectorul rezultat  $\underline{\bar{R}}$  și vectorul moment rezultat  $\underline{\bar{M}}_O$  se comportă în mod diferit:

- Rezultanta  $\underline{\bar{R}}$  rămâne neschimbată;
- Momentul rezultat variază după legea

$$\underline{\bar{M}}_{O1} = \underline{\bar{M}}_O + \underline{\overline{OO_1}} \times \underline{\bar{R}}$$

# INVARIANȚII UNUI SISTEM DE FORȚE FAȚĂ DE PUNCTUL DE REDUCERE (2)

1. Primul invariant (invariantul vectorial) este rezultanta:  $\bar{R}$

2. Al doilea invariant este invariantul scalar care este dat de produsul scalar  $\bar{R} \cdot \bar{M}$

Demonstrație:

$$\bar{M}_Q = \bar{M}_O + \bar{O}_1O \times \bar{R} \quad | \cdot \bar{R}$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_Q = \bar{R} \cdot \bar{M}_O + \underbrace{(\bar{O}_1O \times \bar{R}) \cdot \bar{R}}_0$$

$$\bar{R} \cdot \bar{M}_Q = \bar{R} \cdot \bar{M}_O \Rightarrow \bar{R} \cdot \bar{M}_O = \text{ct}, \forall O \in (Oxyz)$$

2 vectori  
coliniari

3. Consecinta: proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei este aceeași indiferent de punctul în care se efectuează reducerea:

$$M_R = |\bar{M}_O| \cos(\bar{M}_O, \bar{R}) = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{|\bar{R}|}$$

**Pentru a reduce un sistem de forțe oarecare, există 2 invariante față de operațiile de reducere:**

- invariantul vectorial  $\bar{R}$ ;**
- invariantul scalar – produsul scalar  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$  (proiecția momentului pe direcția rezultantei).**

# Torsor minim, axă centrală (1)

Fiind dat un sistem de forte oarecare, se pune întrebarea:

*Care este valoarea minima a tursorului sistemului de forte si in care puncte de reducere se obține aceasta valoare?*

La schimbarea punctului de reducere se schimbă și tursorul:

$$\tau_o(\bar{R}, \bar{M}_o)$$

$$\bar{M}_{o1} = \bar{M}_o + \overline{OO_1} \times \bar{R}$$

Se caută condițiile pentru găsirea momentului minim.

## Torsor minim, axă centrală (2)

Se descompune în  $O$  vectorul moment în două componente:  $\bar{M}_R$  colinar cu rezultanta și  $\bar{M}_N$  în planul normal rezultantei.

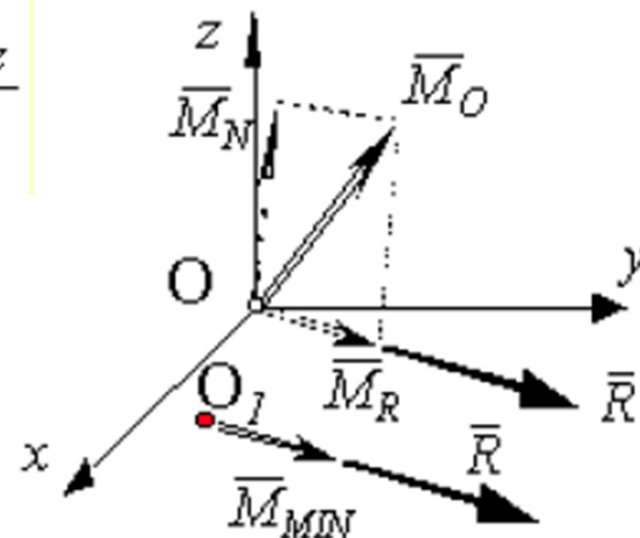
Când punctul de reducere se schimbă, numai  $\bar{M}_N$  își schimbă mărimea ( $\bar{M}_R$  este constantă).

$\Rightarrow \bar{M}_O$  va fi minim când  $\bar{M}_N=0$  și deci  $\bar{M}_O = \bar{M}_R$ .

$$M_{MIN} = M_R = \frac{\bar{R} \bullet \bar{M}}{|\bar{R}|} = \frac{XM_{Ox} + YM_{Oy} + ZM_{Oz}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

Torsorul minim este:

$$\tau_{MIN} \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{M}_{MIN} = \bar{M}_R = M_R \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\bar{R} \bullet \bar{M}_O}{R^2} \bar{R} \end{cases}$$



Locul geometric al punctelor in care, efectuând reducerea, torsorul sistemului are valoarea minima este o dreapta care se numește axa centrala a sistemului de forte.

### OBSERVAȚIE

In punctele situate pe axa centrala, momentul rezultat având mărimea minima, este coliniar cu rezultanta  $\bar{R}$  a sistemului de forte. Torsorul minim este deci ansamblul format de vectorii  $\bar{R}$  – vectorul rezultat al sistemului de forte si momentul minim  $\bar{M}_R$ , vectori având ca dreapta - suport axa centrala a sistemului de forte.



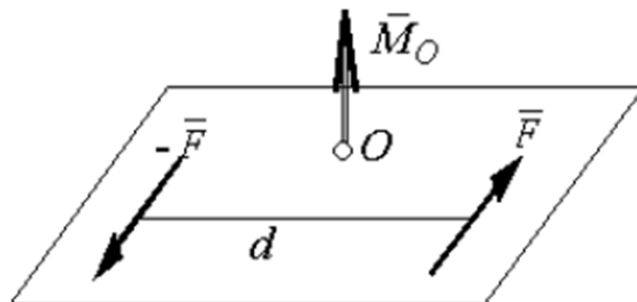
# **Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare. Sisteme echivalente (1)**

**Fie un sistem de forțe oarecare acționând asupra unui corp. În urma reducerii acestor forțe într-un punct oarecare  $O$  al corpului, se pun în evidență mai multe cazuri de reducere, cărora li se poate asocia câte un sistem echivalent mai simplu care să aibă în orice punct al corpului același torsor ca și sistemul de forțe dat.**

# Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare. Sisteme echivalente (2)

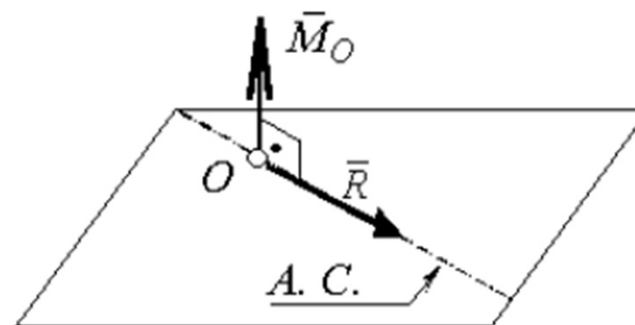
**Cazul I:**  $\bar{R}=0$  și  $\bar{M}_O=0$  (torsorul nul). Sistemul de forțe este în echilibru sau sistem echivalent cu zero.

**Cazul II:**  $\bar{R}=0$  și  $\bar{M}_O \neq 0$ . Sistem echivalent cu un cuplu.



**Cazul III:**  $\bar{R} \neq 0$  și  $\bar{M}_O=0$ .

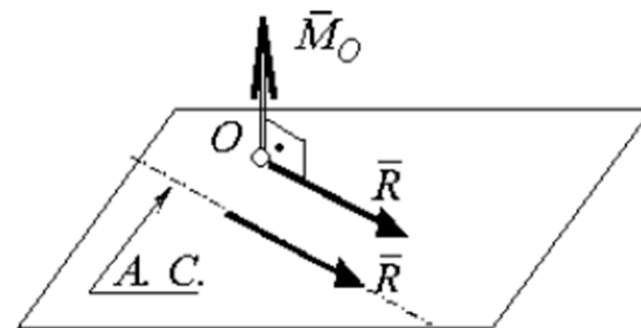
Sistem echivalent cu o rezultantă (unică) care trece prin punctul de reducere O.



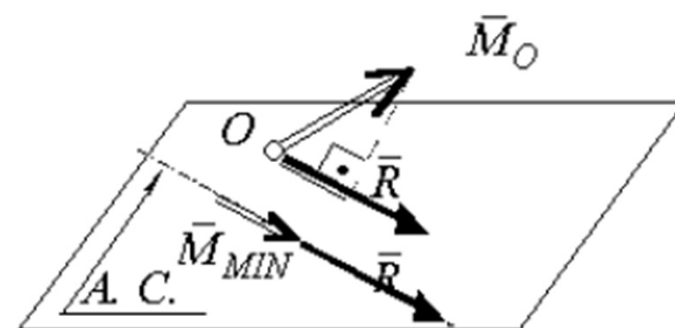
# Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare. Sisteme echivalente (3)

**Cazul IV:**  $\bar{R} \neq 0$  și  $\bar{M}_O \neq 0$  pentru care există două variante:

**a)**  $\bar{R} \bullet \bar{M}_O = 0 \Rightarrow \bar{M}_O \perp \bar{R}$  sau  $\bar{M}_R$  este nul și sistemul echivalent cel mai simplu este dat de o rezultanta (unica) care nu trece prin originea  $O$ .



**b)**  $\bar{R} \bullet \bar{M}_O \neq 0$ , deci unghiul format de cei doi vectori este diferit de  $90^\circ$ . Sistemul de forte dat este echivalent cu tursorul minim al acestuia care are ca dreapta-suport axa centrala a sistemului de forte.



# SISTEME DE FORTE COPLANARE

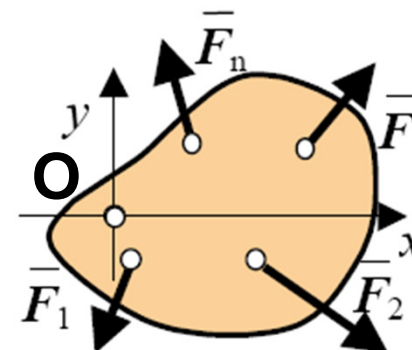
Fie un sistem de  $n$  forțe coplanare aplicate unui corp rigid și un punct “ $O$ ” în planul forțelor (fig. 8.1,*a*). Fiecare din forțe poate fi redusă în “ $O$ ”, obținându-se în acest punct:

- $n$  forțe concurente, echipolente cu forțele date; aceste forțe se reduc la o rezultantă unică:

$$\bar{R} = \sum_{h=1}^n \bar{F}_h ; \quad (8.1)$$

- $n$  cupluri de forțe, reprezentate prin cele  $n$  momente  $M_{O_h}$ , coliniare cu axa  $Oz$  (perpendiculară pe planul forțelor); însumându-le se obține un moment resultant:

$$\bar{M}_O = \sum_{h=1}^n \bar{M}_{O_h} = \bar{k} \cdot \sum_{h=1}^n M_{O_h}$$



Rezultanta  $\bar{R}$  și momentul rezultat  $\bar{M}_O$  formează un sistem echivalent cu sistemul celor  $n$  forțe date (fig. 8.1,b). Perechea de vectori  $\bar{R}$  și  $\bar{M}_O$  se numește **torsorul sistemului de forțe în raport cu punctul  $O$** . Expresiile analitice ale celor doi vectori sunt:

$$\bar{R} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} \quad (8.3)$$

$$\bar{M}_O = M_O \cdot \bar{k} \quad (8.4)$$

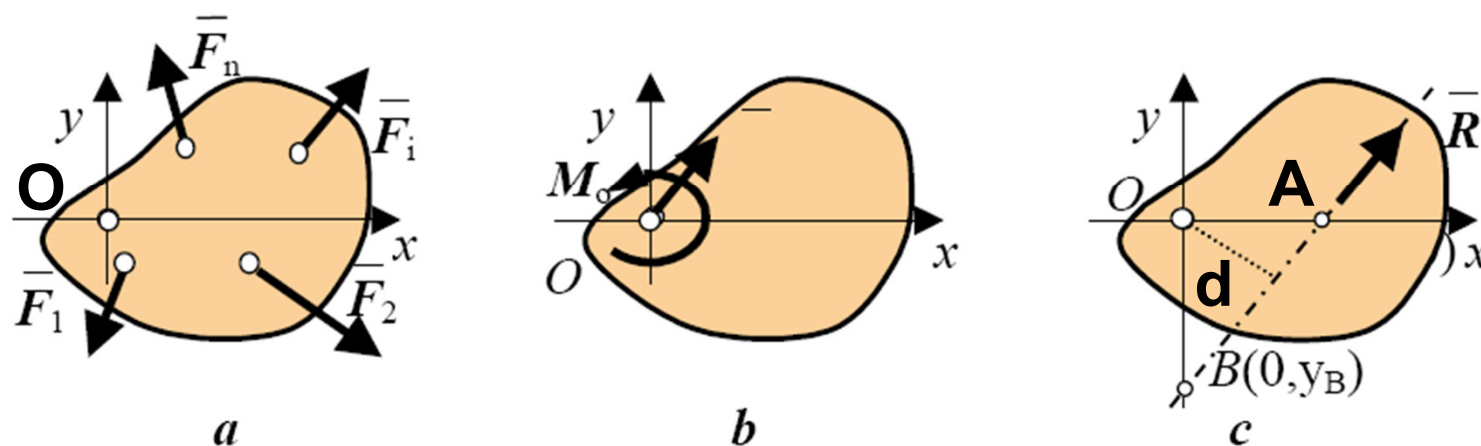


Fig. 8.1.

Deoarece  $\bar{M}_O$  are direcția normală planului forțelor în care se găsește rezultanta  $\bar{R}$ , se poate scrie expresia analitică a momentului  $\bar{M}_O$

, funcție de proiecțiile rezultantei:

$$M_O \cdot \bar{k} = (xY - yX) \cdot \bar{k}. \quad (8.5)$$

În baza acestei relații, sistemul de  $n$  forțe poate fi înlocuit numai cu o rezultantă având suportul pe dreapta de ecuație:

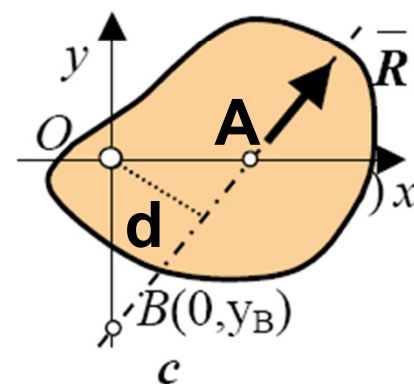
$$xY - yX = M_O. \quad (8.6)$$

Această dreaptă, întâlnește axa  $Ox$  în punctul  $A$ ; înlocuind în (8.6)  $y_A = 0$ , se obține coordonata  $x_A = M_O / Y$ . Notând cu  $B$  punctul de intersecție cu axa  $Oy$ ,  $x_B = 0$  și  $y_B = -M_O / X$  (fig. 8.1, c).

**Sistemul echivalent cel mai simplu** obținut în acest caz de reducere este o **forță unică** (rezultanta). Ca urmare, se poate aplica teorema lui Varignon, scriind că **momentul resultant  $\bar{M}_O$  este egal cu momentul rezultantei  $\bar{R}$** :

$$|\bar{M}_O| = d \cdot |\bar{R}| \quad (8.7)$$

unde  $d$  este brațul rezultantei (fig. 8.1, c).

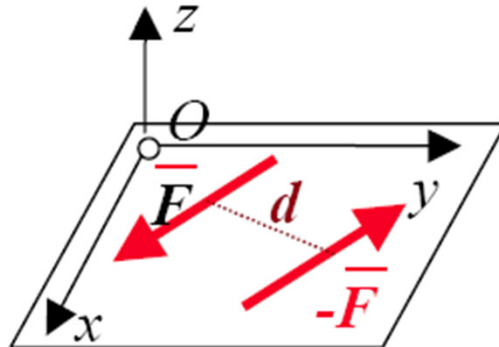


# Cazuri de reducere la sistemele de forte coplanare

1)  $\bar{R} = 0$  și  $\bar{M}_O = 0$ , sistemul de forțe este echivalent cu zero sau **sistemul de forțe este în echilibru**. Cele două relații vectoriale furnizează trei ecuații de proiecție, respectiv rezultanta două ecuații de proiecție a forțelor pe axele  $Ox$  și  $Oy$ , iar momentul o ecuație de proiecție corespunzătoare axei  $Oz$ :

$$\begin{cases} X = \sum X_h = 0; \\ Y = \sum Y_h = 0; \\ M_{Oz} = \sum (x_h Y_h - y_h X_h) = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

2)  $\bar{R} = 0$  și  $\bar{M}_O \neq 0$ , sistemul de forțe dat este echivalent cu un **cuplu**, momentul acestuia având direcția perpendiculară pe planul forțelor (fig. 8.2);



3)  $\bar{R} \neq 0$  și  $\bar{M}_O = 0$ , sistemul de forțe este echivalent în acest caz cu o singură **forță (rezultanta)**, al cărei suport trece prin **punctul de reducere  $O$**  (fig. 8.3).

4)  $\bar{R} \neq 0$ ,  $\bar{M}_O \neq 0$  și  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ , deoarece  $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ . Sistemul echivalent cel mai simplu este reprezentat de o **forță unică (rezultanta) care nu trece prin punctul de reducere  $O$**  (fig. 8.4). Axa centrală este chiar suportul rezultantei și așa cum s-a arătat, se aplică în acest caz teorema lui Varignon.

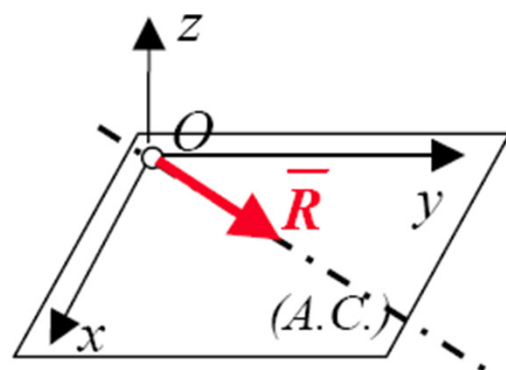


Fig. 8.3.

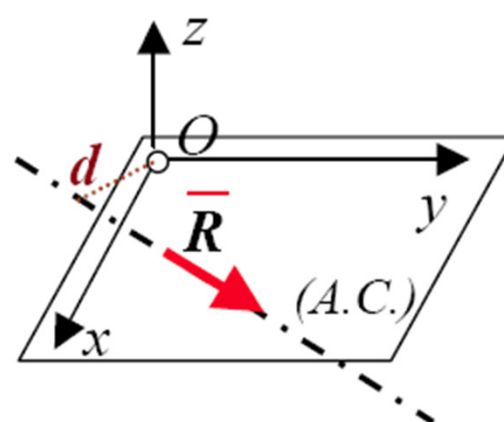


Fig. 8.4.



# Aplicația 1:

Să se reducă în punctul  $O$  sistemul de forțe care acționează pe stâlpul din figura 8.5 și să se stabilească sistemul echivalent cel mai simplu.

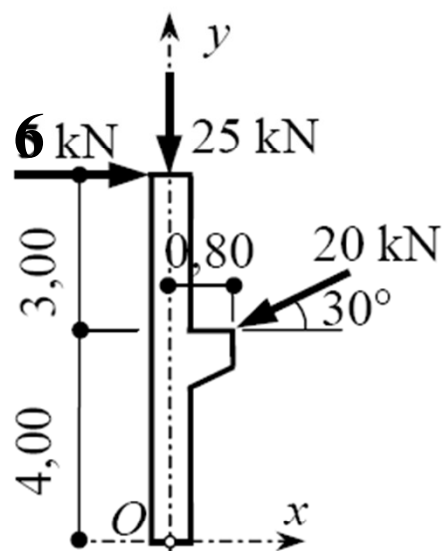


Fig. 8.5.

**REZOLVARE:** Utilizând sistemul de referință din figura 8.5, proiecțiile rezultantei sunt:

$$X = \sum X_h = 6 - 20 \cos 30^\circ = 6 - 17,32 = -11,32 \text{ kN},$$

$$Y = \sum Y_h = -25 - 20 \sin 30^\circ = -25 - 10 = -35 \text{ kN}.$$

Rezultanta are mărimea:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 36,785 \text{ kN}.$$

Momentul forțelor calculat în raport cu punctul " $O$ ":

$$M_O = -6 \cdot 7 - (20 \sin 30^\circ) \cdot 0,8 + (20 \cos 30^\circ) \cdot 4 = -42 - 8 + 69,28 = 19,28 \text{ kNm}$$

În figura 8.6,*a* este reprezentat sistemul echivalent în punctul “O”, alcătuit din rezultanta  $\bar{R}$  și momentul resultant  $\bar{M}_O$ .

Sistemul echivalent cel mai simplu este dat numai de rezultanta  $\bar{R}$  (fig. 8.6,*b*) aflată pe dreapta suport care întâlnește axele de coordonate în punctele  $A(x_A, 0)$  și  $B(0, y_B)$ :

$$x_A = M_O / Y = 19,28 / (-35) = -0,55 \text{ m}$$

$$y_B = -M_O / X = -19,28 / (-11,3) = 1,70 \text{ m}$$

Brațul rezultantei este:

$$d = 19,28 / 36,785 = 0,524 \text{ m}.$$

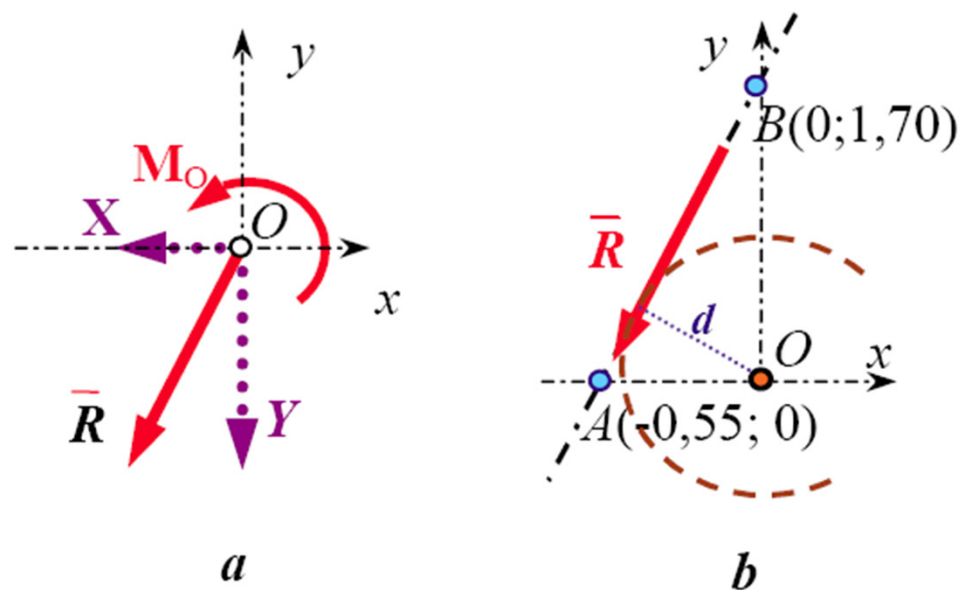


Fig. 8.6.

## Aplicația 2:

Să se determine momentul cuplului  $M$ , mărimea și direcția forței  $\vec{F}$ , astfel încât bara din figura 8.7 să fie în echilibru.

**REZOLVARE:** Se alege axa  $Ox$ , axa barei, iar originea în capătul stâng al barei (fig. 8.7). Pentru aflarea celor trei necunoscute  $F$ ,  $\alpha$  și  $M$  se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\begin{cases} X = F \cos \alpha - 20 \cos 30^\circ = 0 \\ Y = F \sin \alpha - 20 + 20 \sin 30^\circ = 0 \\ M_O = -20 \cdot 2 + (20 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 5 - M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F \cos \alpha = 10\sqrt{3} \\ F \sin \alpha = 10 \\ M_O = 10 \text{ Nm} \end{cases}$$

Se ridică la pătrat și se adună primele două egalități și rezultă  $F = 20 \text{ N}$ , apoi  $\alpha = 30^\circ$ .

**Verificarea rezultatului** se face procedând la scrierea condiției ca momentul calculat în raport cu un alt punct din plan, de exemplu în raport cu  $B$ , să fie nul:

$$M_B = -(F \sin \alpha) \cdot 5 + 20 \cdot 3 - M = -20 \cdot (1/2) \cdot 5 + 60 - 10 = -50 + 60 - 10 = 0$$

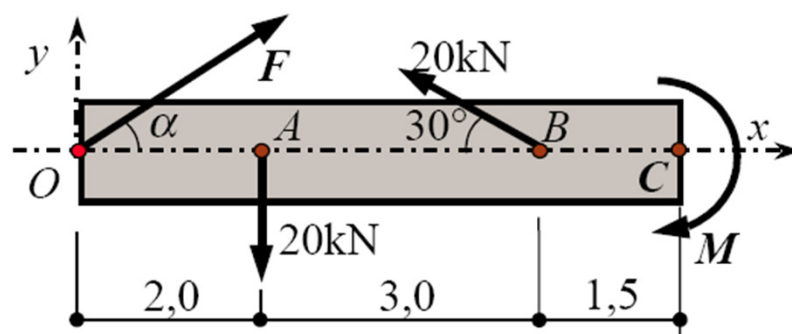


Fig. 8.7.

# SISTEME DE FORTE PARALELE

Considerăm un sistem de  $n$  forțe paralele cu axa  $Oz$  (fig. 9.1, *a*). În urma operației de reducere față de punctul  $O$ , se obțin componentele torsorului:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \sum \bar{F}_h = (\sum F_h) \bar{k} = Z \bar{k}; \\ \bar{M}_O &= \sum (\bar{r}_h \times \bar{F}_h) = (\sum M_h)_x \bar{i} + (\sum M_h)_y \bar{j} = M_{Ox} \bar{i} + M_{Oy} \bar{j}.\end{aligned}\quad (9.1)$$

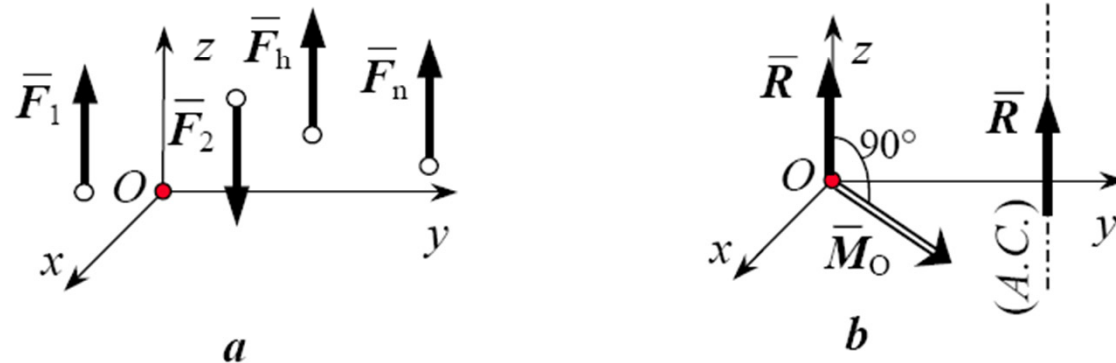


Fig. 9.1.

Cei doi vectori sunt ortogonali ( $\bar{R} \perp \bar{M}_O$ ) și prin urmare, produsul lor scalar (numit **invariantul scalar**) este nul,  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ . Astfel se deduce că **proiecția momentului resultant pe direcția rezultantei (momentul minim) este nul**  $M_{\min} = 0$  (fig. 9.1, *b*). Bineînțeles, **teorema lui Varignon** poate fi aplicată și pentru aceste sisteme de forțe paralele, dacă rezultanta este nenulă.

# Cazuri de reducere la sistemele de forte paralele

1)  $\bar{R} = 0$  și  $\bar{M}_O = 0$ , **sistemul de forțe este în echilibru**. Cele două relații vectoriale furnizează și în acest caz trei ecuații de proiecție, respectiv rezultanta o ecuație de proiecție corespunzătoare axei  $Oz$ , iar momentul două ecuații de proiecție pe axele  $Ox$  și  $Oy$ :

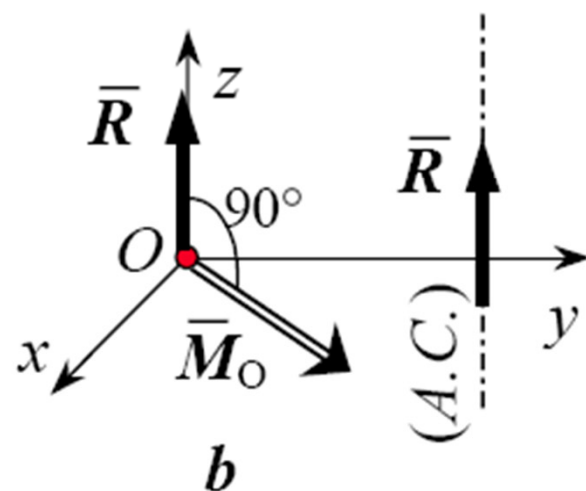
$$\begin{cases} Z = \sum F_h = 0; \\ M_{O_x} = \sum (y_h F_h) = 0; \\ M_{O_y} = \sum (x_h F_h) = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

2)  $\bar{R} = 0$  și  $\bar{M}_O \neq 0$ , sistemul de forțe echivalent cu un **cuplu**;

3)  $\bar{R} \neq 0$  și  $\bar{M}_O = 0$ , sistemul de forțe este echivalent cu o **forță unică**  $\bar{R}$ , **al cărei suport trece prin punctul de reducere**  $O$ ;

4)  $\bar{R} \neq 0$ ,  $\bar{M}_O \neq 0$ ,  $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$ , sistem echivalent cu o **forță unică**  $\bar{R}$ , **care nu trece prin punctul de reducere**  $O$ . Axa centrală (fig. 9.1,b) se găsește sub forma dreptei de intersecție a două plane, ale căror ecuații se stabilesc aplicând teorema lui Varignon în raport cu axele  $Ox$  și respectiv  $Oy$ :

$$\begin{cases} xZ = \sum x_h F_h \\ yZ = \sum y_h F_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sum x_h F_h}{Z} \\ y = \frac{\sum y_h F_h}{Z} \end{cases} \quad (9.3)$$



# Centrul forțelor paralele

O proprietate deosebit de importantă, când se consideră că forțele care alcătuiesc sistemul își mențin punctele de aplicație și intensitățile, dar își modifică direcția continuând să rămână paralele între ele, este aceea că dreapta suport a rezultantei trece mereu printr-un punct fix  $C$ , numit **centrul forțelor paralele**. Acest punct are coordonatele:

$$x_c = \frac{\sum x_h F_h}{Z} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum y_h F_h}{Z} \quad (9.4)$$

Coordonatele centrului  $C$  verifică ecuația axei centrale (9.3) și deoarece centrul  $C$  este un punct invariabil al solidului, la o permutare a axelor de coordonate se stabilește și coordonata  $z_c = \sum z_h F_h$ . Vectorul de poziție al centrului  $C$  se scrie:

$$\bar{r}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k} \quad (9.5)$$

Se subliniază condițiile pe care trebuie să le îndeplinească sistemul de forțe paralele pentru ca să existe un astfel de centru: **rezultanta este diferită de zero** ( $\bar{R} \neq 0$ ) și **forțele sunt vectori legați**.

**Proprietățile** pe care le are centrul forțelor paralele sunt:

- poziția acestuia nu se modifică dacă toate forțele sunt înmulțite cu o mărime scalară;
- poziția centrului forțelor paralele este invariabilă în raport cu forțele, deci nu depinde de sistemul de axe ales.



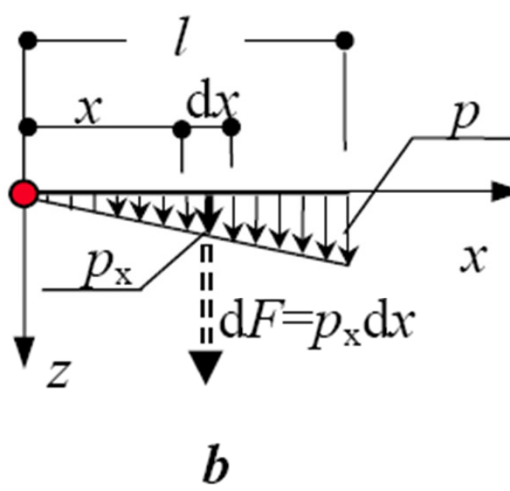
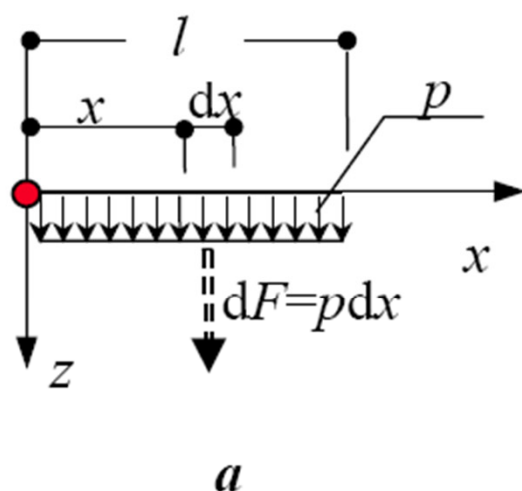


Fig. 9.2.

or paralele uniform

, b). Pentru forțele (9.2) și (9.3) devin rțe elementare  $dF$ .

ngimea  $l(m)$  pe care considerând că pe un

element de lungime  $dx$  acționează o forță elementară  $dF = p \cdot dx$ :

$$R_1 = \int_0^l dF$$
 Coordonata  $x_c$  a punct  
 relația (9.4) în mod ac  

$$x_c = \frac{\int_0^l x \cdot dF}{R}$$

**a**

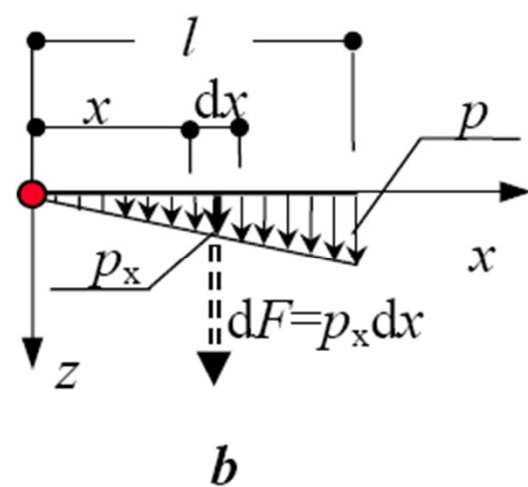
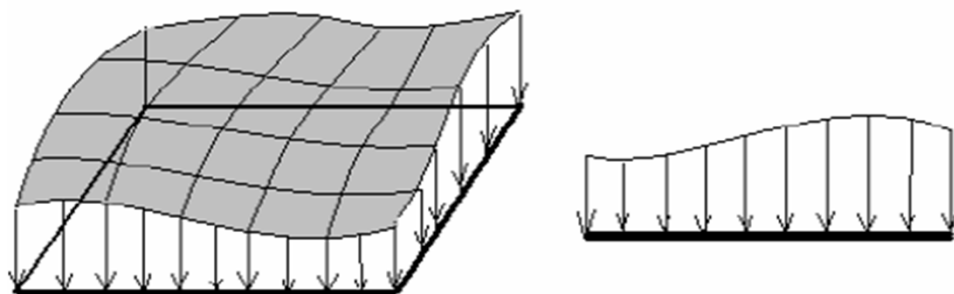
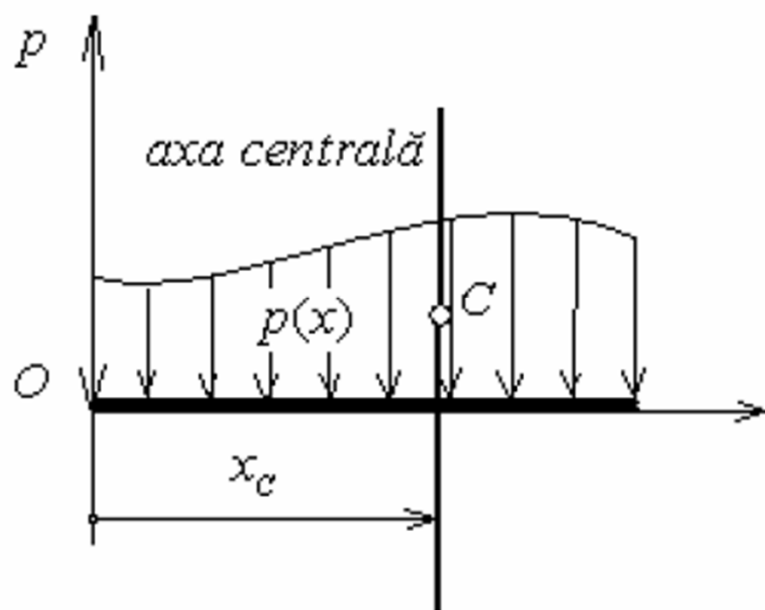


Fig. 9.2.



*Sarcini distribuite pe suprafață si pe lungime*

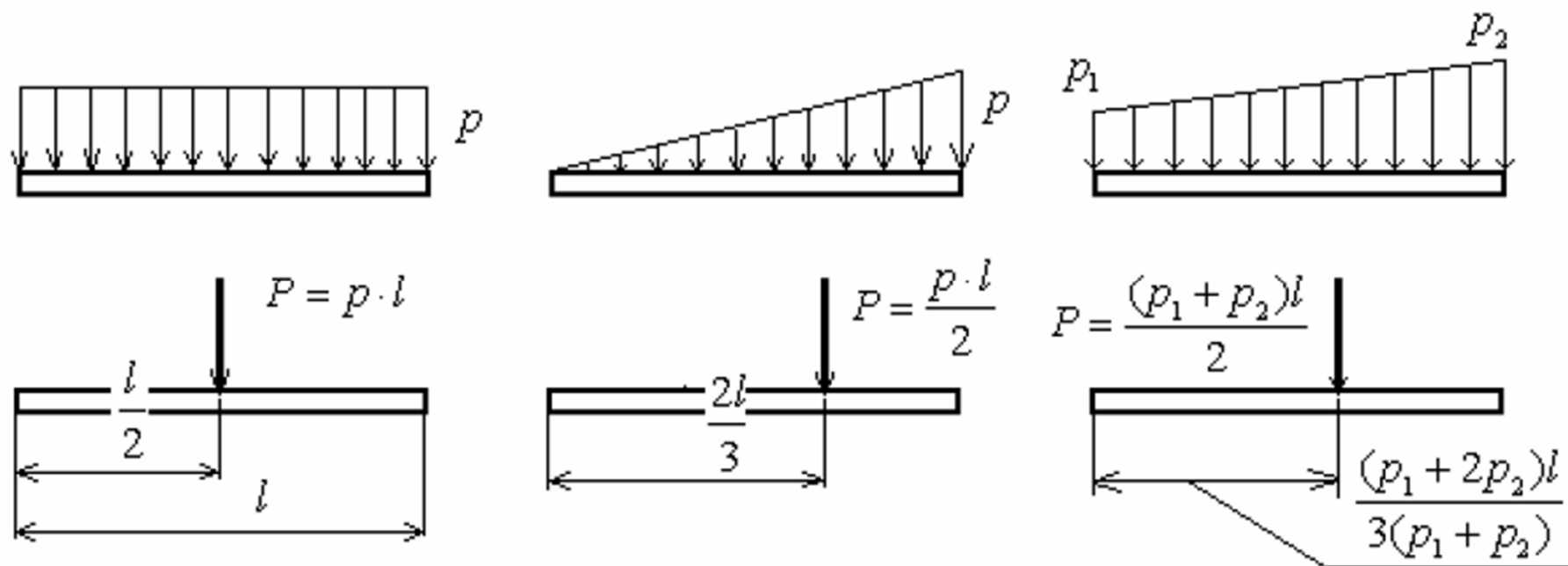


$$P = \int_0^l p(x) dx$$

$$x_c = \frac{\sum x \cdot p(x) \Delta x}{\sum p(x) \Delta x}$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x p(x) dx}{P}$$

*Echivalarea forelor distribuite cu o foră concentrată*



*Echivalarea fortelor distribuite în câteva cazuri des întâlnite în practică*

## Aplicația 3:

Să se reducă sistemul de forțe paralele din figura 9.5 în punctul  $O$ , apoi în  $A$  și să se stabilească cazul de reducere, specificând care este sistemul echivalent cel mai simplu.

**Răspuns:**  $Y = \sum Y_h = 10\text{N}$ ;  $M_O = 2\text{ Nm}$ ;  $M_A = -48\text{Nm}$ ; cazul  $d$  de reducere,  $\bar{R} = 10\bar{k}$  pe dreapta suport de ecuație  $x = M_O/Y = 0,2\text{m}$ .

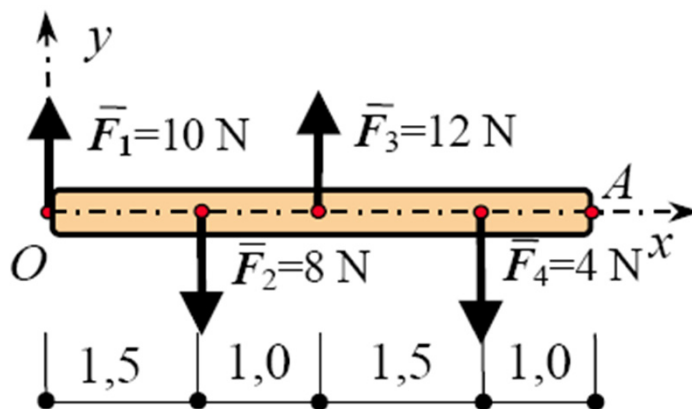
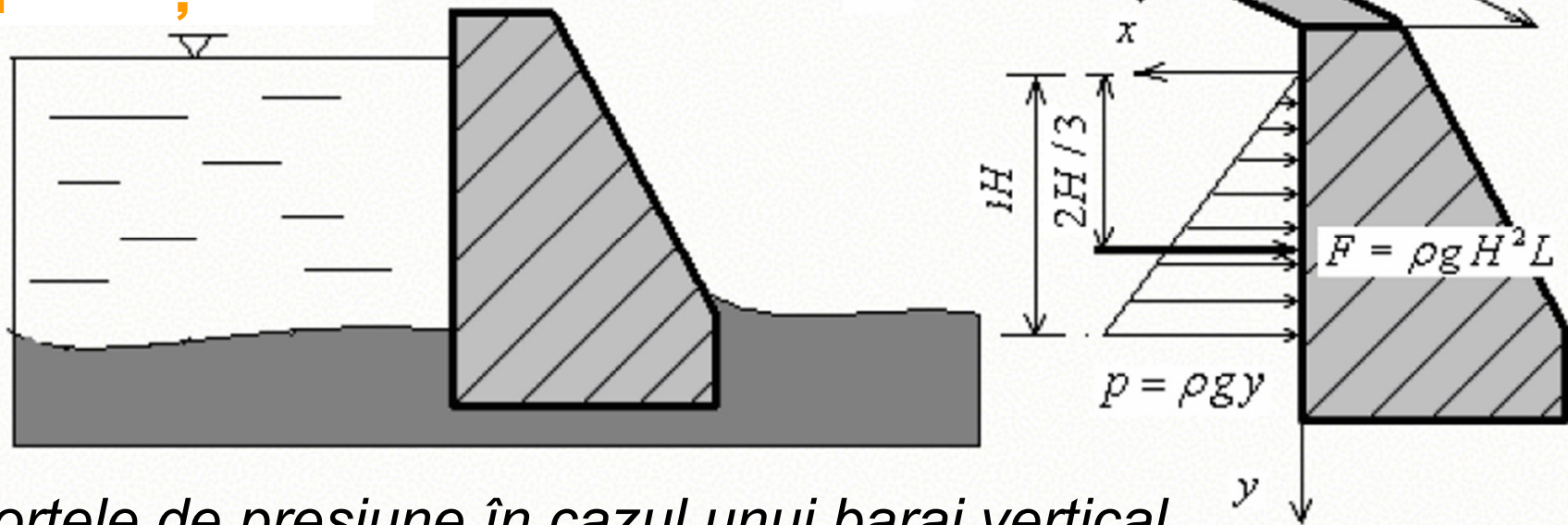


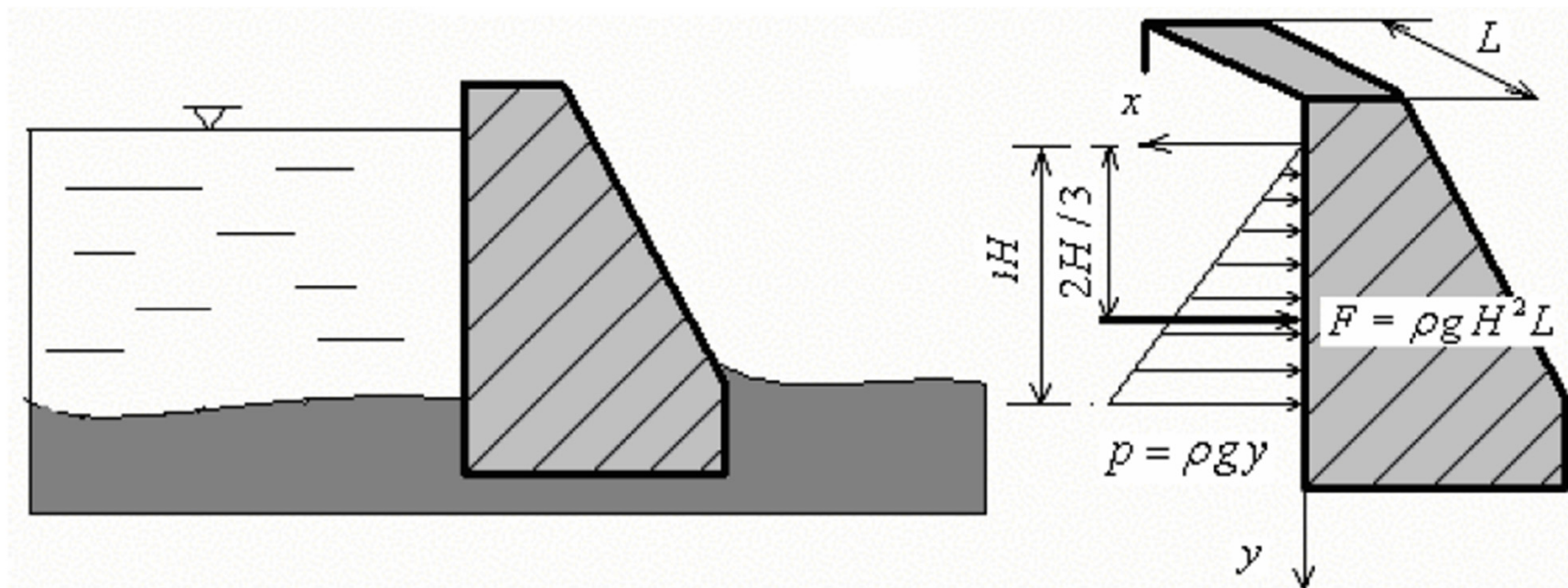
Fig. 9.5.

## Aplicația 4:



*Forțele de presiune în cazul unui baraj vertical*

Se consideră un baraj cu perete vertical asupra căruia acionează presiunea apei. Ne propunem să determinăm poziția centrului de presiune în acest caz și forța exercitată de apă asupra barajului dacă înălțimea apei este  $H$  iar lățimea barajului este  $L$ .



În acest caz presiunea dată de apă la adâncimea  $y$  de la suprafața apei este:

$$p = \rho g y$$

și este constantă pe toată lățimea barajului la aceeași adâncime  $y$ . Forța dată de presiune pe toată suprafața barajului este:

$$F = \frac{\rho g H S}{2} = \frac{1}{2} \rho g H \cdot H L = \frac{1}{2} \rho g H^2 L$$

Distribuția presiunilor este triunghiulară, deci poziția centrului de masă se va găsi la două treimi de suprafața apei.