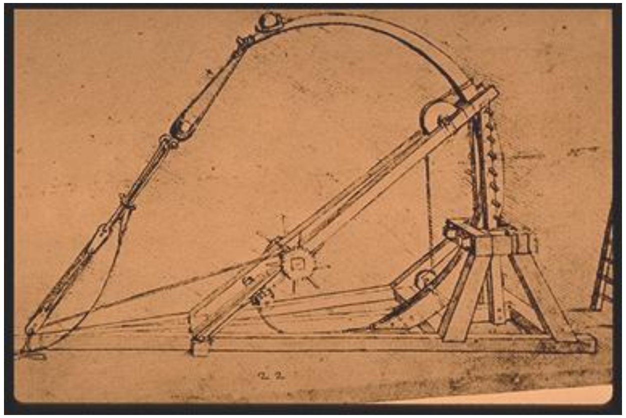


CURS 13

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

Studiul dinamicii punctului material cu ajutorul teoremelor generale

Teoremele generale se referă la variația în timpul mişcării a celor mai importante mărimi: *impulsul, momentul cinetic, lucrul mecanic* şi *energia mecanică*.

Teoremele generale se deduc din legea lui Newton exprimând principiul acțiunii forțelor sub o altă formă.

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

Teorema variației impulsului

Impulsul unui punct material *H* este un vector de expresie:

$$\overline{H} = m\overline{v} \qquad \textbf{(9)}$$

în care:

– *m* este masa punctului material;

– $\overline{v}$ este viteza punctului material.

Vectorul impuls are aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca vectorul viteză.

Din ecuația fundamentală a dinamicii $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ **rezultă:**

$$m\overline{a} = \overline{F} \Rightarrow m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} \Rightarrow \frac{d\left(m\overline{v}\right)}{dt} = \overline{F} \Rightarrow \frac{d\overline{H}}{dt} = \overline{F} \qquad \textbf{(10)}$$

$$m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F} \Rightarrow \frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{F} \quad \textbf{(10)}$$

Ecuația (10) reprezintă *teorema variației impulsului*: derivata în raport cu timpul, a impulsului unui punct material, este egală cu forța rezultantă ce acționează asupra acestuia, în tot timpul mişcării.

Proiectând relația (10) pe axele unui sistem cartezian *Oxyz*, se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} &= \dot{H}_x = X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ \frac{dH_y}{dt} &= \dot{H}_y = Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \\ \frac{dH_z}{dt} &= \dot{H}_z = Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \end{aligned} \quad \textbf{(11)}$$

În cazul în care $\overline{R} = 0$, atunci:

$$\dot{\overline{H}} = 0 \Rightarrow \overline{H} = ct. \Rightarrow m\overline{v} = ct. \qquad \textbf{(12)}$$

expresie care poartă denumirea de *legea conservării impulsului:* pentru un punct material la care rezultanta forțelor aplicate este nulă, impulsul se conservă.

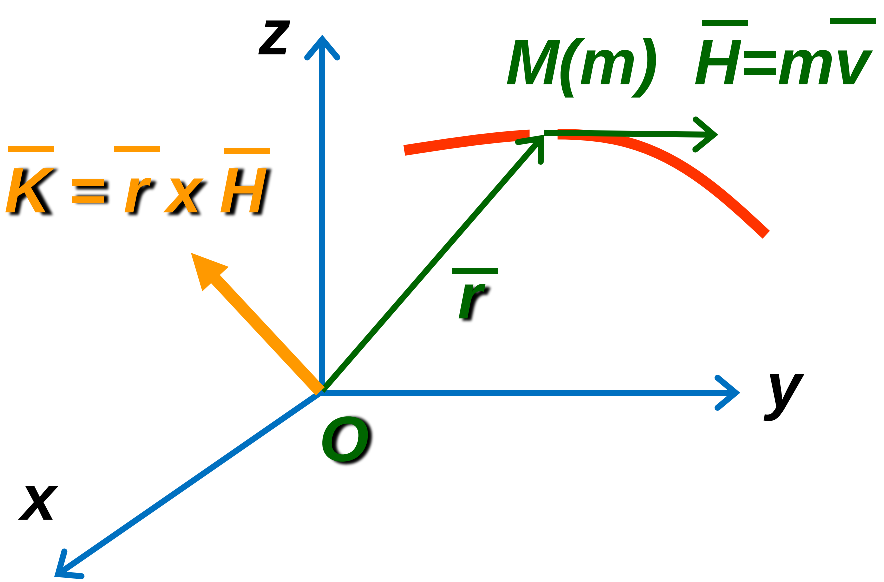
Relația (12) arată că mişcarea punctului material este rectilinie şi uniformă.

Teorema variației momentului cinetic

Momentul cinetic în raport cu un punct fix *O* al unui punct material este prin definiție momentul vectorului impuls al punctului material în raport cu polul *O*:

$$\overline{K}_0 = \overline{r} \times \overline{H}$$

$$\overline{K}_0 = \overline{r} \times m\overline{v} \qquad \textbf{(13)}$$



Înmulțind vectorial la stânga cu $\bar{r}$ ecuația fundamentală a dinamicii se obține:

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times m\bar{v}\right) = \bar{r} \times \bar{F} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} \;\Rightarrow\; \frac{d\bar{K}_0}{dt} = M_0 \qquad \textbf{(14)}$$

Relația (14) reprezintă *teorema variației momentului cinetic:* derivata în raport cu timpul a momentului impulsului față de un punct fix *O* este egală, în timpul mişcării, cu momentul forței față de acelaşi pol *O*.

Ținând cont de expresiile vectoriale ale lui $\bar{r}$, $\bar{v}$ respectiv $\bar{F}$:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$
$$\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} \qquad \textbf{(15)}$$
$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

prin proiectarea relației (14) pe axele unui sistem cartezian *Oxyz* se obține:

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(y\dot{z} - z\dot{y})\right] = M_x = yZ - zY$$
$$\frac{dK_{0y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(z\dot{x} - x\dot{z})\right] = M_y = zX - xZ \qquad \textbf{(16)}$$
$$\frac{dK_{0z}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m(x\dot{y} - y\dot{x})\right] = M_z = xY - yX$$

adică care reprezintă teorema momentului cinetic în raport cu axele respective.

Dacă: $\overline{M}_0 = 0 \Rightarrow \overline{K}_0 = ct.$

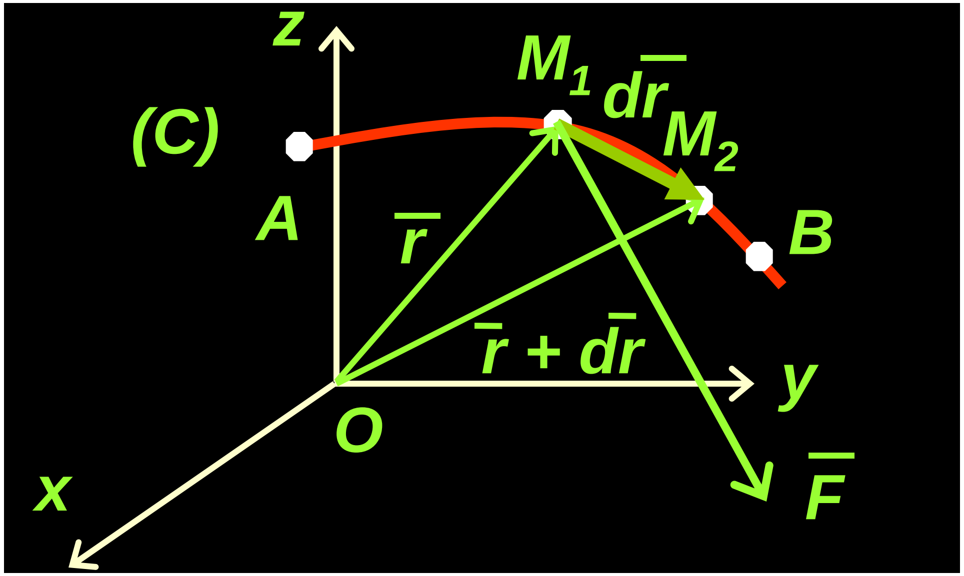
$$\dot{\overline{K}}_0 = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

atunci momentul cinetic al punctului material în raport cu un punct fix se conservă.

TEOREMA ENERGIEI CINETICE

a) Lucrul mecanic

Se consideră cazul general al unei forte $\overline{F}$, funcție de timp, de poziție si viteza de deplasare a punctului ei de aplicație.
Fie M_1 si M_2 doua poziții infinit vecine ale curbei *C* pe care se deplasează punctul de aplicatie al forței. Vectorii de poziție ai punctelor M_1 si M_2 sunt $\overline{r}$(t) si $\overline{r}$ + d$\overline{r}$, iar d$\overline{r}$, deplasarea elementara in intervalul de timp d*t*.



Se defineşte ca *lucru mecanic elementar* efectuat de forța $\overline{F}$, produsul scalar:

$$\mathrm{d}L = \overline{F} \cdot \mathrm{d}\,\overline{r} = |\,\overline{F}\,| \cdot |\,\mathrm{d}\,\overline{r}\,| \cos(\,\overline{F}\,, \mathrm{d}\,\overline{r}\,) \quad \textbf{(18)}$$

⇒ **Lucrul mecanic este o <u>mărime scalara</u>, egala cu produsul dintre mărimea forței si proiecția deplasării**

1J - este lucru mecanic efectuat de 1N când punctul material se deplasează cu 1m în direcția forței.

⇒ **Lucrul mecanic poate fi pozitiv sau negativ, după cum unghiul $(\,\overline{F}\,, \mathrm{d}\,\overline{r}\,)$ este ascuțit sau obtuz.**

⇒ **Lucrul mecanic este nul când forța sau deplasarea sunt nule, precum si in cazul când forța si deplasarea sunt perpendiculare intre ele.**

⇒ **Unitatea de măsura pentru lucrul mecanic in sistemul internațional SI este *joule-ul* (*J*).**

Teorema variației energiei cinetice

Capacitatea mişcării mecanice de a se transforma in mişcare nemecanica este caracterizata printr-o mărime de stare care poarta denumirea de *energie cinetica*.

Energia cinetică a unui punct material de masă *m*, aflat în mişcare cu viteza *v* este, prin definiție, egală cu expresia:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad \textbf{(19)}$$

Energia cinetică este o mărime scalara pozitiva. Ca si impulsul si momentul cinetic, energia cinetica este o mărime de stare, adică o mărime care caracterizează mişcarea la un moment dat.

Lucrul mecanic elementar **al forței $\overline{F}$ corespunzător deplasării d$\overline{r}$ este prin definiție egal cu produsul scalar al vectorului $\overline{F}$ cu vectorul d$\overline{r}$:**

$$dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad \textbf{(20)}$$

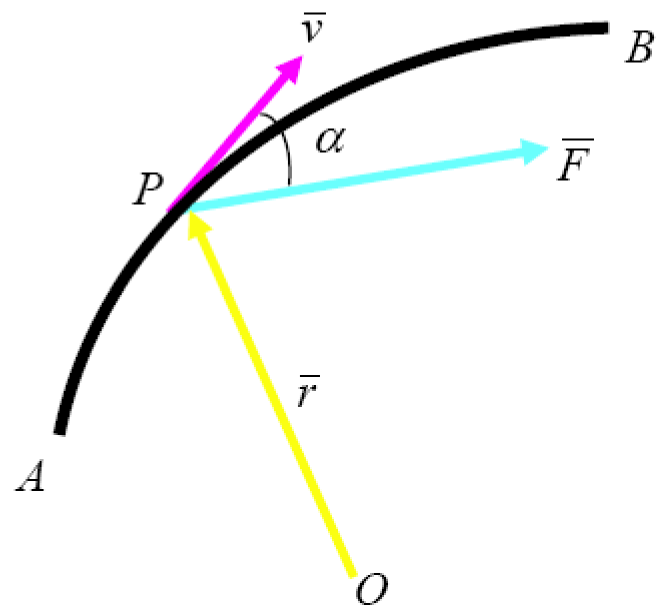
sau

$$dL = Xdx + Ydy + Zdz \qquad \textbf{(21)}$$

Întrucât $|d\overline{r}| = ds$ **, relația (20) se mai poate scrie:**

$$dL = Fds\cos\alpha \qquad \textbf{(22)}$$

în care α este unghiul format de vectorul *F* cu tangenta la traiectorie.



Unghiul format de vectorul $\overline{F}$ cu tangenta la traiectorie

Lucrul mecanic corespunzător unei deplasări finite *AB* a punctului material are expresia:

$$L_{AB} = \int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_A^B \left(Xdx + Ydy + Zdz \right) \quad \textbf{(23)}$$

$$L_{AB} = Fs\cos\alpha$$

Dacă forța $\overline{F}$ este în permanență normală la traiectorie ($\alpha=\pi/2$), lucrul mecanic al acestei forțe va fi nul.

Dacă înmulțim scalar cu d$\overline{r}$ ecuația fundamentală a dinamicii se obține:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\overline{v}}{dt}\cdot d\overline{r} = \overline{F}\cdot d\overline{r} \\ \overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} \Rightarrow d\overline{r} = \overline{v}\,dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\overline{v}\cdot d\overline{v} = \overline{F}\cdot d\overline{r} \qquad \textbf{(24)}$$

Dar:

$$m\overline{v}\cdot d\overline{v} = \frac{1}{2}md\left(\overline{v}^2\right) = \frac{1}{2}mdv^2 = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE \qquad \textbf{(25)}$$

Din (20), (24) şi (25) rezultă:

$$dE = dL \qquad \textbf{(26)}$$

relație ce poartă denumirea de *teorema variației energiei cinetice*: în orice moment din timpul mişcării, diferențiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar corespunzător forței rezultante ce acționează asupra punctului material.

Integrând relația (26) între două puncte de pe traiectorie rezultă:

$$E_B - E_A = L_{AB} \qquad \textbf{(27)}$$

Sub formă finită, teorema variației energiei cinetice arată că: *diferența dintre energia cinetică finală şi energia cinetică inițială este egală cu lucrul mecanic al forței rezultante calculat între poziția inițială şi cea finală*.

Teorema conservării energiei mecanice

Să presupunem că forța $\overline{F}$ poate fi scrisă sub forma:

$$X = \frac{dU}{dx} \quad Y = \frac{dU}{dy} \quad Z = \frac{dU}{dz} \qquad \textbf{(28)}$$

în care *U* este o funcție scalară ce depinde de coordonatele punctului de aplicație al forței:

$$U = U(x, y, z) \qquad \textbf{(29)}$$

Funcția *U* astfel definită se numeşte *funcție de forță*.

Condițiile necesare şi suficiente pentru ca forța să admită o funcție de forță sunt:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \textbf{(30)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

Lucrul mecanic elementar al forței $\overline{F}$ este:

$$dL = \overline{F} \cdot d\overline{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \qquad \textbf{(31)}$$

Teorema variației energiei cinetice (26) devine:

$$dE = dU \qquad (32)$$

care prin integrare rezultă:

$$E = U + h \qquad (33)$$

în care *h* este o constantă de integrare.

Lucrul mecanic al forței $\overline{F}$, pe traiectoria *AB*, devine:

$$L_{AB} = \int_{A}^{B} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{A}^{B} dU = U_{B} - U_{A} \qquad (34)$$

Relația (34) arată că lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs, ci numai de poziția inițială *A* şi de poziția finală *B*.

Din relațiile (32), (33) şi (34) rezultă:

$$E_B - E_A = U_B - U_A \qquad \textbf{(35)}$$

Dacă în locul funcției *U* considerăm o funcție potențială *V* definită prin:

$$V = -U \qquad \textbf{(36)}$$

rezultă:

$$d(E+V) = 0 \quad \Rightarrow \quad E + V = ct. \qquad \textbf{(37)}$$

Mărimea *V* reprezintă *energia potențială de poziție a punctului material*.
Energia potențială **este o mărime care caracterizează posibilitatea unor corpuri de a produce lucru mecanic numai prin poziția pe care o ocupă față de o configurație de referință.**

Suma dintre energia cinetică şi energia potențială se numeşte *energie mecanică* E_m.

$$E_m = E + V = ct. \qquad (38)$$

Relația (38) exprimă *teorema conservării energiei mecanice:* dacă forța rezultantă derivă dintr-o funcție de forță, energia mecanică a punctului material se conservă.

Dinamica sistemului de puncte materiale

Se consideră un sistem de puncte materiale (i = 1…n) unde fiecărui punct material *i* se atribuie o masă m_i. Asupra fiecărui punct material din acest sistem acționează două tipuri de forte si anume: *forte interioare* $\vec{F}^{(i)}$ si *forte exterioare* $\vec{F}^{(e)}$.

Fie un punct material de masă m_k asupra căruia se exercită forțele interioare $\vec{F}_{kl}^{(i)}$ din partea celorlalte puncte materiale m_l ale sistemului si forțele exterioare sistemului $\vec{F}_k^{(e)}$ care acționează asupra acestui punct material de masă m_k. Deoarece forțele interioare sunt forte de interacțiune dintre punctele materiale ale sistemului, atunci conform principiului III al Dinamicii, forța $\vec{F}_{kl}^{(i)}$ exercitată de punctul material de masă m_l asupra punctului material de masă m_k (care reprezintă acțiunea) este egală cu forța reciprocă de reacțiune $\vec{F}_{lk}^{(i)}$ a punctului material m_k asupra punctului material de masă m_l.

Matematic se scrie :

$$\vec{F}^{(i)}_{kl} = - \vec{F}^{(i)}_{lk} \quad \text{sau} \quad \vec{F}^{(i)}_{kl} + \vec{F}^{(i)}_{lk} = 0 \quad \text{unde} \quad \vec{F}^{(i)}_{kk} = 0$$

Aceste relații exprimă că: *întotdeauna forțele interioare pot interacționa numai ca perechi două câte două egale în modul dar de sens contrar.*

Pentru întreg sistemul de puncte materiale, însumând două câte două aceste forțe de interacțiune, se obține în final o rezultantă nulă:

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{k,l} \vec{F}^{(i)}_{kl} = 0$$

Forța interioară rezultantă asupra punctului material de masă *m_k* este:

$$\vec{F}^{(i)}_{k} = \sum_{l=1}^{n} \vec{F}^{i}_{kl}$$

(n - nr. total de puncte materiale ale sistemului)

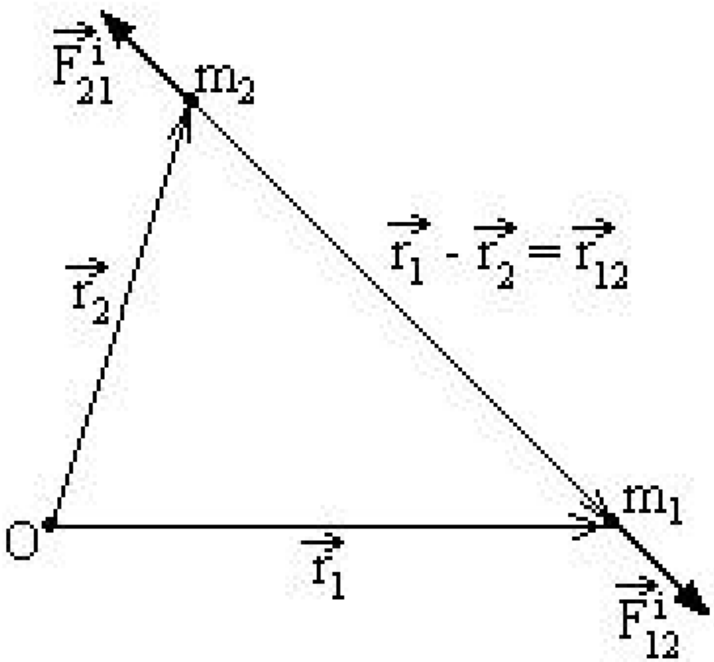
Prin însumarea acestor forțe interioare pentru punctul material m_k se obține:

$$\vec{F}^{(i)} = \sum \vec{F}_k^i = \sum_{k,l} \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0 \quad \textbf{(39)}$$

$\Rightarrow$ forțele interioare ale unui sistem de puncte materiale dau o rezultantă nulă.

Să vedem ce se întâmplă cu *momentul forțelor interioare*.

Fie două puncte materiale de masă m_1 si m_2 si polul O în raport cu care se consideră momentul iar $\vec{r}_1$ si $\vec{r}_2$, vectorii de poziție. Momentul forțelor interioare este dat de relația:



$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \sum_k \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)}\right) = \sum \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_{k1}^{(i)}\right)} \qquad \textbf{(40)}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{(i)} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{(i)} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{(i)} -$$

$$-\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{(i)} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12}^{(i)} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12}^{(i)} = 0$$

$$\left|\vec{\mathcal{M}}\right| = \left|\vec{r}_{12}\right| \cdot \left|\vec{F}_{12}^{(i)}\right| \sin\alpha = 0\,, \quad \alpha = 0\,, \quad \vec{r}_{12} \parallel \vec{F}_{12}^{(i)}$$

Teoremă

Rezultanta forțelor interioare si momentul rezultant al forțelor interioare fată de orice pol O sunt nule.

Lucru mecanic al forțelor interioare

Putem scrie :

$$\mathbf{L} = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_k + \vec{F}_{lk}^{(i)} d\vec{r}_l = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_k - \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_l = \vec{F}_{kl}^{(i)} \left(d\vec{r}_k - d\vec{r}_l \right) = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_{kl}$$

Pentru corpurile rigide (nedeformabile) $\vec{r}_{kl}$ = ct. sau $\vec{r}_{kl}^{\,2}$ = ct. de unde $2\vec{r}_{kl}\cdot d\vec{r}_{kl} = 0$ deci $d\vec{r}_{kl} = 0$ si

$$\mathbf{L} = \sum \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_{kl} = 0 \quad \textbf{(41)}$$

Concluzie : pentru corpurile rigide, lucrul mecanic al forțelor interioare este nul.

Mişcarea centrului de masă al unui sistem de puncte materiale

Fie un sistem format din puncte materiale de mase m_1, m_2, … si de viteze $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, … în raport cu un sistem de referință inerțial (R.I.). Definim *viteza centrului de masă* ca fiind :

$$v_{cM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

La statică s-a definit *vectorul de poziție al centrului de masă* (C.M.) astfel:

$$\vec{r}_{cM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Prin derivare în raport cu timpul se obține:

$$\frac{d\vec{r}_{cM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i = \vec{v}_{cM}$$

Cum impulsul $\vec{p}_i$ = m·$\vec{v}_i$ rezultã :

$$\vec{v}_{cM} = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{M} \quad \text{sau} \quad \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{cM} \qquad \textbf{(42)}$$

unde $\vec{p} = \Sigma\vec{p}_i$ este impulsul total al sistemului.

Relația $\vec{p} = M\cdot\vec{v}_{cM}$ arată că impulsul sistemului este acelaşi ca si cum toate masele punctelor materiale se găsesc situate in centrul de masă care se deplasează cu viteza v_{cM} (se mai numeşte viteza sistemului).

Deoarece un corp solid este alcătuit dintr-un sistem de puncte materiale se poate spune că deplasarea corpului solid se face cu viteza centrului de masă, $\vec{v}_{cM}$, adică viteza corpului.

Într-un <u>sistem izolat</u>, conform principiului de conservare al impulsului, $\vec{p}$ = ct. Referitor la centrul de masă se spune că: *centrul de masă al unui sistem izolat se deplasează cu o viteză constantă în tot sistemul.*

<u>Sistemul neizolat</u>. Se consideră un sistem S compus din puncte materiale care sunt în interacțiune cu toate punctele materiale care sunt în interiorul sistemului S si care formează sistemul S'. (Ex. S - sistemul solar si S' - restul universului)

Notatii:

- punctele materiale ale sistemului S $\rightarrow$i
- punctele materiale ale sistemului S' $\rightarrow$ j

Principiul conservării impulsului pentru un sistem izolat (S + S') este:

$$\vec{p} = \underbrace{\sum \vec{p}_i}_{sist.S} + \underbrace{\sum \vec{p}_j}_{sist.S'} = ct. \quad \text{sau} \quad \vec{p} = \vec{p}_S + \vec{p}_{S'} = ct.$$

Aceasta înseamnă că orice variatie a impulsului din sistemul S este însotită de o variatie egală si opusă în sistemul S' a impulsului. Matematic , $\Delta\vec{p}_S = -\Delta\vec{p}_{S'}$. Deci interactiunea dintre cele două sisteme S si S' este descrisă ca o variatie de impuls. Prin derivare se obtine :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_S}{dt} + \frac{d\vec{p}_{S'}}{dt} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d\vec{p}_S}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{S'}}{dt}$$

unde $\frac{d\vec{p}_{S'}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$ care reprezintă forta exterioară cu care sistemul S' actionează asupra sistemului S.

Cum viteza centrului de masă al sistemului S este $\vec{v}_{cM} = \frac{\vec{p}_S}{M}$ rezultă

$$\vec{F}^{(e)} = M \frac{d\vec{v}_{cM}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{cM} \qquad \textbf{(43)}$$

Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se deplasează ca si un singur punct material de masă egală cu masa totală a sistemului si supus unei forte exterioare sistemului.

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale

Am vãzut cã momentul cinetic al unui punct material este: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ iar relatia dintre momentul cinetic $\vec{L}$ si momentul fortei $\vec{\mathcal{M}}$ este:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \quad \textbf{sau} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}^{ex}$$

Derivata în functie de timp a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct oarecare este egalã cu momentul total în raport cu acelasi punct al fortelor exterioare $\vec{F}^{(e)}$ *care actioneazã asupra sistemului de puncte materiale.*

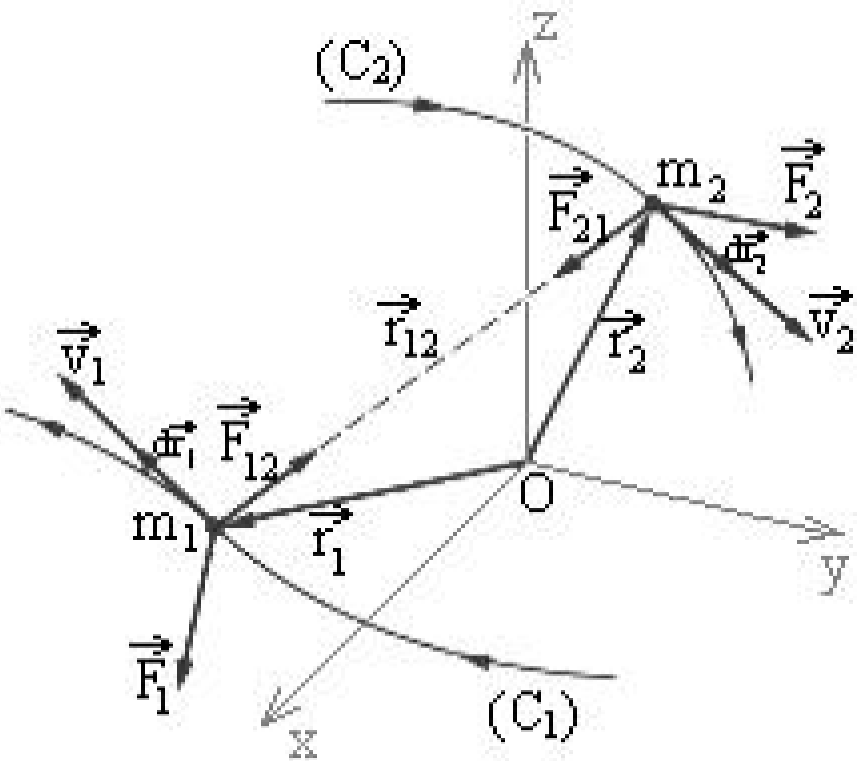
Dacã $\sum \vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}^{(e)} = 0$

si $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{ct.} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = \text{ct.}$

Legea conservãrii momentului cinetic: *momentul cinetic total al unui sistem izolat sau pentru care momentul fortei este nul (* $\vec{\mathcal{M}}^{(e)} = 0$ *) este constant în mãrime si directie.*

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale

Fie un sistem alcătuit din două puncte materiale de mase m_1 si m_2 supuse la fortele exterioare $\vec{F}_1$ si $\vec{F}_2$ si la fortele interioare $\vec{F}_{12}$ si $\vec{F}_{21}$. La un moment dat, aceste puncte materiale se găsesc situate în pozitiile din Figura si se pot deplasa cu vitezele $\vec{v}_1$ si $\vec{v}_2$ după traiectoriile C_1 si C_2.



Ecuatiile de miscare pentru fiecare punct material sunt :

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

Într-un interval mic dt, presupunem că punctul material se deplasează cu $d\vec{r}$ si de aceea se înmulteste scalar fiecare ecuatie de miscare cu $d\vec{r}$ si se obtine:

$$m_1\vec{a}_1 d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} d\vec{r}_1$$
$$m_2\vec{a}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} d\vec{r}_2$$

si stiind cã $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, prin adunare ecuatiilor se obtine :

$$m_1\vec{a}_1 d\vec{r}_1 \quad + \quad m_2\vec{a}_2 d\vec{r}_2 \quad = \quad \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12}\left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2\right)$$

Dar $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ si $\vec{a} \cdot d\vec{r} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = d\vec{v}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = v \cdot dv$ iar $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = d\vec{r}_{12}$. Aplicate la expresia de mai sus , se obtine:

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}$$

Prin integrare rezultã:

$$\underbrace{m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} v_2 dv_2}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_{A}^{B} \left(\vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2\right) + \int \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}}_{\mathrm{II}}$$

Partea din stãnga a egalitatii(I) se scrie :

$$\text{I}: \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \left(\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right) = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2\right) = E_c - E_{c0}$$

iar partea din dreapta a egalitãtii (II) se scrie :

$$W_{ext} = \int_A^B \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2$$ este lucru mecanic efectuat de cãtre fortele exterioare.

II :

$$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}$$ este lucru mecanic efectuat de cãtre fortele interioare.

Deci ,in final :

$$E_c - E_{c0} = W_{ext} + W_{int} \quad \textbf{(44)}$$

Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu lucru mecanic efectuat asupra sistemului de forte exterioare si forte interioare.

Conservarea energiei sistemului de puncte materiale

Presupunem cã fortele interioare derivã dintr-un potential si deci existã o functie $E_{p.12}$, dependentã de coordonatele celor douã puncte materiale 1 si 2 astfel:

$$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12} = E_{p120} - E_{p12}$$

unde E_{p12} este valoarea energiei potentiale la timpul t si E_{p120} este energia potentialã la timpul t_0. Introdusã în relatia **(44)** , se obtine :

$$E_c - E_{c0} = W_{ext} + E_{p120} - E_{p12}$$

sau

$$(E_c + E_{p12}) - (E_c + E_{p12})_0 = W_{ext}$$

Notãm cu :

$$U = E_c + E_{p12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{p12} \quad \textbf{(45)}$$

se obține *energia proprie* a sistemului de puncte materiale.

In general, pentru sistemul de puncte materiale:

$$U = E_c + E_{p\ int} = \sum_{\substack{toate\\ p.m.}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\substack{toate\\ perechile}} E_{pij} \quad \text{unde}$$

$$E_c = \sum_{\substack{toate\\ p.m.}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \cdots \quad \text{iar}$$

$$E_{p\ int} = \sum_{\substack{toate\\ perechile}} E_{pij} = E_{p12} + E_{p13} + \cdots E_{p23} + \cdots$$

În concluzie

$$U - U_0 = W_{ext}$$

Variatia energiei proprii a unui sistem de puncte materiale este egalã cu lucru mecanic efectuat asupra sistemului de cãtre fortele exterioare.

Pentru sistemul izolat pentru care $W_{ext} = 0$, $U - U_0 = 0$, $U = U_0$, energia proprie a sistemului de puncte materiale izolate rãmâne constantã (se conservã).