



CURS 2

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

STATICA

Statica: studiaza sistemele de forte, determina sistemele de forte echivalente si studiaza conditiile de echilibru ale sistemelor de forte.

1. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

PUNCT MATERIAL LIBER

Punct material liber = punctul material care poate ocupa orice pozitie in spatiu, determinata numai de forte care actioneaza asupra lui.

Pozitia punctului este definita prin trei parametri scalari, independenti intre ei – coordonatele punctului.

Un punct material liber are trei grade de libertate.

PUNCT MATERIAL SUPUS LA LEGATURI

Punct material supus la legaturi = punctul material obligat geometric sa se gaseasca pe o suprafata, pe o curba sau intr-un punct fix din spatiu.

Coordonatele punctului sunt obligate sa satisfaca ecuatia *suprafetei*, a *curbei*, sau sa coincida cu *coordonatele punctului fix din spatiu*.

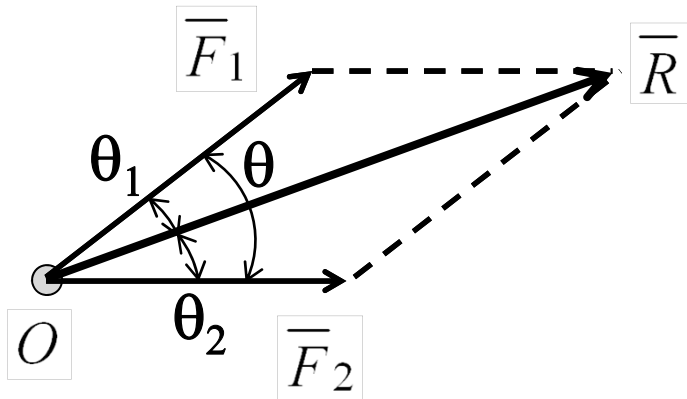
Pozitia punctului material supus la legaturi este definita astfel:

- un punct material aflat pe o suprafata are pozitia definita prin doi parametri – *doua grade de libertate*;**
- un punct material aflat pe o curba are pozitia definita printr-un singur parametru – *un grad de libertate*;**
- un punct material aflat intr-un punct fix din spatiu nu are nevoie de nici un parametru – *nici un grad de libertate*.**

SISTEME DE FORTE CONCURENTE

Fortele care actioneaza asupra punctelor materiale reprezinta sisteme de forte concurente, avand caracterul de vectori legati (punctele de aplicatie ale fortelor coincid si nu pot fi schimbate).

Se numeste rezultanta a unui sistem de forte concurente, suma geometrica a fortelor.



$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$

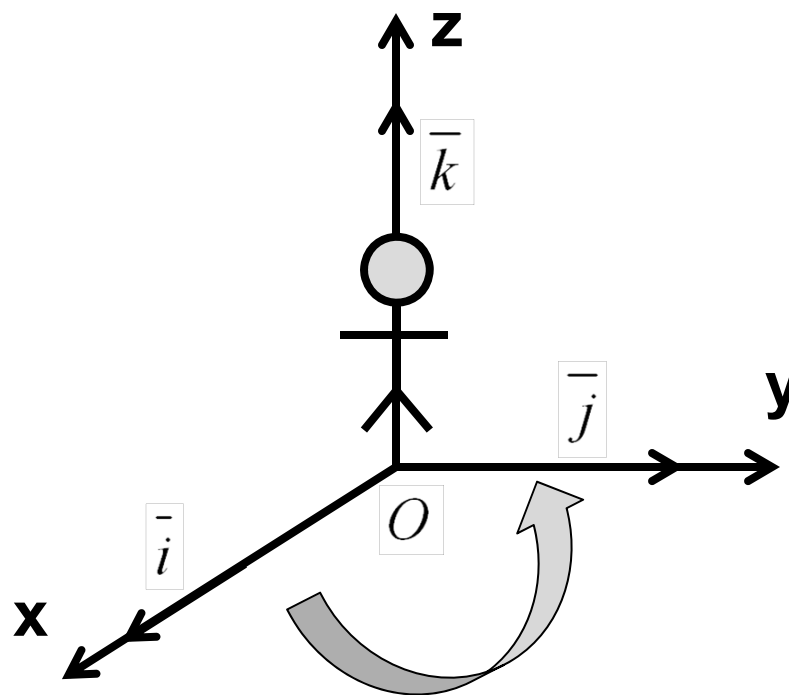
Modulul rezultantei si directia

$$|\overline{R}| = \sqrt{|\overline{F_1}|^2 + |\overline{F_2}|^2 + 2|\overline{F_1}| \cdot |\overline{F_2}| \cos \theta}$$

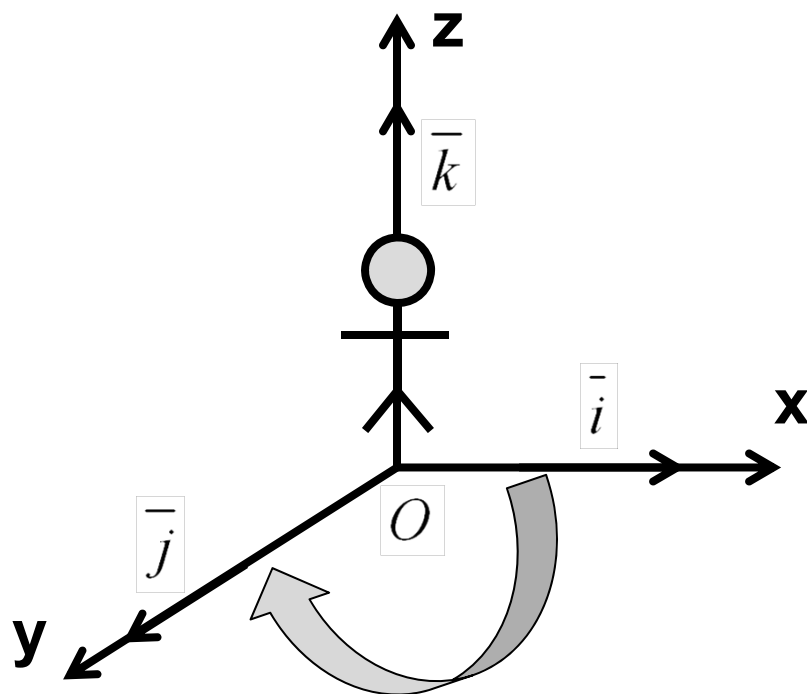
$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{|\overline{F_1}| \sin \theta}{|\overline{F_2}| + |\overline{F_1}| \cos \theta}$$

Pozitia corpurilor se defineste fata de sisteme de referinta carteziane, triortogonale, drepte.

Sistemul de referinta $xOyz$ drept este acel sistem pentru care un observator asezat pe directia pozitiva a axei Oz vede axa Ox suprapunandu-se peste axa Oy pe drumul cel mai scurt in sens trigonometric (similar si pentru celelalte axe).



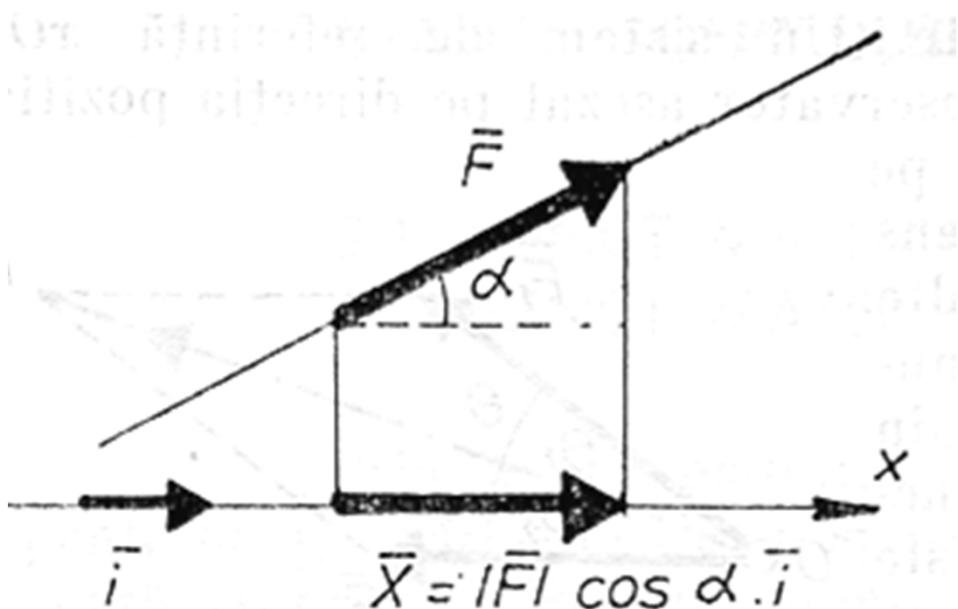
Sistemul de referinta $xOyz$ stang este acel sistem pentru care un observator asezat pe directia pozitiva a axei Oz vede axa Ox suprapunandu-se peste axa Oy pe drumul cel mai scurt in sensul acelor de ceasornic (similar si pentru celelalte axe).



Directiile axelor sistemului de coordonate se definesc cu ajutorul a 3 versori: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

Se numeste proiectie a unei forte pe o axa produsul scalar dintre forta si versorul axei respective (este o marime scalara egala cu produsul dintre intensitatea fortei si cosinusul unghiului dintre forta si axa):

$$X = \vec{F} \cdot \vec{i} = |\vec{F}| \cos \alpha$$



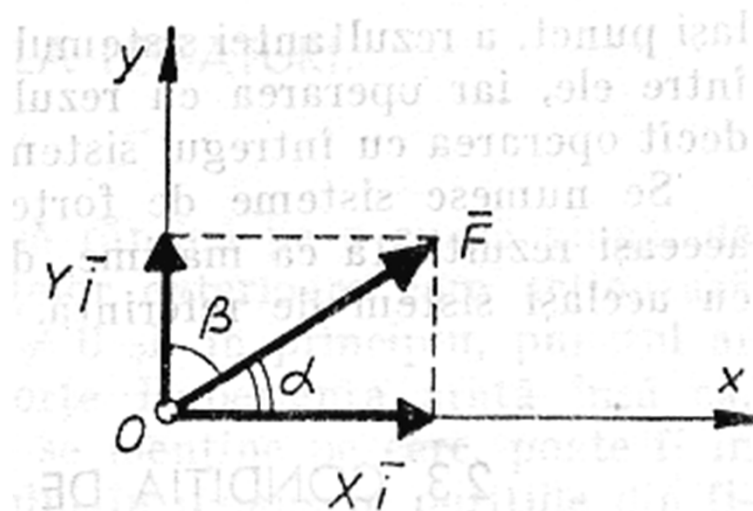
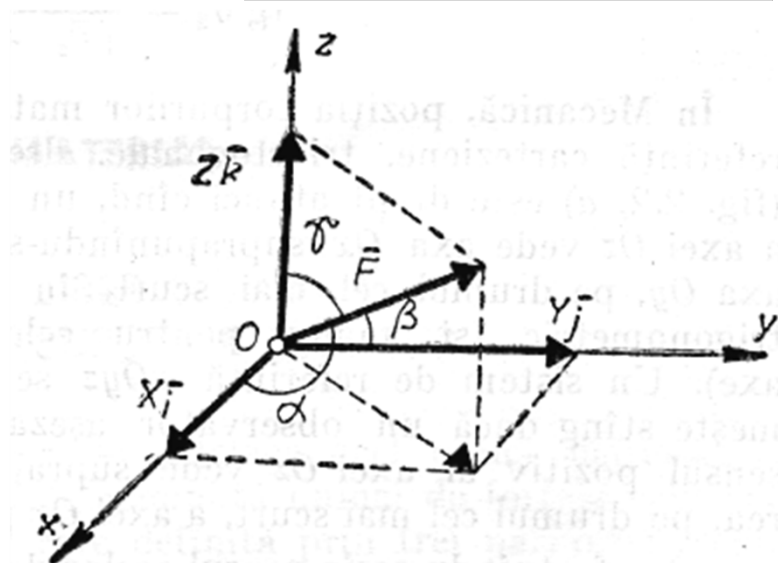
Componenta a unei forte pe o axa = marimea vectoriala egala cu produsul dintre proiectia fortei pe acea axa si versorul directiei pe care s-a efectuat proiectia:

$$\overline{X} = |\overline{F}| \cos \alpha \cdot \vec{i}$$

Proiectia unei forte pe o axa: pozitiva sau negativa.

Analitic: orice forta se poate exprima utilizand proiectiile pe axe.

$$\overline{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$$



$$\overline{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}$$

Modulul unei forte:

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

sau $|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$$\left| \overline{F} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

sau $\left| \overline{F} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

Unghiurile α, β, γ :

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Pentru un sistem de forte: $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_i, \dots, \overline{F}_n$

$$\begin{aligned}\overline{F}_1 &= X_1 \cdot \bar{i} + Y_1 \cdot \bar{j} + Z_1 \cdot \bar{k} \\&\dots\dots\dots\overline{F}_i = X_i \cdot \bar{i} + Y_i \cdot \bar{j} + Z_i \cdot \bar{k} \\&\dots\dots\dots\overline{F}_n = X_n \cdot \bar{i} + Y_n \cdot \bar{j} + Z_n \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

Rezultanta sistemului de forte este forta:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i = \overline{i} \cdot \sum_{i=1}^n X_i + \overline{j} \cdot \sum_{i=1}^n Y_i + \overline{k} \cdot \sum_{i=1}^n Z_i = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k}$$

OBS.! Intre proiectiile rezultantei pe axele sistemului de coordonate si proiectile fortelor pe aceleasi axe exista relatiile:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i$$

TEOREMA PROIECTIILOR: Proiectia pe o axa a rezultantei unui sistem de forte este egala cu suma proiectiilor pe aceeaasi axa a fortelor care alcatuiesc sistemul.

Modulul rezultantei si cosinusurile directoare (directia):

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}$$
$$\cos(\bar{R}, Ox) = \frac{X}{R}; \quad \cos(\bar{R}, Oy) = \frac{Y}{R}; \quad \cos(\bar{R}, Oz) = \frac{Z}{R};$$

Se numesc sisteme de forte concurente echivalente, sistemele care au aceeaasi rezultanta ca marime, directie, sens si punct de aplicatie, in raport cu acelasi sistem de referinta.

CONDITIA DE REPAUS A UNUI PUNCT MATERIAL LIBER

Sisteme de forte echivalente cu zero = sisteme de forte care actioneaza asupra punctelor si corpurilor materiale aflate in repaus fata de un sistem de referinta si il mentin in repaus si dupa sollicitare; satisfac conditia:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i = 0$$

⇒ Poligonul fortelor este un poligon inchis.

Sub forma vectoriala

Conditia de echilibru sub forma scalara a unui punct material:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

Pentru un sistem de forte coplanar conditia de echilibru:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0$$

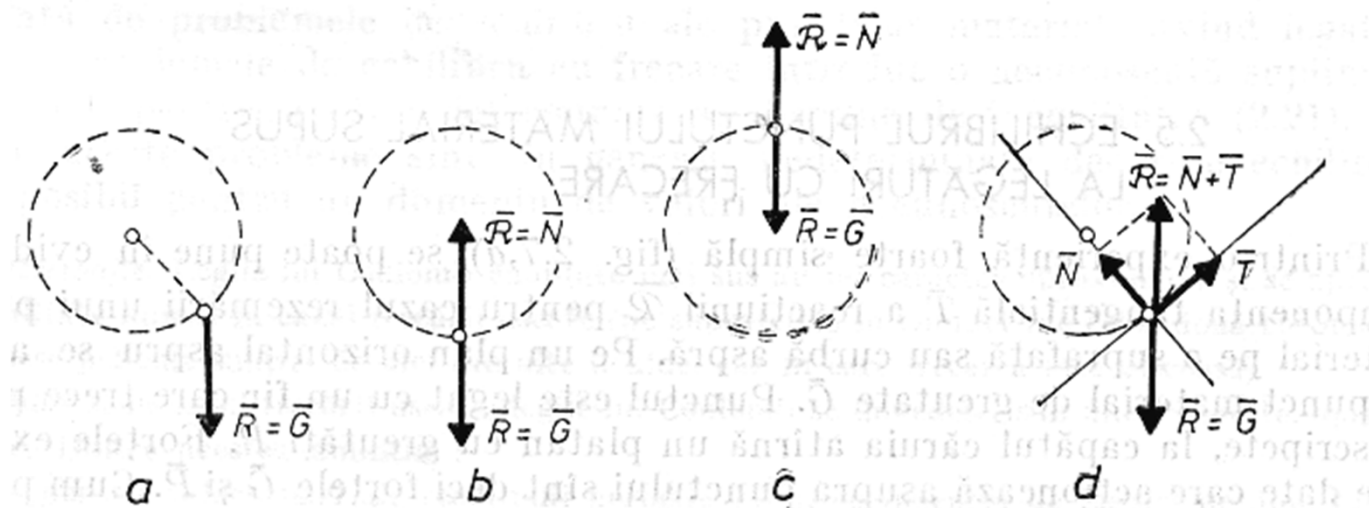
PUNCT MATERIAL SUPUS LA LEGATURI.

AXIOMA LEGATURILOR

Fie un PM aflat pe o curba plana (cerc).

Rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului este greutatea PM: $\vec{R} = \vec{G} \neq 0$

Un PM obligat de legatura geometrica de a se mentine pe cerc, poate fi in repaus in diferite pozitii.



Conform principiului actiunii si reactiunii, cercul reactioneaza asupra PM cu o forta egala si de sens contrar, $\overline{\mathfrak{R}}$, si se numeste reactiune sau forta de legatura.

Conditia de echilibru:

$$\overline{R} + \overline{\mathfrak{R}} = 0$$

Operatia de suprimare a unei legaturi si de inlocuire a ei cu o forta de legatura $\Rightarrow$ **AXIOMA LEGATURILOR**

Orice legatura geometrica poate fi inlocuita cu o forta denumita forta de legatura sau reactiune.

Sub actiunea fortelor date si a fortelor de legatura, PM poate fi considerat liber si tratat ca atare; dpdv mecanic el este echivalent cu un punct material supus la legaturi.

După cum rezultă din figura 2.6, d , reacțiunea $\bar{\mathcal{R}}$ poate fi, în general, descompusă în două componente :

$\bar{N}$ — componenta normală, care are rolul de a împiedica punctul (să se deplaseze pe direcția normală la curbă ;

$\bar{T}$ — componenta tangențială sau forța de frecare, care are rolul de a împiedica, în anumite limite, deplasarea pe direcția tangentei la curbă.

Rezultă că :

$$\bar{\mathcal{R}} = \bar{N} + \bar{T}. \quad (2.17)$$

Componenta normală $\bar{N}$ avînd modulul oricît de mare există întotdeauna și are rolul de a menține punctul pe curbă sau suprafață, deci exprimă obligația punctului material de a satisface legătura geometrică. Componenta tangențială $\bar{T}$ există numai în cazul legăturilor aspre, cu frecare, și are valoarea limitată.

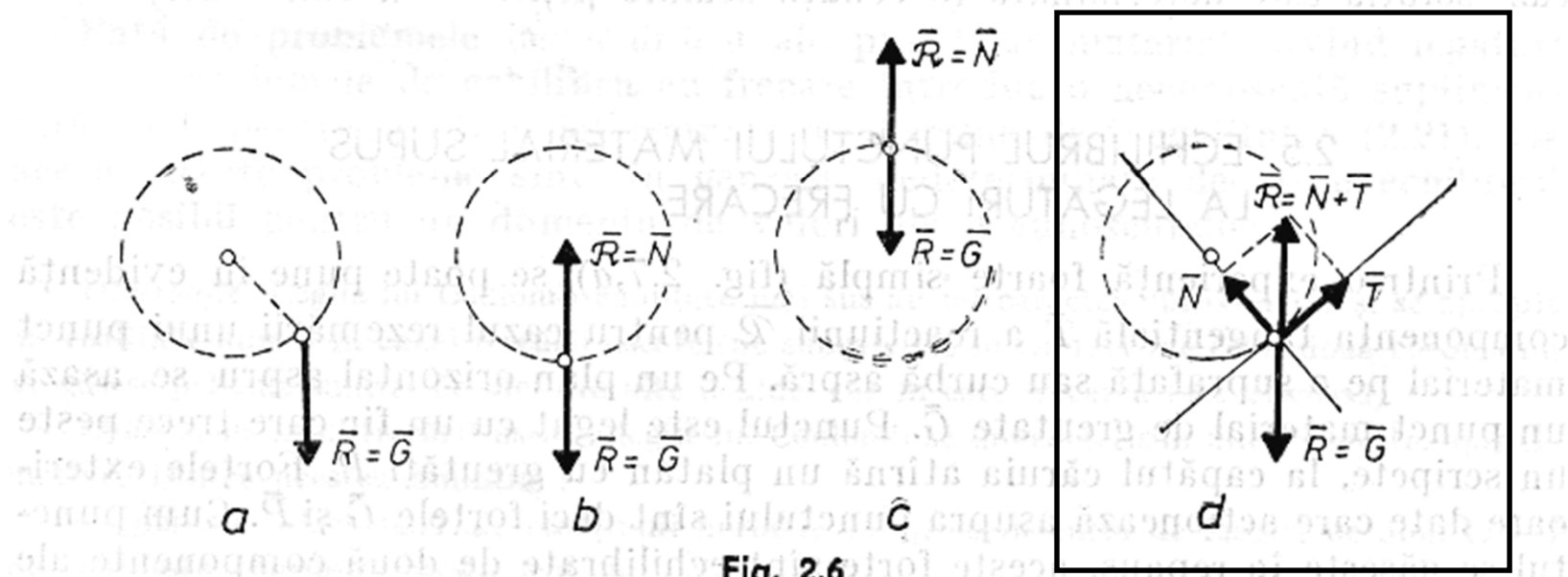


Fig. 2.6

Legaturi pentru care $\overline{T} = 0$ se numesc legaturi ideale.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\mathfrak{R}} = \overline{N}}$$

Conditia de echilibru a fortelor care actioneaza asupra unui punct material supus la legaturi ideale permite scrierea a:

- 3 ecuatii scalare pentru sistemele de forte concurente care actioneaza in spatiu;

$$\sum_{i=1}^n (X_{di} + X_{li}) = 0; \sum_{i=1}^n (Y_{di} + Y_{li}) = 0; \sum_{i=1}^n (Z_{di} + Z_{li}) = 0$$

- 2 ecuatii scalare pentru sistemele de forte concurente care actioneaza in plan.

$$\sum_{i=1}^n (X_{di} + X_{li}) = 0; \sum_{i=1}^n (Y_{di} + Y_{li}) = 0$$

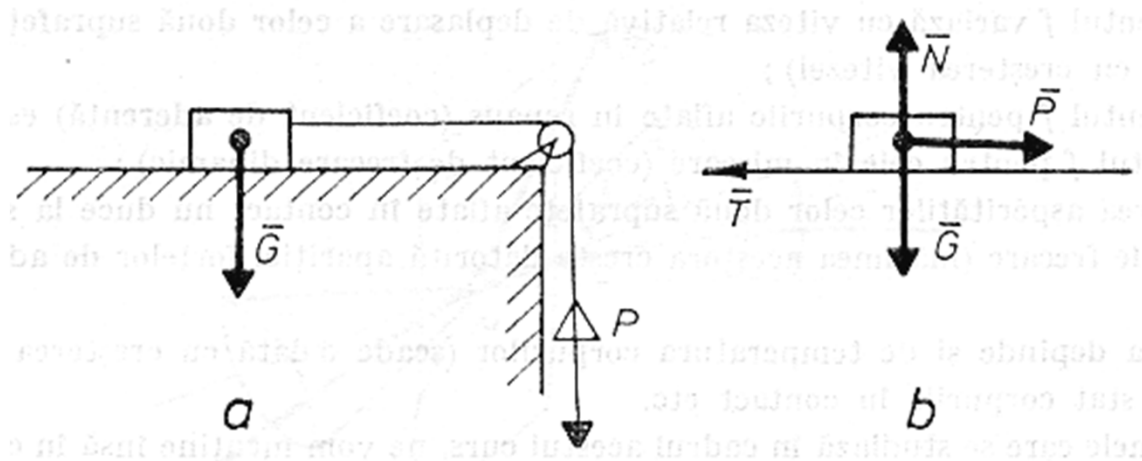
“d” – proiectiile fortelor date;

“l” – proiectiile fortelor de legatura.

ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGATURI CU FRECARE

$\bar{N}$ Reactiunea normala;
 $\bar{T}$ Forta de frecare de alunecare.

$\exists$ o valoare limita a fortei $\bar{P}$ pentru care PM se pune in miscare, si corespunde valorii maxime a modulului fortei de frecare



ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGATURI CU FRECARÉ

- Explicatia frecarii: la scara microscopica exista asperitati intre suprafetele de contact, energia se disipeaza aici.
- Dupa natura fizica a suprafetelor de contact:
 - Frecare pe suprafete uscate (frecare uscata);
 - Frecare pe un mediu vascos (frecare vascoasa) .
- **Definiții.** Se pune ca:
 - **frecarea este uscata** atunci cand valoarea fortei de frecare este constanta (nu depinde de viteza) $F = \text{const.}$;
 - **frecarea este vascoasa** atunci cand valoarea fortei de frecare este proportionala cu viteza $F = -cv$.

Legile frecarii de alunecare (legile lui Coulomb)

- 1. Valoarea fortei maxime de frecare nu depinde de marimea suprafetei de contact dintre cele doua corpuri, iar daca se produce miscarea, nu depinde nici de viteza relativa.**
- 2. Valoarea fortei maxime de frecare depinde de natura suprafetelor in contact.**
- 3. Valoarea fortei maxime de frecare este proportionala cu marimea reactiunii normale $|N|$, factorul de proportionalitate fiind coeficientul de frecare la alunecare μ .**

$$|T|_{max} = \mu |N|$$

Proprietatile fortei de frecare

Forta de frecare are urmatoarele proprietati:

- ▶ **Directia ei este tangenta la curba sau se gaseste in planul tangent la suprafata de contact;**
- ▶ **Sensul ei este contrar tendintei de alunecare;**
- ▶ **Conditia de repaus a unui punct material este adevarata daca valoarea fortei de frecare este inferioara valorii maxime:**

$$|T| \leq \mu |N|$$

Obs: Legile lui Coulomb au un caracter aproximativ si se apropie de realitate doar in cazul frecarii uscate.

ASPECTUL GEOMETRIC AL FRECARII DE ALUNECARE

Fie un PM, M , actionat de rezultanta $\bar{R}$ a unui sistem de forte concurente, rezemat pe o suprafata aspra. Acesta se gaseste in repaus daca:

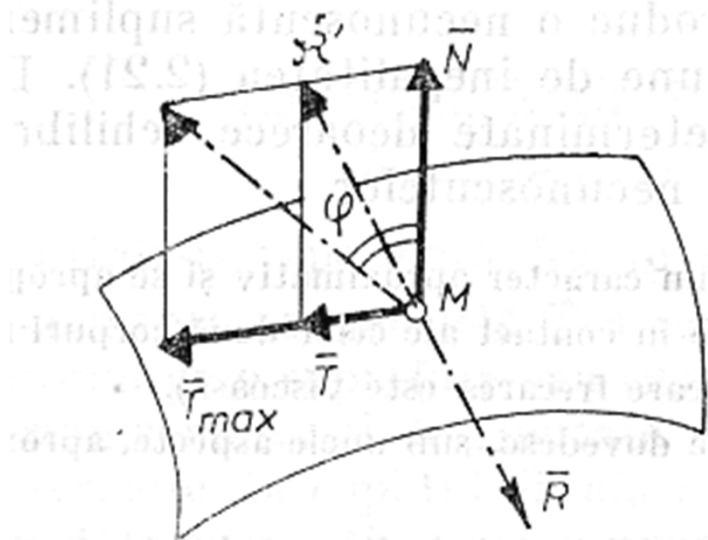
$$\boxed{\bar{\mathfrak{R}} = -\bar{R}}$$

Pentru o pozitie curenta de echilibru:

$$\bar{\mathfrak{R}} = \bar{N} + \bar{T} \text{ si } \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\bar{T}|}{|\bar{N}|}$$

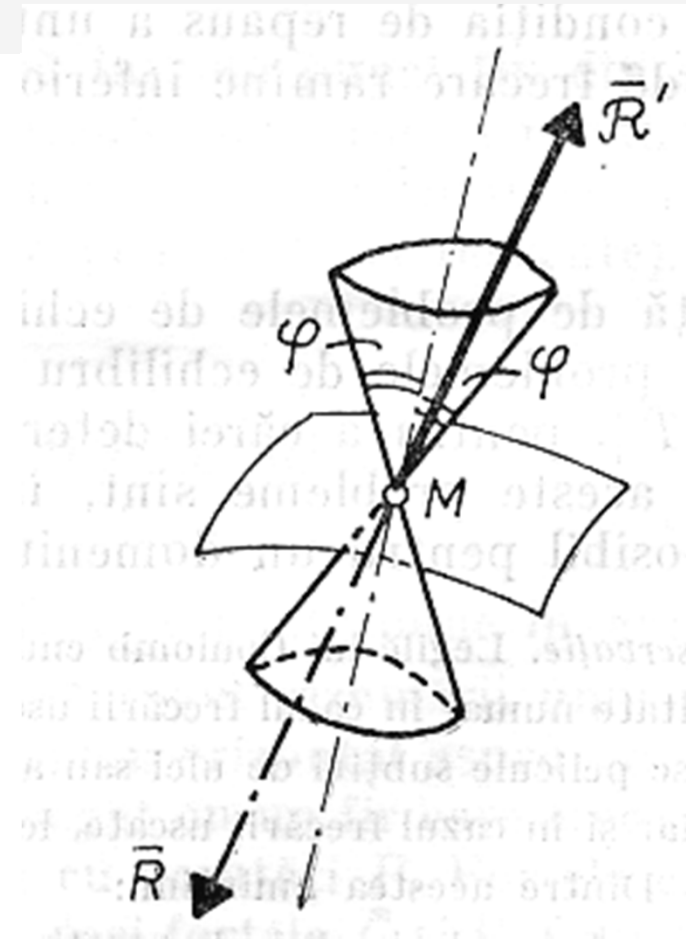
Pt. pozitie de echilibru la limita:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\bar{T}|_{\max}}{|\bar{N}|} = \frac{\mu |\bar{N}|}{|\bar{N}|} = \mu$$



Unghiul φ = unghi de frecare

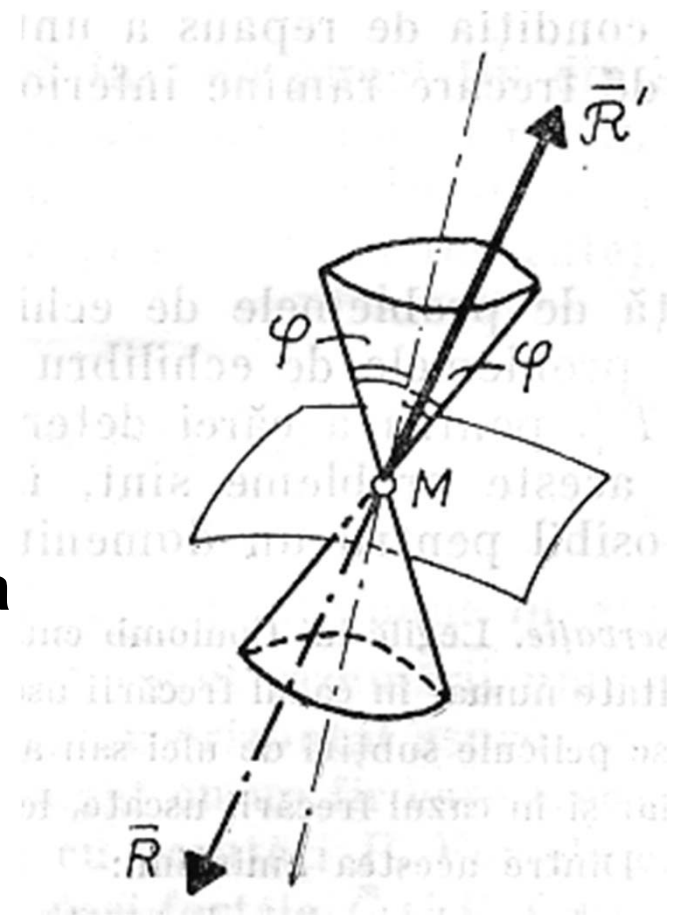
Locul geometric al tuturor dreptelor care fac un unghi dat φ cu normala la o suprafață într-un punct dat este un con cu două panze, denumit con de frecare.



La echilibru trebuie satisfacuta relatia:

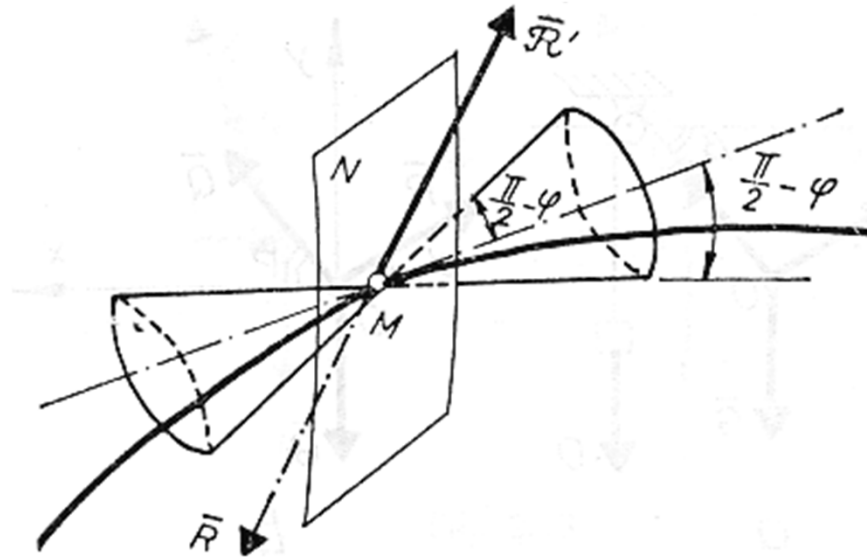
$$|\vec{T}| \leq |\vec{T}|_{\max}$$

adica suportul rezultantei $\vec{R}$ a fortelor exterioare date, respectiv suportul reactiunii $\vec{R}$, trebuie sa faca cu normala la suprafata un unghi mai mic decat unghiul de frecare.



⇒ Conditia necesara si suficienta pentru ca un PM sa se gaseasca in echilibru pe o suprafata aspra intr-un punct dat, este ca suportul rezultantei fortelor efectiv aplicate sa se gaseasca in interiorul conului de frecare din acel punct.

Pentru cazul rezemarii unui punct pe o curba aspra, conul de frecare are ca axa directia tangentei la curba in punctul respectiv si unghiul la varf $2(\pi/2-\varphi)$.



$\Rightarrow$ Conditia necesara si suficienta pentru ca un PM sa se gaseasca in echilibru pe o curba aspra intr-un punct dat, este ca suportul rezultantei fortelor efectiv aplicate sa se gaseasca in exteriorul conului de frecare din acel punct.