



CURS 3

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

SISTEME DE FORTE OARECARE

SISTEME DE FORȚE OARECARE

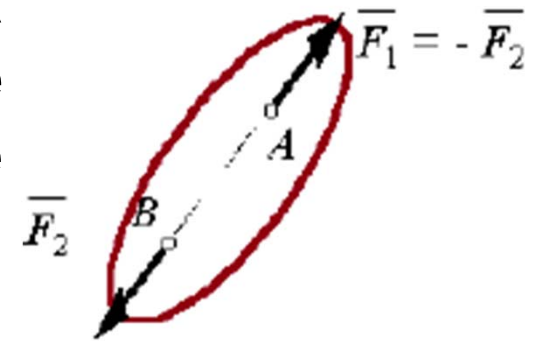
- Forța – vector alunecător;
- Momentul unei forțe în raport cu un punct;
- Momentul unei forțe față de o axă;
- Teorema lui VARIGNON;
- Cupluri de forțe;
- Sisteme de forțe echivalente;
- Reducerea sistemelor de forțe în raport cu un punct.
Torsor. Variația torsorului cu punct de reducere;
- Invariantul unui sistem de forțe față de punctul de reducere;
- Torsorul minim. Axa centrală;
- Cazurile de reducere ale unui sistem de forțe oarecare.
Sisteme echivalente;
- Sisteme de forțe particulare.

DEFINIȚII

- Un corp este liber atunci când nu este legat de alte corpuri și se poate deplasa arbitrar în spațiu.
- Dacă un corp este în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci sistemul de forțe este în echilibru.
- Două sisteme de forțe se numesc echivalente atunci când se poate înlocui un sistem care acționează asupra unui corp liber, cu celălalt sistem de forțe fără a modifica starea de repaus sau de mișcare a corpului.

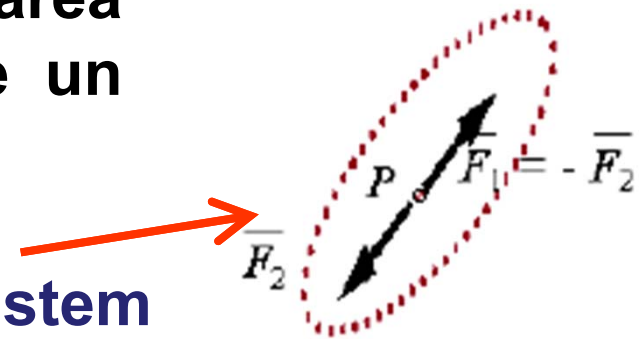
AXIOMELE STATICII SOLIDULUI RIGID (SR)

1. Condiția necesară și suficientă ca două forțe aplicate unui corp (SR) liber să fie în echilibru este ca cele două forțe să fie coliniare, egale ca mărime și de sensuri opuse.



2. Se poate, fără a modifica starea mecanică a SR, adăuga sau scoate un sistem de forțe echivalent cu zero.

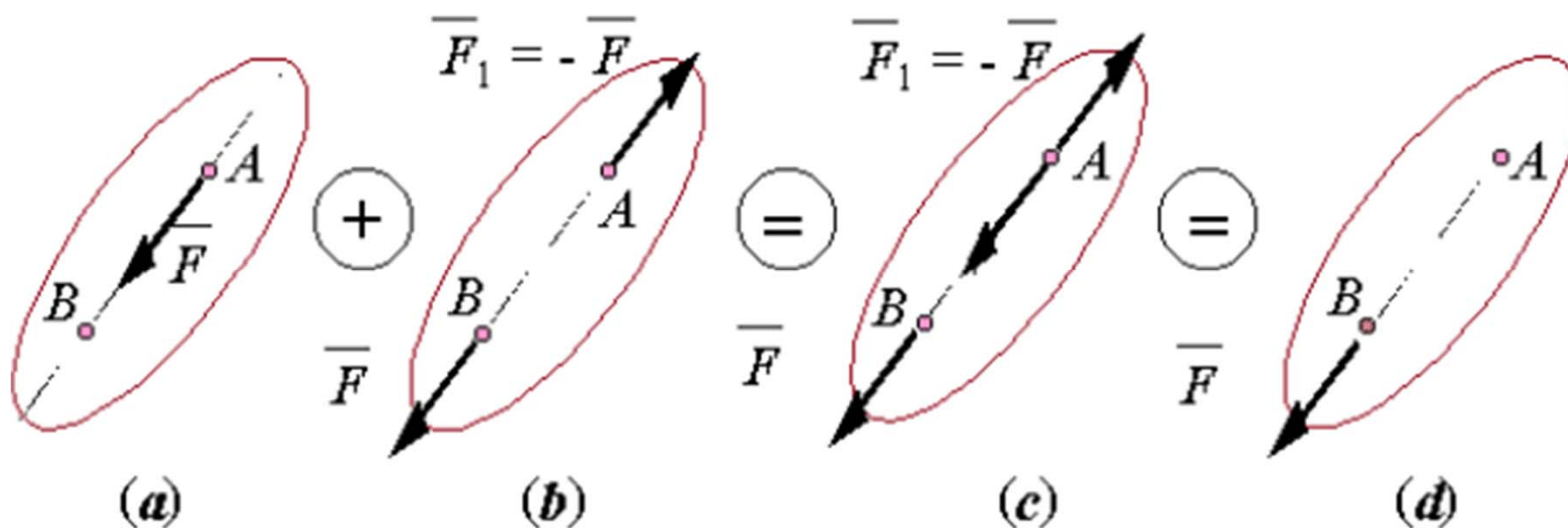
Cele două forțe formează un sistem echivalent cu zero



FORȚA – VECTOR ALUNECĂTOR

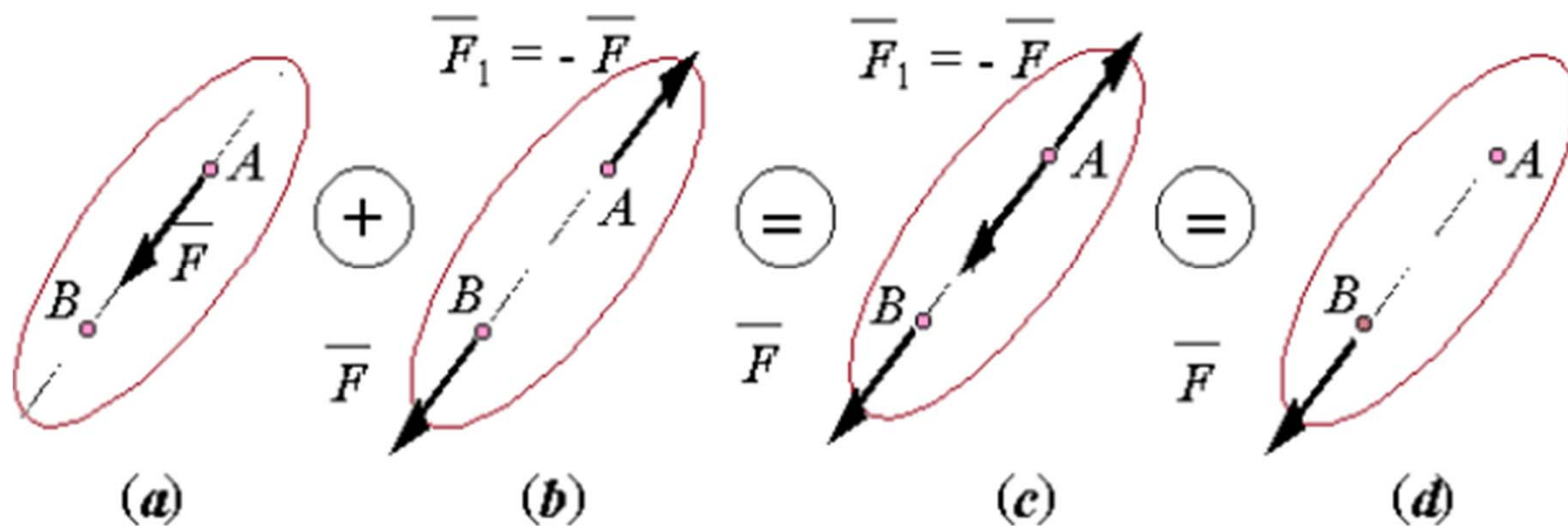
Forțele care acționează asupra solidelor rigide nu mai sunt, de regula, concurente în același punct.

1. Fie forța $\vec{F}$ care acționează în punctul A al SR (*fig. a*).
2. Se adaugă sistemul echivalent cu zero (*fig. b*).
3. În *figura c* se identifică sistemul echivalent cu zero din punctul A .
4. Se observa că forța $\vec{F}$ s-a deplasat pe suportul său din punctul A în punctul B .



FORȚA – VECTOR ALUNECĂTOR

Forța care acționează asupra unui corp rigid este un vector alunecător, deoarece punctul ei de aplicație poate fi oricare punct situat pe dreapta-suport a forței.



MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

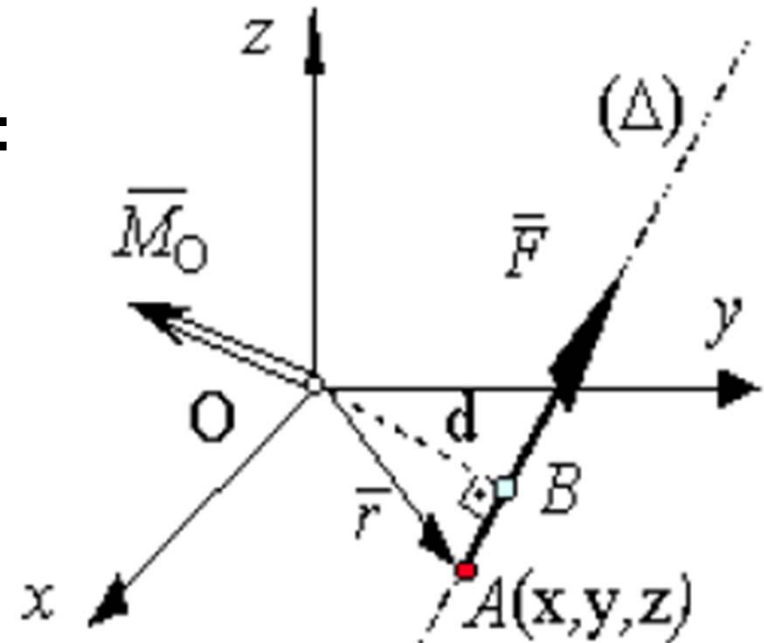
Definiție: Se numește moment al unei forțe în raport cu un punct fix O , produsul vectorial dintre vectorul de poziție care unește punctul O cu un punct oarecare de pe suportul forței și forță.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Caracteristicile vectorului moment:

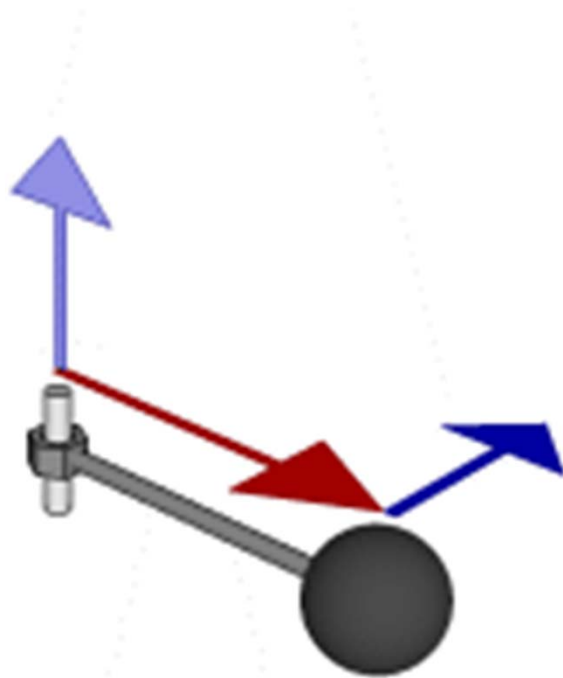
- originea este în O ;
- direcția normală pe planul format de O și suportul forței;
- sensul corespunzător triedrului drept;
- mărimea ($d=OB$ brațul forței).

$$|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \times d$$



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

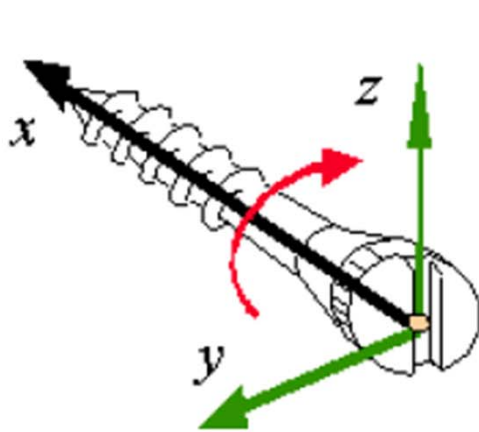


Triedrul drept

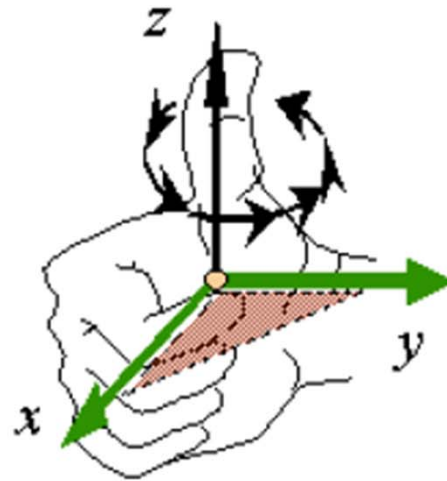
Regula burghiului (fig. a);

Regula mâinii drepte (fig. b);

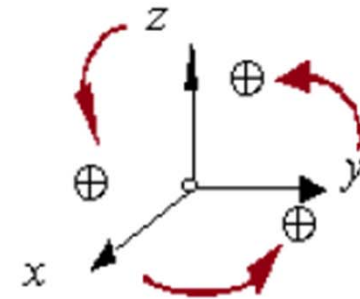
Sensurile pozitive ale axelor (fig. c).



(a)



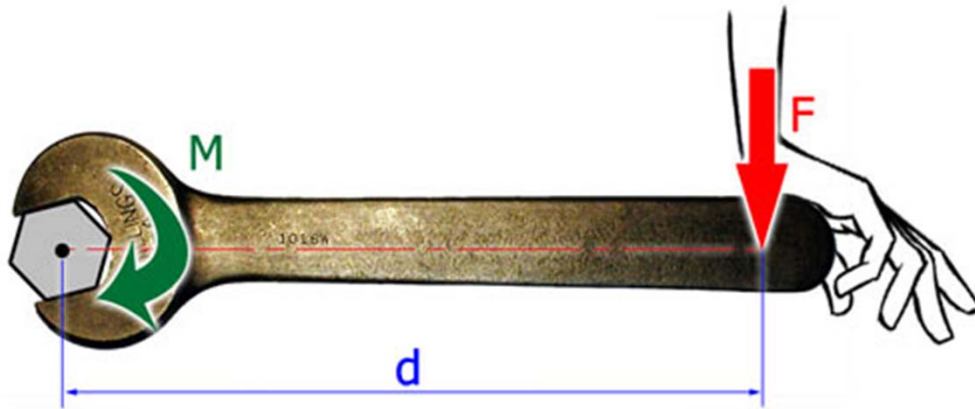
(b)



(c)

Mărimea momentului se măsoară în unități de forță înmulțite cu unități de lungime (N·m, daN·m etc.).

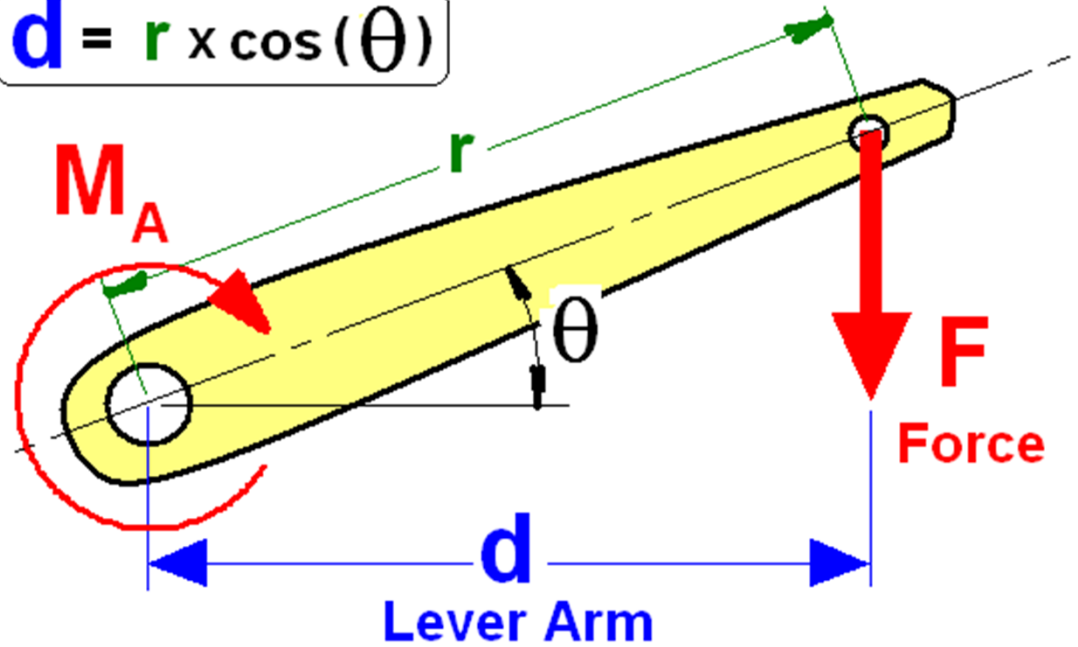
Raportata la noțiunile fundamentale ale Mecanicii, dimensiunea acestei mărimi este: $MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$.



$$M = F \times d$$

$$(\text{Nm}) = (\text{N}) \times (\text{m})$$

$$d = r \times \cos(\theta)$$



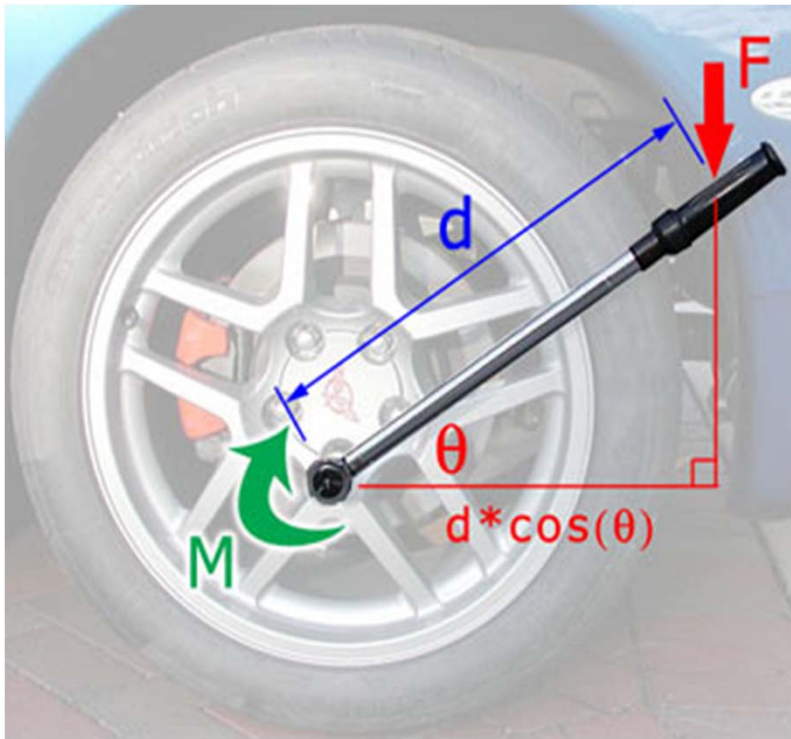
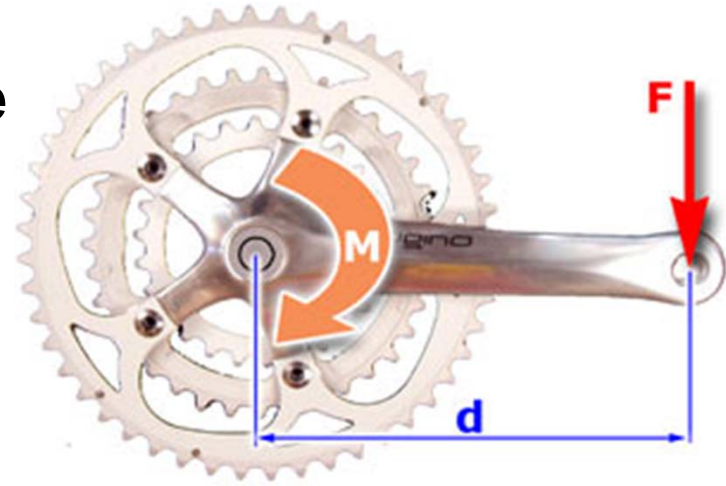
O masa de 30kg apasă brațul pedalei de 170mm lungime. Care este momentul?

$$M = F * d$$

$$F = 30 * 9.81 = 294.3\text{N}$$

$$d = 0.17\text{m}$$

$$M = 294.3 * 0.17 = 50.03\text{Nm}$$



Dacă șurubul trebuie strâns la un moment de 85Nm, care este forța F de strângere?

Unghiul = 35 grade, $d = 420\text{mm}$.

$$M = F * d \Rightarrow F = M / d$$

Distanța perpendiculară =

$$d * \cos(35)$$

$$F = 85 / (0.42 * \cos(35)) = 247.06\text{ N}$$

Proprietăți

- Dacă punctul O se află pe dreapta suport a forței, atunci

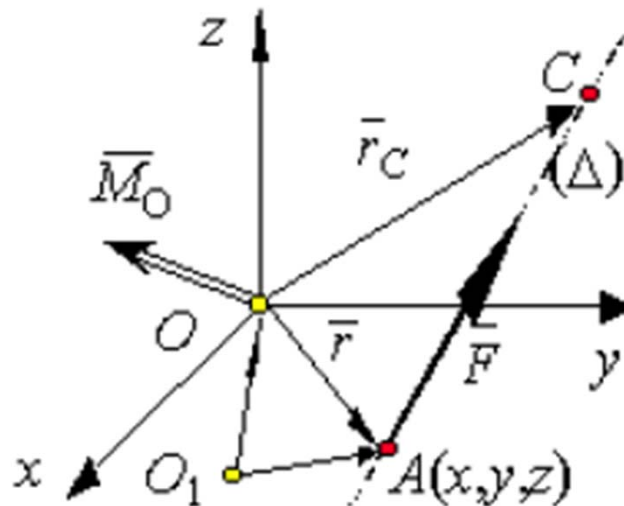
$$\overline{M}_o = 0$$

- **Punctul de aplicare al forței se deplasează pe dreapta suport a ei (Δ) ;**

- **Punctul O se deplasează pe o dreaptă paralelă cu (Δ) ;**

- **Momentul unei forțe se schimbă dacă se schimbă polul din O în O_1 :**
$$\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = (\overline{OO} + \overline{OA}) \times \overline{F} = \overline{M} + \overline{OO} \times \overline{F}$$

$$\overline{M}_{O_1} = \overline{O_1 A} \times \overline{F} = (\overline{O_1 O} + \overline{OA}) \times \overline{F} = \overline{M}_O + \overline{O_1 O} \times \overline{F}$$



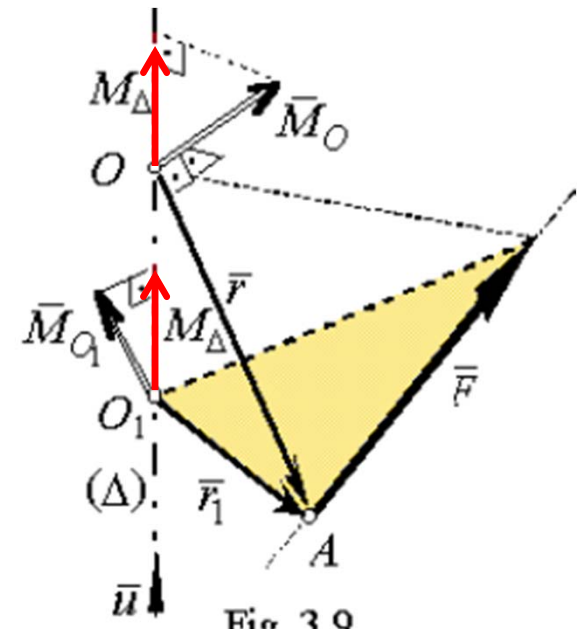
MOMENTUL UNEI FORȚE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Definiție: Momentul unei forțe în raport cu o axă, de versor $\bar{u}$, este egal cu proiecția pe acea axă a momentului forței calculat în raport cu un punct oarecare al axei respective.

$$M_{\Delta} = \bar{M}_O \cdot \bar{u} = (\bar{r} \times \bar{F}) \cdot \bar{u}$$

Semnificația fizică:

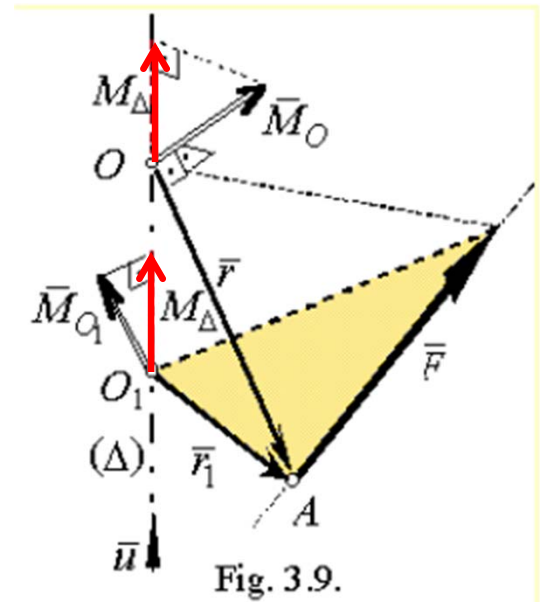
Momentul M_{Δ} arată tendința de rotire a corpului în raport cu axa Δ sub acțiunea forței F .



Observații

- $M_{\Delta} = 0$ dacă cei trei vectori sunt coplanari: forța este $\parallel$ cu axa Δ sau suportul forței înțeapă axa Δ .
- M_{Δ} nu depinde de alegerea punctului O pe axa Δ .

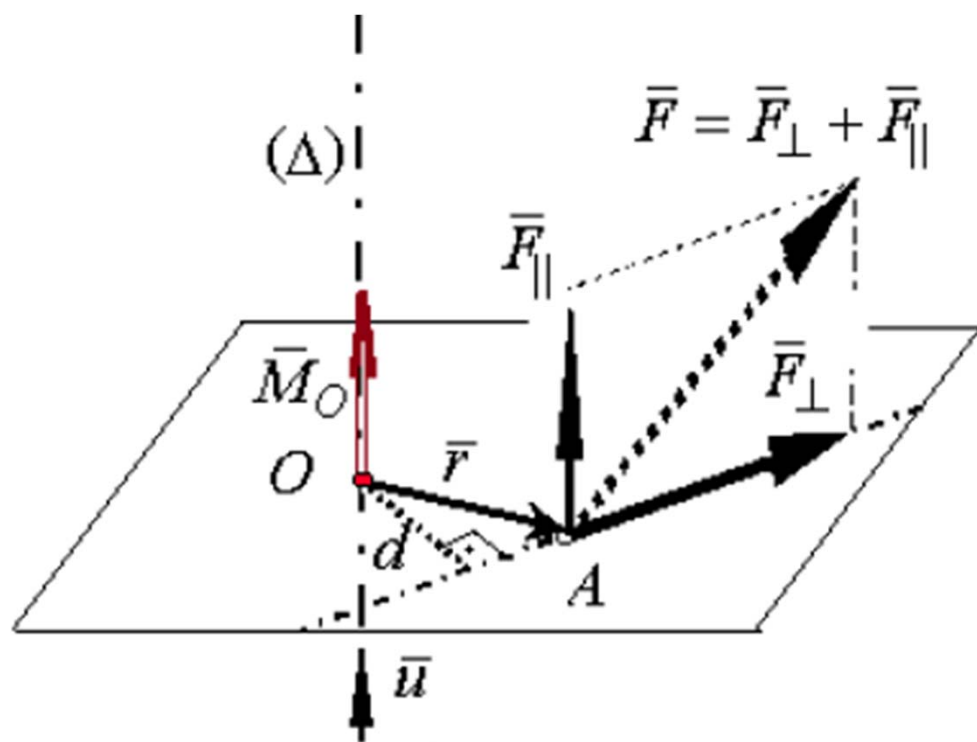
$$M'_{\Delta} = (\overline{O_1A} \times \overline{F}) \cdot \overline{u} = [(\overline{O_1O} + \overline{r}) \times \overline{F}] \cdot \overline{u} = M_{\Delta}$$



Calculul practic pentru M_{Δ}

Momentul unei forțe în raport cu o axă Δ este egal cu mărimea momentului produs de componenta forței dintr-un plan normal pe axă, calculat în raport cu punctul în care axa Δ înțeapă planul normal.

$$\begin{aligned} M_{\Delta} &= (\overline{OA} \times \overline{F}) \cdot \overline{u} = \\ &= [\overline{OA} \times (\overline{F}_{\parallel} + \overline{F}_{\perp})] \cdot \overline{u} = \\ &= (\overline{OA} \times \overline{F}_{\perp}) \cdot \overline{u} = \\ &= \pm |\overline{r} \times \overline{F}_{\perp}| \end{aligned}$$



Teorema lui VARIGNON

Definiție:

Momentul rezultat calculat în raport cu un punct fix O pentru un sistem de forțe care admite o rezultantă unică este egal cu momentul rezultantei sistemului de forțe calculat în raport cu același punct O .

$$\sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \bar{M}_O$$

Observații:

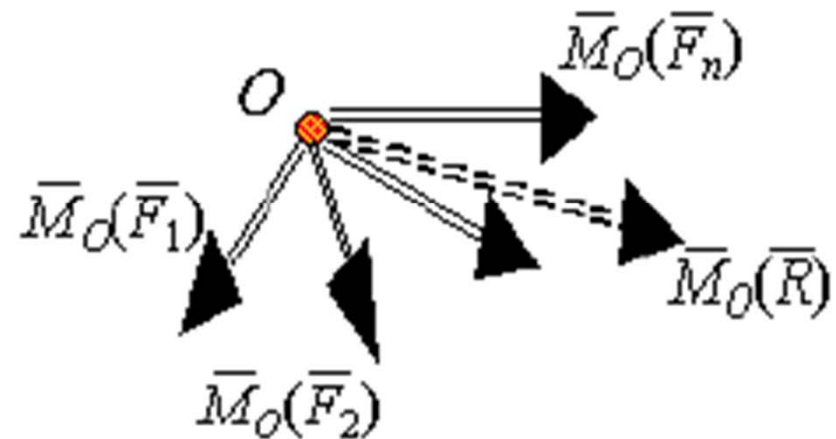
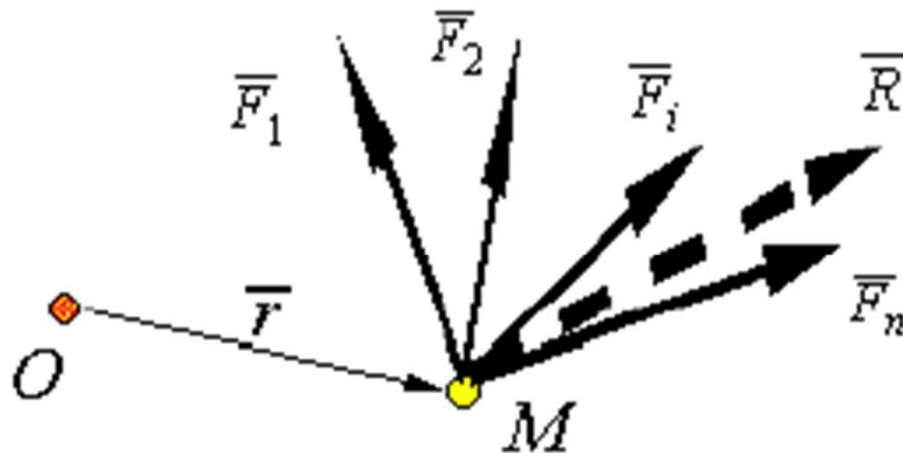
- Valabilă pentru sisteme de forțe care admit o rezultantă unică (ex: forțe concurente, forțe paralele, forțe coplanare).
- Prin rezultantă unică se înțelege că aceasta e nenulă.

Teorema lui VARIGNON - Demonstrație

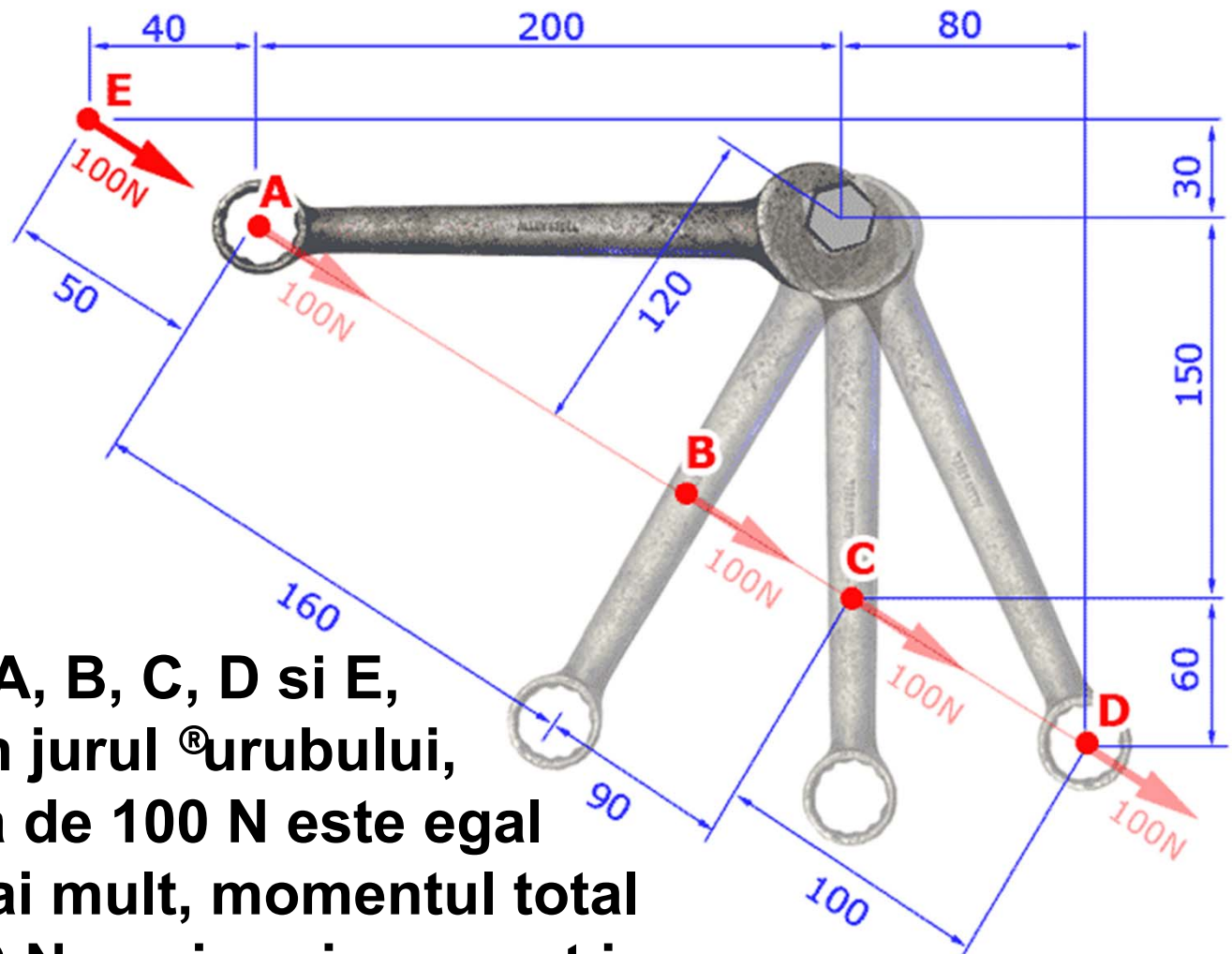
Demonstrație pentru un sistem de forțe concurente

Sistemul de forțe concurente în M: $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \neq 0$

are rezultanta: $\sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \sum \bar{r} \times \bar{F}_i = \bar{r} \times \sum \bar{F}_i = \bar{r} \times \bar{R}$



Teorema lui Varignon va fi ilustrata pentru calculul momentului de strângere a unui șurub cauzat de o forță de 100 N în diferite poziții prin punctele A, B, C, D, și E.



In fiecare punct, A, B, C, D si E, momentul total in jurul [®]urubului, produs de o for^{ta} de 100 N este egal cu 1200 Nmm. Mai mult, momentul total este egal cu 1200 Nmm in orice punct in lungul liniei de ac^{ti}une a for^{tei}.

Cupluri de forțe

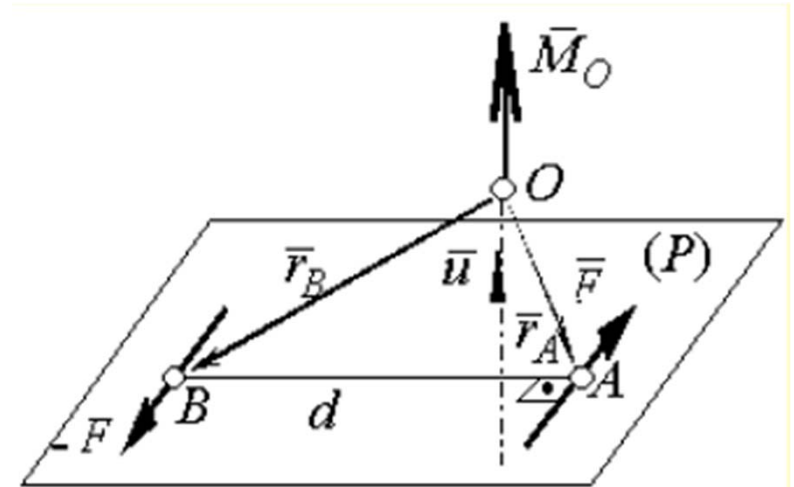
Definiție: Un cuplu de forțe reprezintă ansamblul format din două forțe egale ca mărime, paralele și de sensuri opuse.

⇒ Cuplul de forțe este caracterizat prin rezultantă nulă și moment nenul.

$$\bar{M}_O = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times (-\bar{F}) = (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F} = \bar{BA} \times \bar{F}$$

Rezultă:

- Momentul unui cuplu este un vector liber (este independent de punctul din spațiu în raport cu care se calculează).
- Condiția de echivalență: Două cupluri sunt echivalente dacă au același moment.



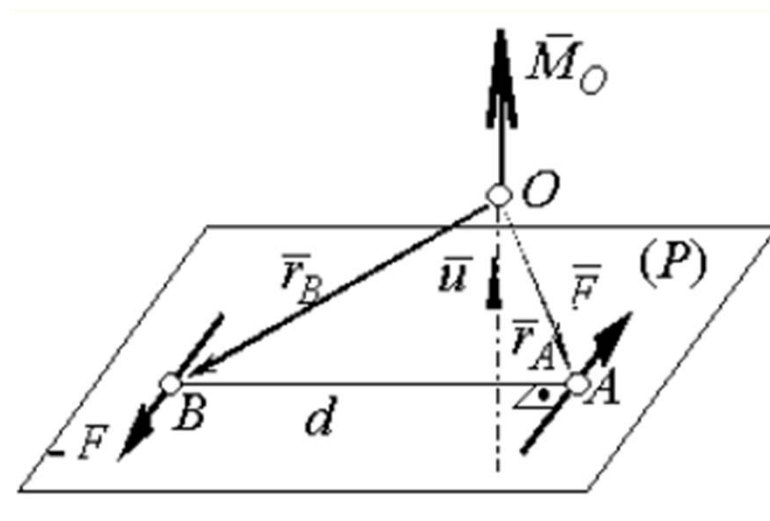
- **Mărimea momentului cuplului:** este egală cu produsul dintre intensitatea uneia dintre forțe și distanța dintre dreptele suport ale celor două forțe ($d = \text{brațul cuplului}$).

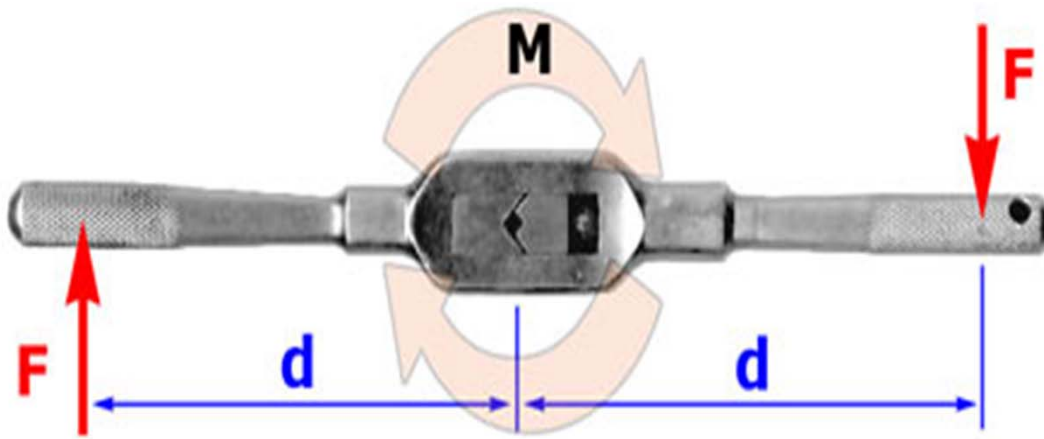
$$\vec{M}_O = |\vec{F}| \times d \times \vec{u}$$

- **Direcția:** perpendiculară pe planul celor două forțe.
- **Sensul:** stabilit după regula șurubului drept.
- **Originea:** punct arbitrar în spațiu.

⇒ **Caracteristicile cuplului:**

- **Rezultanta nulă.**
- **Momentul cuplului este constant în mărime, direcție și sens, pentru toate punctele din spațiu.**





Se dau:

forța $F = 25\text{N}$ si distanta $d = 140\text{mm}$.

Care este momentul aplicat?

$$\text{Moment} = 2 * F * d$$

$$= 2 * 25 * 0.14$$

$$= 7\text{Nm}$$

Reducerea unei forțe în raport cu un punct

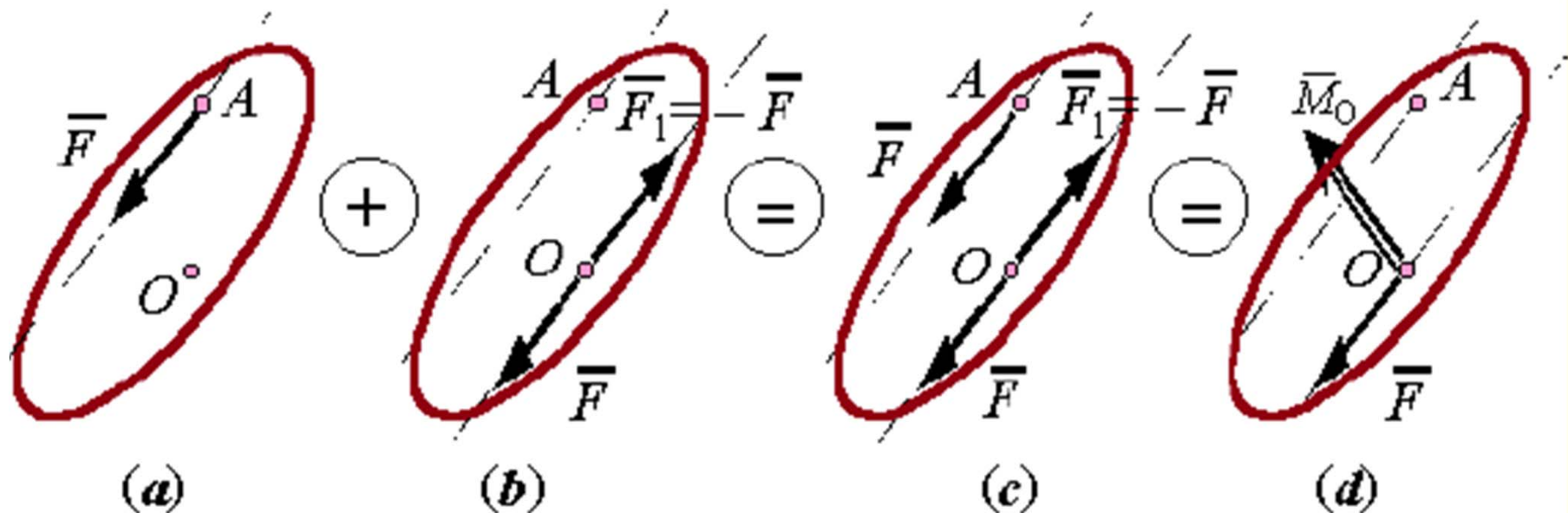
Forța F acționează în punctul A și se caută efectul ei într-un punct O care nu aparține suportului ei (*fig. a*)

1) se adaugă sistemul echivalent cu zero în punctul O (*fig. b*);

2) forța F din A și F_1 din O formează un cuplu (*fig. c*) cu

momentul $\overline{M}_O = \overline{OA} \times \overline{F} = \overline{r}_A \times \overline{F}$

⇒ Efectul în O : o forță egală cu F și un moment M_O (momentul forței din A în raport cu O).



Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct

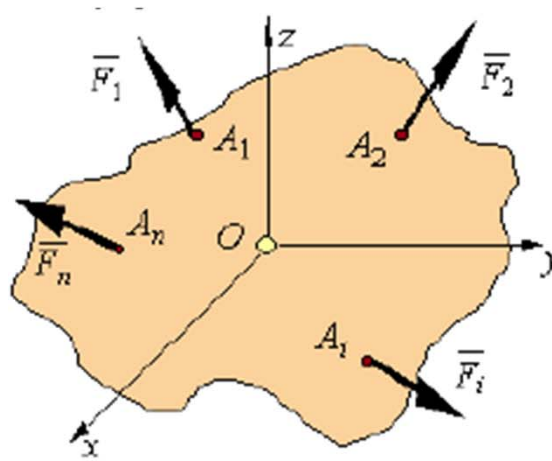
Fie sistemul de forțe $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, acționând corpul în punctele $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ (*fig. a*). Fiecare forță este redusă în O . Se obțin n forțe echipolente în O și n momente ale acestora (*fig. b*).

Rezultanta forțelor este $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, iar momentul resultant

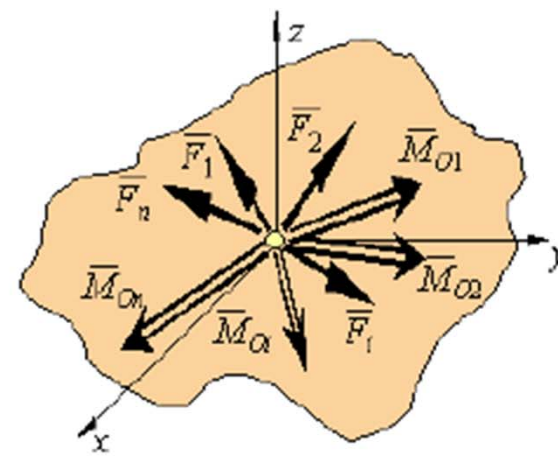
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

⇒ Ansamblul celor doi vectori în O se numește torsorul sistemului de forțe în O , și se notează:

$$\tau_O(\vec{R}, \vec{M}_O)$$



(a)



(b)

Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct

Proprietăți:

1. Dacă se schimbă punctul de reducere, atunci rezultanta este aceeași în orice punct (invariant vectorial).

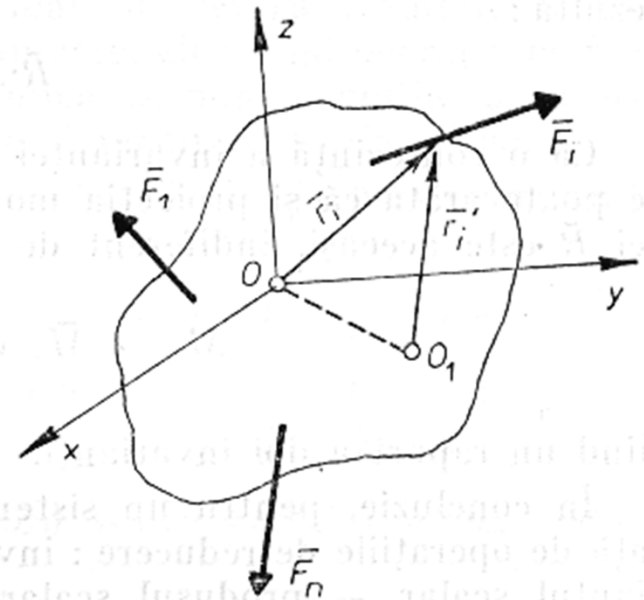
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

2. Dacă se schimbă punctul de reducere, atunci se modifică și momentul resultant:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{OO_1} \times \bar{R}$$

⇒ **Demonstrație:** se alege un punct oarecare O_1 și se calculează momentele forțelor:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1} &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\overline{O_1 A_i} \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n [(\overline{O_1 O} + \overline{OA_i}) \times \bar{F}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{O_1 O} \times \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} \times \bar{F}_i = \overline{O_1 O} \times \sum_{i=1}^n (\bar{F}_i) + \bar{M}_O \end{aligned}$$



Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct

Observații:

1. Dacă $\bar{R}=0$ și $\bar{M}_O=0$, atunci torsorul este nul în toate punctele solidului.

Demonstrație:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \overline{O_1O} \times \bar{R} = 0 + \overline{O_1O} \times 0 = 0$$

2. Dacă $\bar{R}=0$, torsorul este un cuplu în toate punctele solidului, $\bar{M}_O = \bar{M}_{O_1} \neq 0$.

3. Dacă $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, iar vectorul rezultat $\bar{R}$ este paralel cu vectorul $\overline{OO_1}$, momentele $\bar{M}_O = \bar{M}_{O_1}$ (sunt egale), adică în punctele situate pe o dreaptă paralelă cu dreapta-suport a rezultantei unui sistem de forțe, momentul rezultat al sistemului este constant.