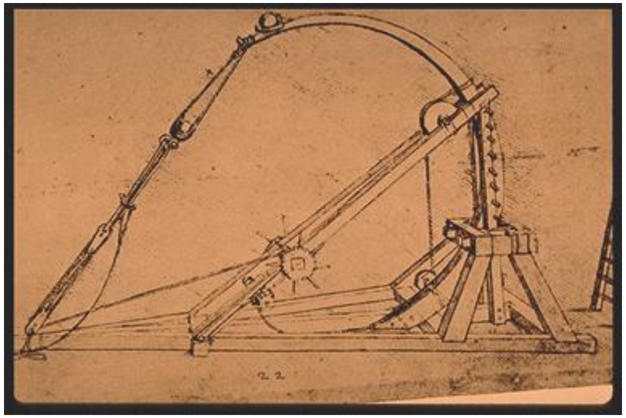


CURS 12
MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

DINAMICA

Obiectul dinamicii îl constituie studiul mişcării mecanice a punctului material, a sistemelor de puncte materiale, a solidului rigid, respectiv a sistemelor de solide rigide sub acțiunea forțelor aplicate.

Problemele de dinamica punctului material liber pot fi clasificate în:
– Probleme directe: fiind date forțele, să se găsească mişcarea punctului;
– Probleme indirecte: presupunând mişcarea punctului material, să se determine forțele care provoacă această mişcare.

Principiile dinamicii

Experimental s-a demonstrat că un corp aflat în repaus față de Pământ rămâne tot în repaus atâta timp cât asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i modifice această stare.

Această proprietate a corpului de a-şi menține starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, fără acțiunea forțelor exterioare poartă denumirea de *inerție*.

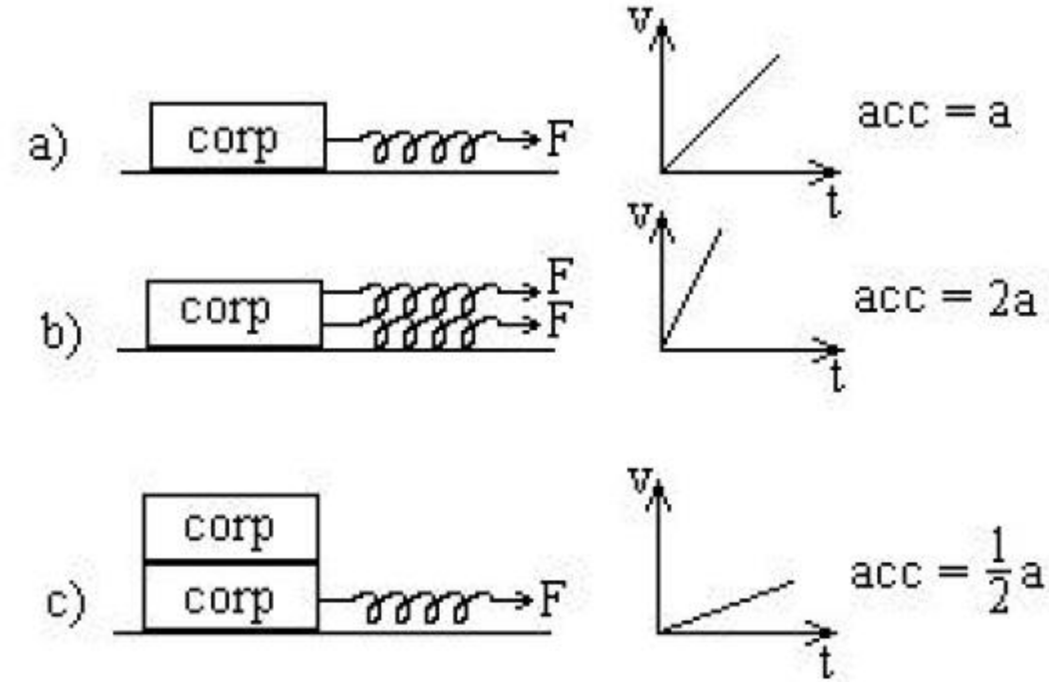
Corpurile *inerte* sunt corpurile care nu-şi pot modifica de la sine starea lor de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă. În *virtutea inerției* corpurile se mişcă rectiliniu uniform fără acțiuni exterioare, iar *datorită inerției* corpurile tind să-şi mențină această stare de mişcare reacționând la acțiunile exterioare.

Cu aceste considerente asupra corpurilor aflate în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă se poate formula *principiul inerției* sau legea I a dinamicii.

Legea I-a a dinamicii

Un punct material (corp) îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă atâta timp cât asupra sa nu acționează alte corpuri care să îi modifice această stare.

Pentru legea a II-a a dinamicii se pleacă de la următorul experiment:



<u>Observații</u>

a) Viteza variază liniar cu timpul. Accelerația este proporțională cu forța *F* si este constantă.

b) Viteza creste mai repede. Accelerația se dublează dar si forța se multiplică, astfel că în final accelerația *a* este proporțională cu forța totală. Spunem că *F = ka*.

c) Viteza scade cu timpul. Aceeaşi forță *F* care acționează asupra suprafeței a două corpuri dă naştere la o accelerație *a/2*.

Din experiențele de mai sus rezultă că $F = ma = m\frac{dv}{dt}$

sau vectorial $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

unde *m* este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material denumit *masă inertă* sau *inerțială*.

Legea a II-a a dinamicii **este dată de relația** $\vec{F} = m\vec{a}$ **adică: accelerația care imprimă corpului mişcarea este direct proporțională cu forța aplicată când masa este constantă.**

Expresia $\vec{F} = m\vec{a}$ **reprezintă o definiție dinamică a forței si manifestă caracterul activ al masei.**

Greutatea si masa

Greutatea unui corp reprezintă forța cu care corpul este atras de Pământ.
***Dinamic*, greutatea se manifestă prin căderea corpului lăsat liber.**
***Static*, greutatea se manifestă prin forța cu care corpul apasă pe un plan orizontal. Experimental s-a constatat că în vid, unde nu acționează forța de greutate, toate corpurile cad cu aceeaşi accelerație *g* independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpurilor.**

Analog cu legea a II - a, $\vec{F} = m\overline{a}$ **, pentru greutate,**

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

Deosebirea dintre greutatea si masa unui corp

Greutatea **este o forță de atracție exercitată de Pământ; variază cu altitudinea, latitudinea, fiind dependentă de câmpul gravitațional. Ea se măsoară cu dinamometrul si este o mărime vectorială.**

Masa **este o mărime scalară, o caracteristică internă a corpului, independentă de altitudine si latitudine. Masa se măsoară cu balanța. Alături de inerție, o altă proprietate a masei este aceea că poate atrage alte corpuri sau să fie atrasă de alte corpuri. Această proprietate conferă masei calitatea de masă grea,** ***gravifică*** **(gravitațională) si reprezintă o măsura a interacțiunii corpului cu câmpul gravitațional.**

Deci masa, mărime unică prezintă două proprietăți: inerția si gravitația, adică masa inertă este egală cu masa gravifică.

Static**, se manifestă masa gravifică, iar** ***dinamic*** **masa inertă. Ambele mase se măsoară cu balanța.**

Legea a III-a*. *Principiul acțiunii si reacțiunii

Experimental, s-a constat că acțiunea unui corp asupra altuia dă naştere simultan la o reacțiune a celui din urmă asupra primului.

***⇒ acțiunile reciproce dintre două corpuri sunt întotdeauna egale în modul si dirijate în sensuri contrare*.**

Legea a IV-a. Principiul independentei acțiunii forței

Să considerăm două forțe $\overline{F_1}$ si $\overline{F_2}$ care acționează simultan asupra aceluiaşi punct A, de masă *m*.
Aceste forte produc accelerațiile $\overline{a_1}$ si $\overline{a_2}$ după relațiile $\overline{F_1}=m\overline{a_1}$ si $\overline{F_2}=m\overline{a_2}$.
Putem scrie $\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$, cu $\overline{a}$ accelerația rezultantă. Se multiplică ambii membrii ai ecuației cu numărul *m* rezultă: $m\overline{a} = m\overline{a_1} + m\overline{a_2}$ care reprezintă $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$, adică asupra punctului material acționează forța rezultantă $\overline{F}$ care rezultă din însumarea geometrică a vectorilor $\overline{F_1}$ şi $\overline{F_2}$ şi care produc separat efectele lor, independent de existenta celeilalte forțe.

Problemele pot fi rezolvate aplicând ecuația fundamentală a dinamicii:

$$m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}) \qquad \textbf{(1)}$$

unde:

– *m* este masa punctului material;

– $\bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}$ **vectorul de poziție, vectorul viteză şi vectorul accelerație;**

– $\bar{a}$ **accelerația punctului material;**

– $\bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}})$ **forța care acționează asupra punctului material.**

Relația (1) poate fi proiectată pe axele unui sistem de coordonate. Alegerea sistemului de coordonate: carteziene, cilindrice, sferice etc., se face în funcție de forma vectorului $\overline{F}$.

Într-un sistem de coordonate carteziene:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad \textbf{(2)}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Într-un sistem de coordonate cilindrice:

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2}-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F_r$$

$$m\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]=F_\theta \qquad \textbf{(3)}$$

$$m\frac{d^2 z}{dt^2}=F_z$$

în care F_r ,F_θ ,F_z reprezintă proiecțiile vectorului $\bar{F}$ pe axele de coordonate, iar ecuațiile parametrice sunt:

r = r(*t*) ; θ = θ(*t*) ; z = z(*t*)

Într-un sistem de coordonate sferice:

$$
\begin{aligned}
&m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi\right) = F_r \\
&m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} + r\dot{\theta}^2 \sin\varphi \cos\varphi\right) = F_\theta \\
&m\left(2\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + r\ddot{\theta}\cos\varphi\right) = F_\varphi
\end{aligned}
\tag{4}
$$

în care F_r, F_θ, F_φ reprezintă proiecțiile vectorului $\bar{F}$ pe axele de coordonate, iar ecuațiile parametrice sunt:

$$r = r(t)\ ;\ \theta = \theta(t)\ ;\ \varphi = \varphi(t)$$

Într-un sistem de coordonate intrinseci (naturale):

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_\nu \qquad \textbf{(5)}$$

$$O = F_\beta$$

în care $F_\tau, F_\upsilon, F_\beta$ reprezintă proiecțiile vectorului $\bar{F}$ după direcția tangentei, normalei principale şi respectiv binormalei.

Putem concluziona că studiul mişcării unui punct material conduce la integrarea unui sistem de trei ecuații diferențiale de ordinul doi, cu soluții de forma:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, \ldots, C_6) \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

Constantele $C_1, C_2, \ldots, C_6$ se obțin din condițiile la limită sau inițiale ale mişcării:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0 \\ &\dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(7)}$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{aligned}
C_1 &= f_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\
C_2 &= f_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_6 &= f_6(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})
\end{aligned} \qquad \textbf{(8)}
$$

Funcțiile din relațiile (8) reprezintă integralele prime ale sistemului de ecuații diferențiale (2). Stabilirea integralelor prime este o problemă dificilă. Rezolvarea acestei probleme se face cu ajutorul unor teoreme şi principii deduse prin aplicarea principiilor fundamentale ale mecanicii şi a unor noțiuni fundamentale specifice dinamicii.