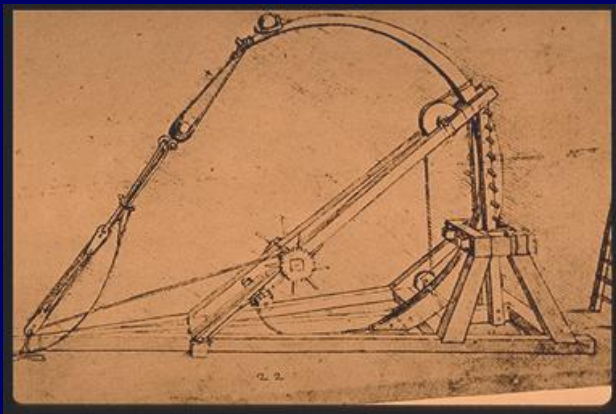




CURS 10+11

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Conf. Dr. Ing. Viorel Ungureanu

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

In cadrul *cinematicii punctului material* s-a arătat ca a studia mișcarea unui punct înseamnă a determina la orice moment t de timp, poziția $r(t)$, viteza $v(t)$ și accelerația $a(t)$ ale acestuia.

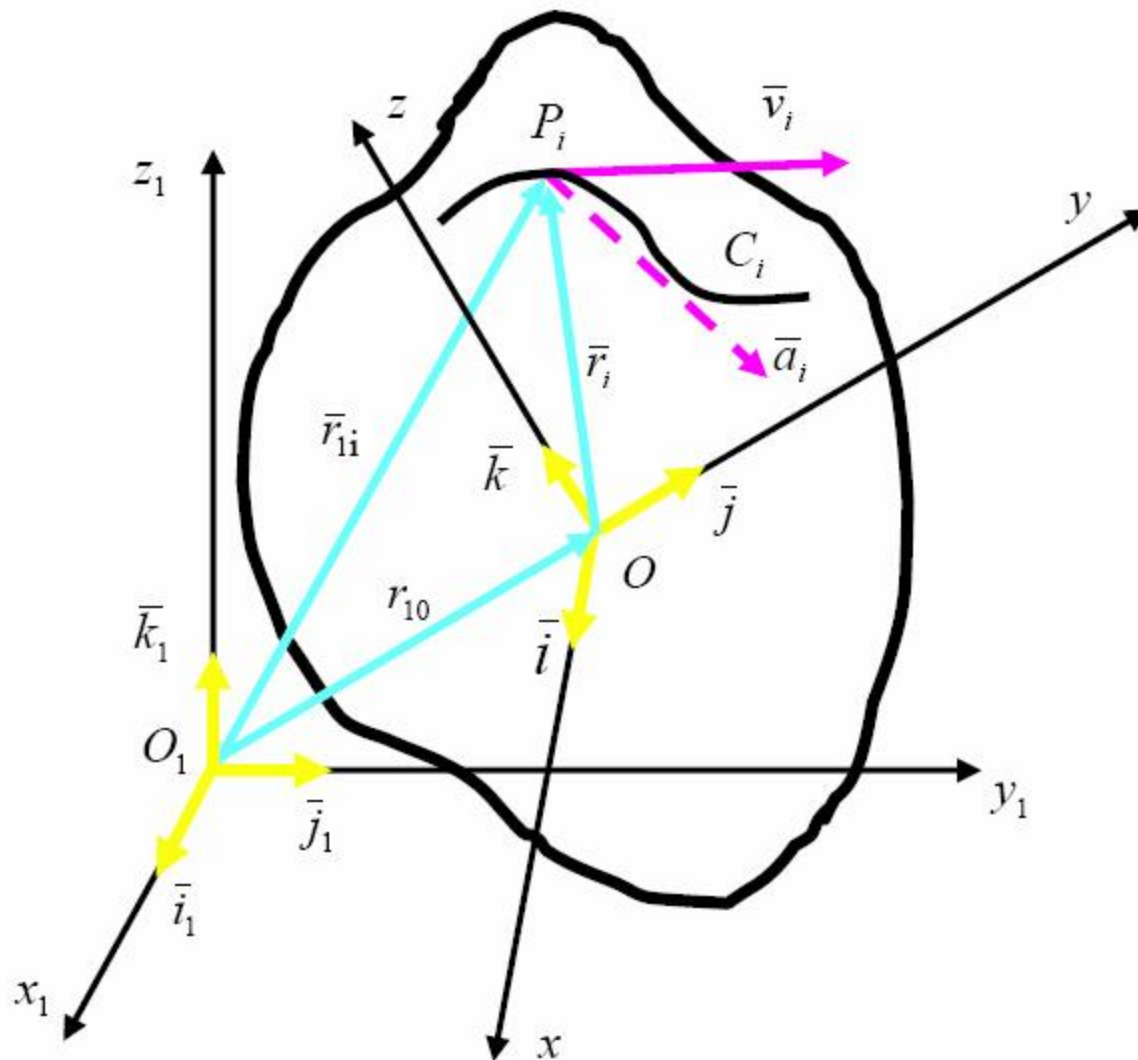
In cadrul *cinematicii solidului rigid* problema se pune analog, cu deosebirea ca este vorba de infinitatea punctelor materiale care alcătuiesc solidul.

Mișcarea generală a solidului rigid

Cunoscându-se mișcarea unui solid rigid în raport cu un sistem de referință fix – $O_1x_1y_1z_1$, se cere să se determine expresiile generale ale vectorului de poziție, vitezei și accelerației unui punct oarecare P_i al acestuia.

Pentru a cunoaște poziția solidului rigid, respectiv a sistemului de referință solidar cu rigidul este necesar să cunoaștem în orice moment de timp vectorul de poziție $\underline{r}_{10}$ și poziția versorilor $\underline{k}, \underline{j}, \underline{i}$.

Punctul P_i nu își schimbă poziția relativă în raport cu sistemul $Oxyz$, deci coordonatele lui rămân constante în timp.



Mișcarea generală a solidului rigid

$$\bar{r}_{10}(t) = x_{10}(t)\bar{i}_1 + y_{10}(t)\bar{j}_1 + z_{10}(t)\bar{k}_1$$

$$\bar{i} = \bar{i}(t) = i_x\bar{i}_1 + i_y\bar{j}_1 + i_z\bar{k}_1$$

$$\bar{j} = \bar{j}(t) = j_x\bar{i}_1 + j_y\bar{j}_1 + j_z\bar{k}_1$$

$$\bar{k} = \bar{k}(t) = k_x\bar{i}_1 + k_y\bar{j}_1 + k_z\bar{k}_1$$

(1)

În relațiile (1) apar 12 parametri scalari de poziție. Ținând cont de relațiile (2), vom avea $12 - 6 = 6$ parametri scalari de poziție a solidului rigid. Putem concluziona că solidul rigid în mișcare generală are șase grade de libertate.

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1 \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1 \quad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 0 \quad \bar{j} \cdot \bar{k} = 0 \quad \bar{k} \cdot \bar{i} = 0$$

(2)

Versorii sunt vectori unitari și doi câte doi perpendiculari între ei

Între vectorul de poziție $\bar{r}_{1i}$ al unui punct din solidul rigid, definit față de sistemul fix, vectorul de poziție $\bar{r}_i$ al punctului față de un sistem mobil (legat invariabil de solid) și vectorul de poziție $\bar{r}_{10}$ al originii sistemului mobil, față de sistemul fix, există relațiile:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_i + \bar{r}_{10} \quad (3)$$

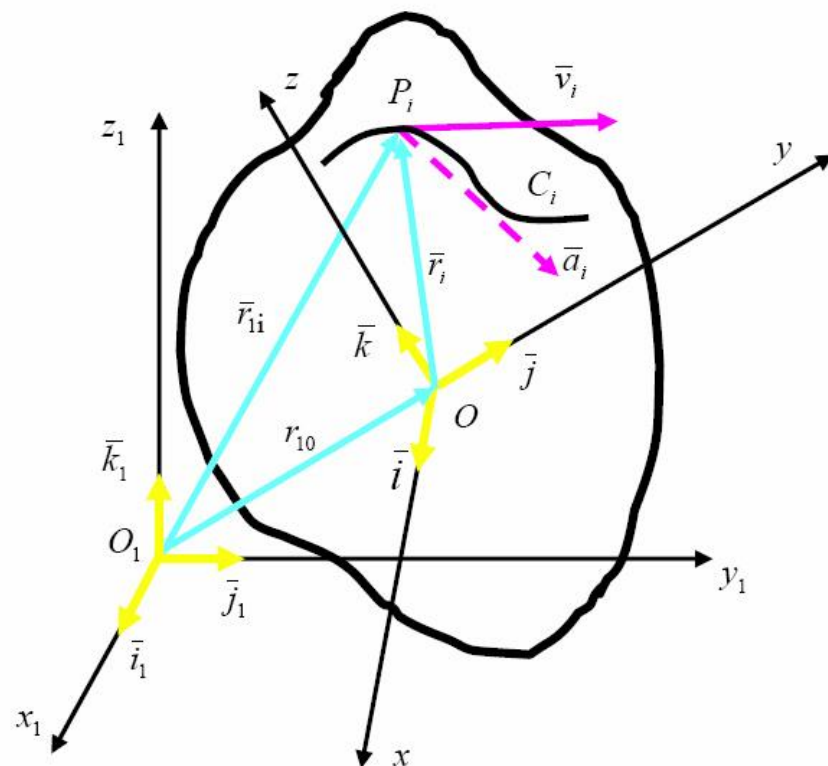
unde

$$\bar{r}_{1i} = x_{1i}\bar{i} + y_{1i}\bar{j} + z_{1i}\bar{k}$$

$$\bar{r}_{10} = x_{10}\bar{i} + y_{10}\bar{j} + z_{10}\bar{k}$$

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$$

(4)



Proiectăm relația (1) pe axele sistemului de coordonate fix $O_1x_1y_1z_1$ și obținem:

$$\begin{aligned}x_{1i} &= x_{10} + x_i \cos(\bar{i}, \bar{i}_1) + y_i \cos(\bar{j}, \bar{i}_1) + z_i \cos(\bar{k}, \bar{i}_1) \\y_{1i} &= y_{10} + x_i \cos(\bar{i}, \bar{j}_1) + y_i \cos(\bar{j}, \bar{j}_1) + z_i \cos(\bar{k}, \bar{j}_1) \\z_{1i} &= z_{10} + x_i \cos(\bar{i}, \bar{k}_1) + y_i \cos(\bar{j}, \bar{k}_1) + z_i \cos(\bar{k}, \bar{k}_1)\end{aligned} \quad (5)$$

Relațiile (5) reprezintă *ecuațiile parametrice ale traiectoriei* punctelor P_i .

Prin derivarea relației (3) în raport cu timpul obținem:

$$\frac{d\bar{r}_{1i}}{dt} = \bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} + \frac{d\bar{r}_{10}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i + \bar{v}_0 \quad (6)$$

Deoarece: $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad (7)$

Relația (7), cunoscută sub denumirea de **relația lui Euler** reprezintă **distribuția de viteze** a punctelor unui solid rigid.

Prin proiectarea relației (7) pe axele sistemului de referință Oxyz:

$$\bar{v}_i = v_{ix}\bar{i} + v_{iy}\bar{j} + v_{iz}\bar{k}$$

$$\bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + v_{0z}\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}$$

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}$$

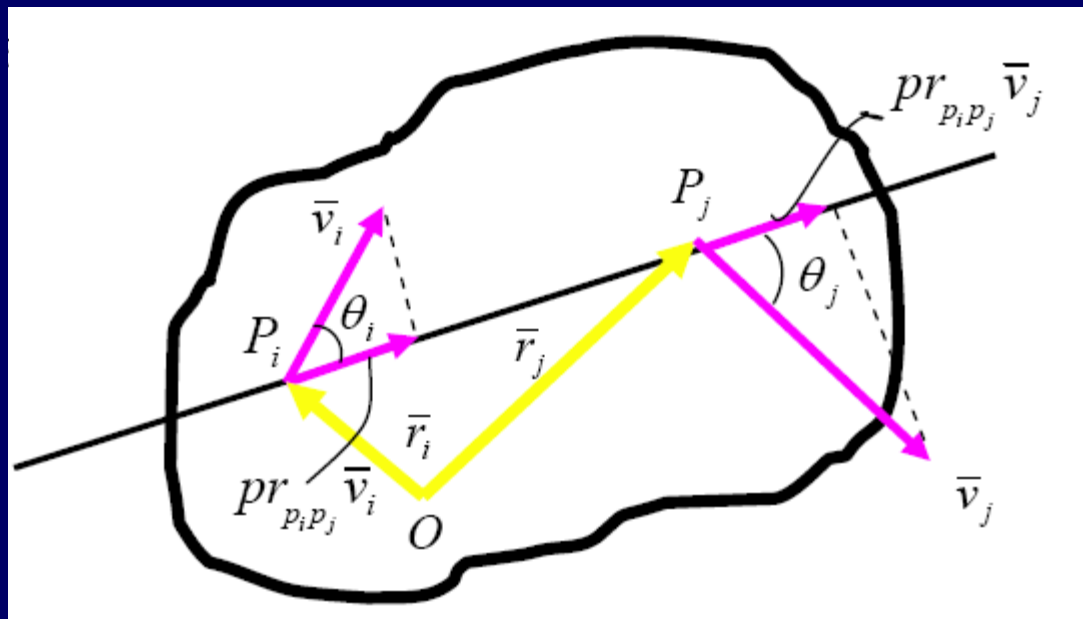
rezultă componentele vectorului $\bar{v}_i$ în sistemul Oxyz:

$$v_{ix} = v_{0x} + z_i\omega_y - y_i\omega_z$$

$$v_{iy} = v_{0y} + x_i\omega_z - z_i\omega_x \quad (8)$$

$$v_{iz} = v_{0z} + y_i\omega_x - x_i\omega_y$$

Din relația (7) se observă că proiecțiile a două puncte ale solidului rigid pe direcțiile determinate de acestea sunt egale între ele. Fie punctele P_i , respectiv P_j ale solidului rigid pentru care se aplică relația lui Euler.



$$P_i : \bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$$

$$P_j : \bar{v}_j = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_j$$

$$\Rightarrow pr_{P_i P_j} \bar{v}_i = pr_{P_i P_j} \bar{v}_j$$

Pentru obținerea *formulei lui Euler pentru distribuția de accelerații* se derivează relația (7):

$$\bar{a}_i = \dot{\bar{v}}_i = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_i \quad (9)$$

unde:

$$\dot{\bar{v}}_0 = \bar{a}_0$$

accelerația punctului O;

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$$

accelerația unghiulară a solidului rigid, respectiv a sistemului mobil Oxyz;

Se stie că

$$\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$$

și

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_i = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \quad (10)$$

Prin proiectarea relației (10) pe axele de coordonate se obține:

$$\bar{a}_i = a_{1x}\bar{i} + a_{1y}\bar{j} + a_{1z}\bar{k}$$

$$\bar{a}_0 = a_{0x}\bar{i} + a_{0y}\bar{j} + a_{0z}\bar{k}$$

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ z_i\omega_y - y_i\omega_z & x_i\omega_z - z_i\omega_x & y_i\omega_x - x_i\omega_y \end{vmatrix}$$

În final se obțin componenetele vectorului accelerație a punctelor P_i ale sistemului rigid, în raport cu sistemul de referință mobil $Oxyz$:

$$\begin{aligned}a_{ix} &= a_{0x} + z_i \varepsilon_y - y_i \varepsilon_z + \omega_y (y_i \omega_x - x_i \omega_y) - \omega_z (x_i \omega_z - z_i \omega_x) \\a_{iy} &= a_{0y} + x_i \varepsilon_z - z_i \varepsilon_x + \omega_z (z_i \omega_y - y_i \omega_z) - \omega_x (y_i \omega_x - x_i \omega_y) \\a_{iz} &= a_{0z} + y_i \varepsilon_x - x_i \varepsilon_y + \omega_x (x_i \omega_z - z_i \omega_x) - \omega_y (z_i \omega_y - y_i \omega_z)\end{aligned}$$

(11)

Solidul rigid poate executa o mișcare generală sau o mișcare particulară.

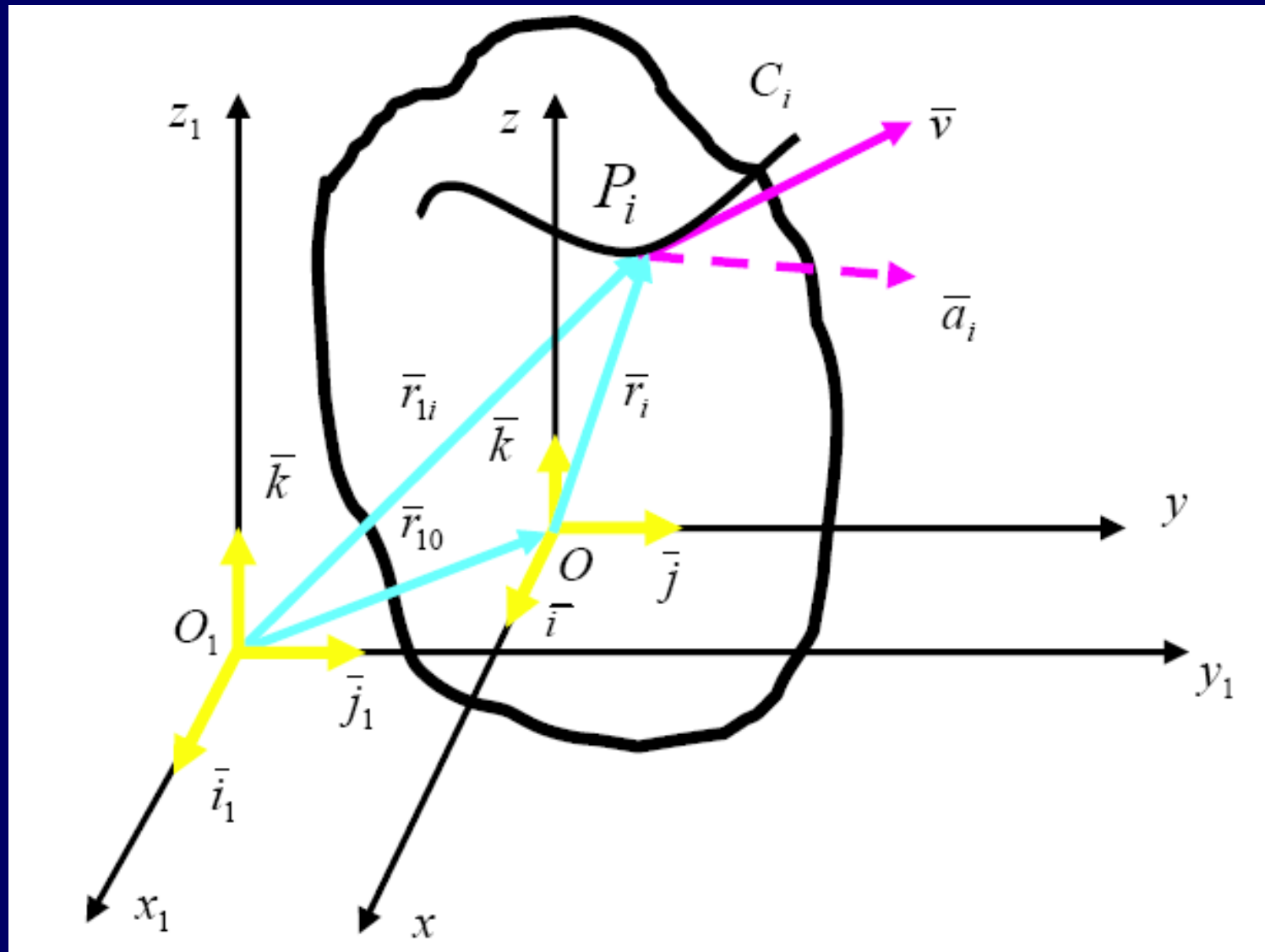
Există două mișcări simple ale solidului rigid: mișcarea de translație și mișcarea de rotație în jurul unui ax fix.

Celelalte mișcări particulare ale solidului rigid: mișcarea de roto-translație, mișcarea plan-paralelă, mișcarea de rotație în jurul unui punct fix se obțin prin combinarea celor două mișcări simple.

Mișcarea de translație a solidului rigid

Un solid rigid execută o mișcare de translație dacă în tot timpul mișcării o dreaptă solidară cu rigidul rămâne paralelă cu o dreaptă fixă din spațiu sau cu ea însăși. Pentru studiul mișcării de translație alegem două sisteme de referință: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și unul mobil $Oxyz$ a cărui axe rămân tot timpul paralele cu axele sistemului fix.

Mișcarea de translație a solidului rigid



$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_{10} + \bar{r}_i$$

$$\bar{r}_{10} = x_{10}\bar{i}_1 + y_{10}\bar{j}_1 + z_{10}\bar{k}_1$$

$$\bar{i} = \bar{i}_1$$

$$\bar{j} = \bar{j}_1$$

$$\bar{k} = \bar{k}_1$$

(12)

Din relațiile (12) rezultă că solidul rigid aflat în mișcare de translație posedă trei grade de libertate întrucât poziția acestuia este determinată prin coordonatele x_{10} , y_{10} respectiv z_{10} .

Derivăm prima relație din (12) și obținem:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_{1i}}{dt} = \bar{r}_{1i} + \bar{r}_i = \bar{v}_0 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i \quad (13)$$

Deoarece: $x_i = y_i = z_i = ct$ și $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_0 \quad (14)$$

adica, vitezele tuturor punctelor solidului rigid la un moment oarecare t sunt egale între ele.

Prin derivarea relației (14) rezultă:

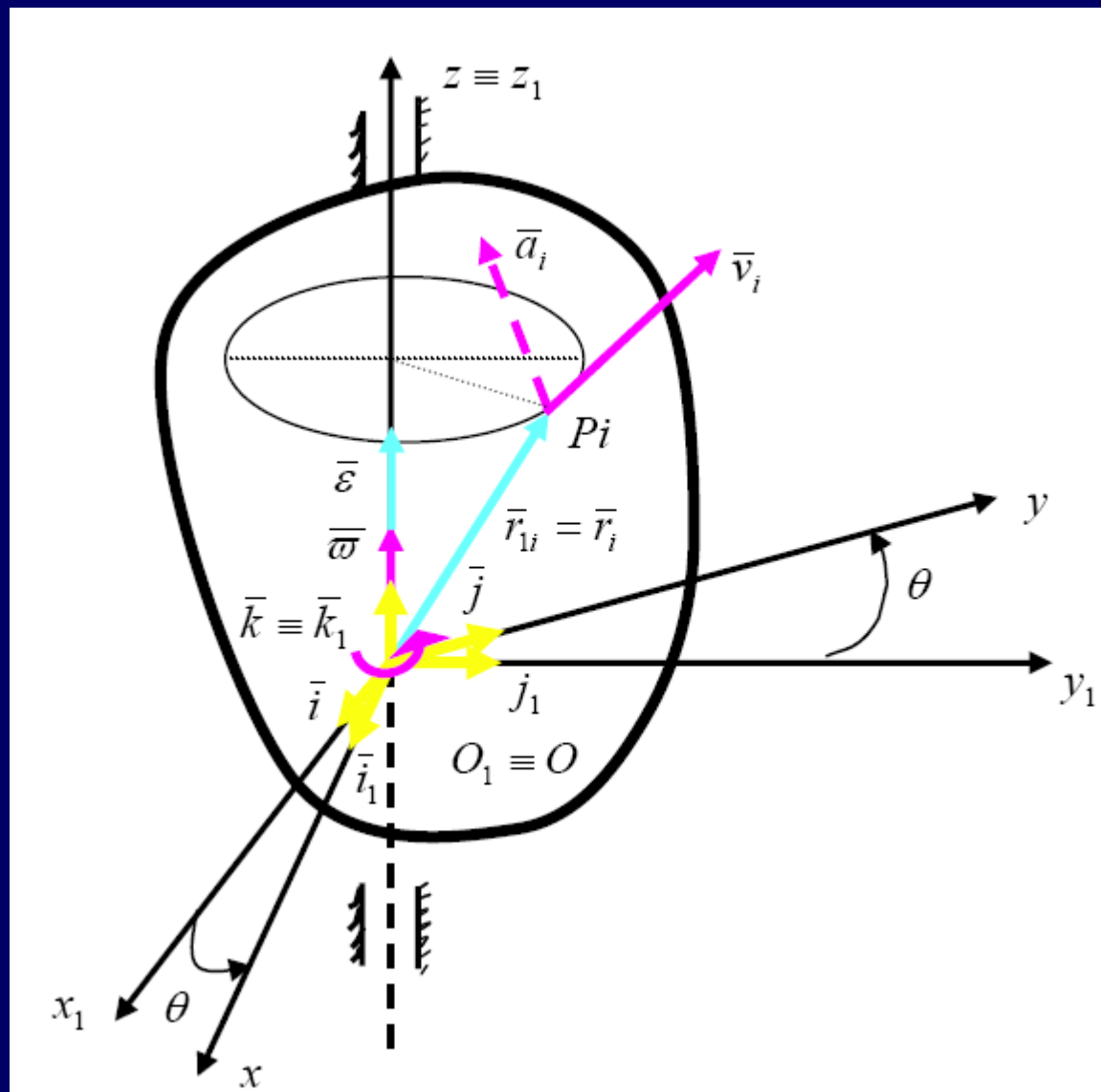
$$\Rightarrow \bar{a}_i = \bar{a}_o \quad (15)$$

accelearațiile tuturor punctelor solidului rigid în mișcarea de translație, la un moment oarecare t , sunt egale între ele.

Mișcarea de rotație a solidului rigid cu axă fixă

Un solid rigid execută o mișcare de rotație cu axă fixă dacă în tot timpul mișcării sale două puncte ale sale rămân suprapuse cu două puncte fixe din spațiu. Pentru studiul acestei mișcări axa Oz a sistemului mobil coincide cu axa O_1z_1 a sistemului fix și în plus, originile celor două sisteme coincid $O_1 \equiv O$.

Mișcarea de rotație a solidului rigid cu axă fixă



Solidul rigid în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe Oz are un singur grad de libertate întrucât poziția acestuia este determinată prin unghiul θ format de planul fix $x_1O_1y_1$ și planul mobil xOy . Ambele plane conțin axa de rotație.

Poziția punctelor P_i este dată de relația:

$$\bar{r}_{1i} = \bar{r}_i \quad (16)$$

adică:

$$x_{1i}^2 + y_{1i}^2 = x_i^2 + y_i^2 = d_i^2 \quad (17)$$

Ecuția (17) arată că *traectoria* punctelor P_i este un cerc cu centrul plasat pe axa de rotație.

Relațiile: $\overline{\omega} = \dot{\overline{\theta}}\overline{k} = \omega\overline{k}$ și $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\overline{\theta}}\overline{k}$ arată că vectorii $\overline{\omega}$ și $\overline{\varepsilon}$ au ca suport axa de rotație.

Derivând ecuația (16) rezultă:

$$\overline{v}_i = \frac{d\overline{r}_{1i}}{dt} = \frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{r}_i$$

Deoarece: $\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial t} = 0$ și $x_i = y_i = z_i = ct$

$$\Rightarrow \overline{v}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i \quad (18)$$

relație ce exprimă **distribuția câmpului vitezelor** ale punctelor unui solid rigid aflat în mișcare de rotație cu axă fixă.

Proiectând relația (18) pe axele sistemului de referință mobil Oxyz, rezultă:

$$\bar{v}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = -\omega y_i \bar{i} + \omega x_i \bar{j} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} v_{ix} &= -\omega y_i \\ v_{iy} &= \omega x_i \\ v_{iz} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Modulul vitezei este:

$$|\bar{v}_i| = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2} = \omega \sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \omega d_i \quad (21)$$

Pentru determinarea accelerațiilor punctelor P_i derivăm relația (18):

$$\bar{a}_i = \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_i = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \quad (22)$$

Prin proiectarea relația (22) pe axele sistemului de referință mobil:

$$\bar{a}_i = a_{ix}\bar{i} + a_{iy}\bar{j} + a_{iz}\bar{k}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k}$$

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k}$$

$$\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$$

$\Rightarrow$

$$a_{ix} = -\varepsilon y_i - \omega^2 x_i$$

$$a_{iy} = -\varepsilon x_i - \omega^2 y_i \quad (23)$$

$$a_{iz} = 0$$

unde:

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = -y_i \varepsilon \bar{i} + x_i \varepsilon \bar{j}$$

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = -y_i \omega \bar{i} + x_i \omega \bar{j}$$

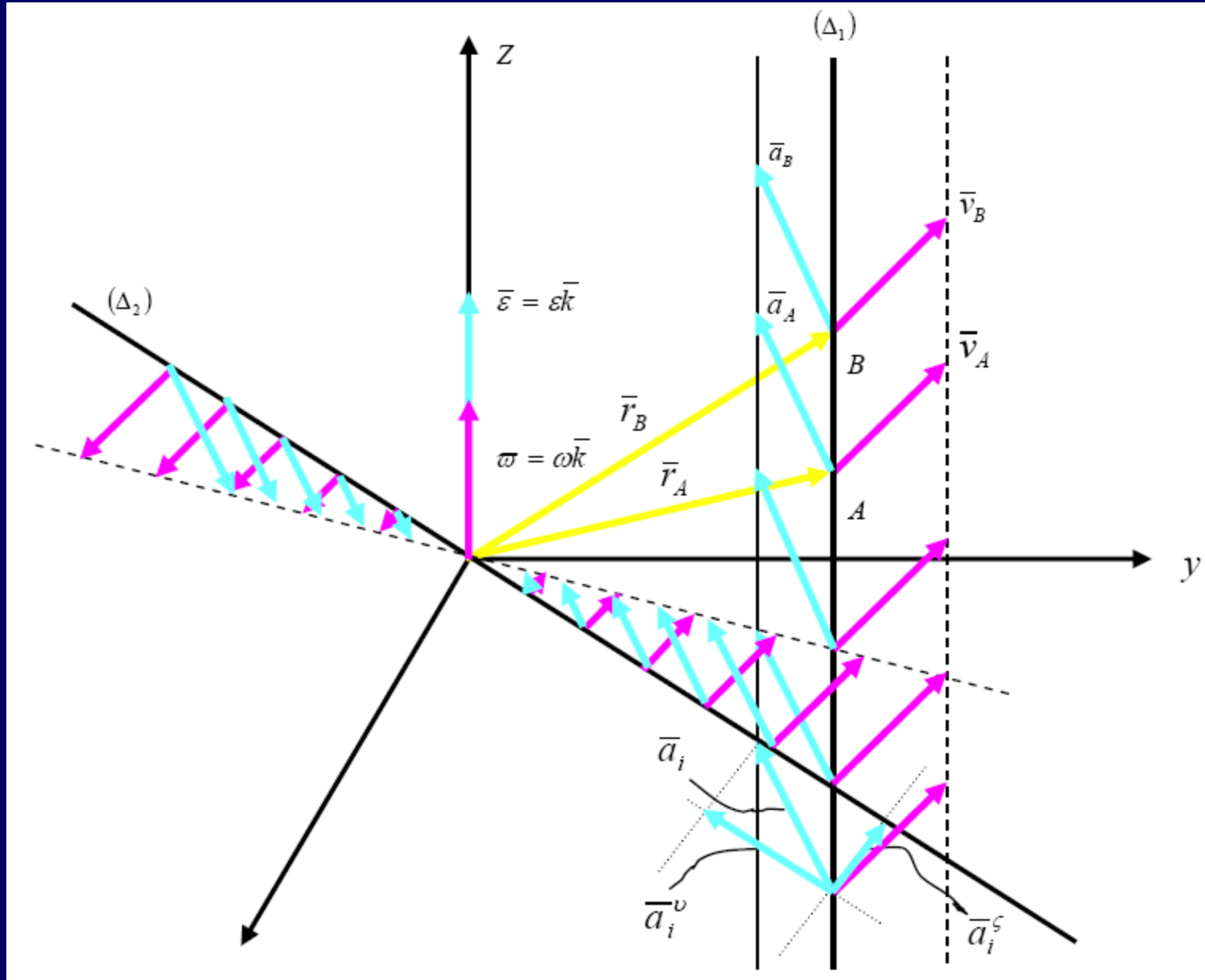
$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ y_i \omega & x_i \omega & 0 \end{vmatrix} = -x_i \omega^2 \bar{i} + y_i \omega^2 \bar{j}$$

Modulul accelerației este:

$$\begin{aligned} |\bar{a}_i| &= \sqrt{a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2} = \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 (y_i^2 + x_i^2) + \omega^4 (y_i^2 + x_i^2)} = d_i \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{aligned} \quad (24)$$

Proprietățile distribuției de viteze și accelerații:

- vitezele (accelerațiile) punctelor rigidului ce aparțin axei de rotație sunt nule;
- vitezele (accelerațiile) punctelor rigidului în mișcarea de rotație cu axă fixă sunt plasate în plan perpendicular pe axa de rotație ($v_{iz}=0$, $a_{iz}=0$);
- vitezele (accelerațiile) ce aparțin unei drepte Δ_1 paralelă cu axa de rotație sunt egale între ele;
- vitezele (accelerațiile) punctelor solidului rigid ce aparțin unei drepte Δ_2 , perpendiculară pe axa de rotație, au o variație liniară în funcție de poziția lor pe această dreaptă.



Distribuția de viteze (accelearații) pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație

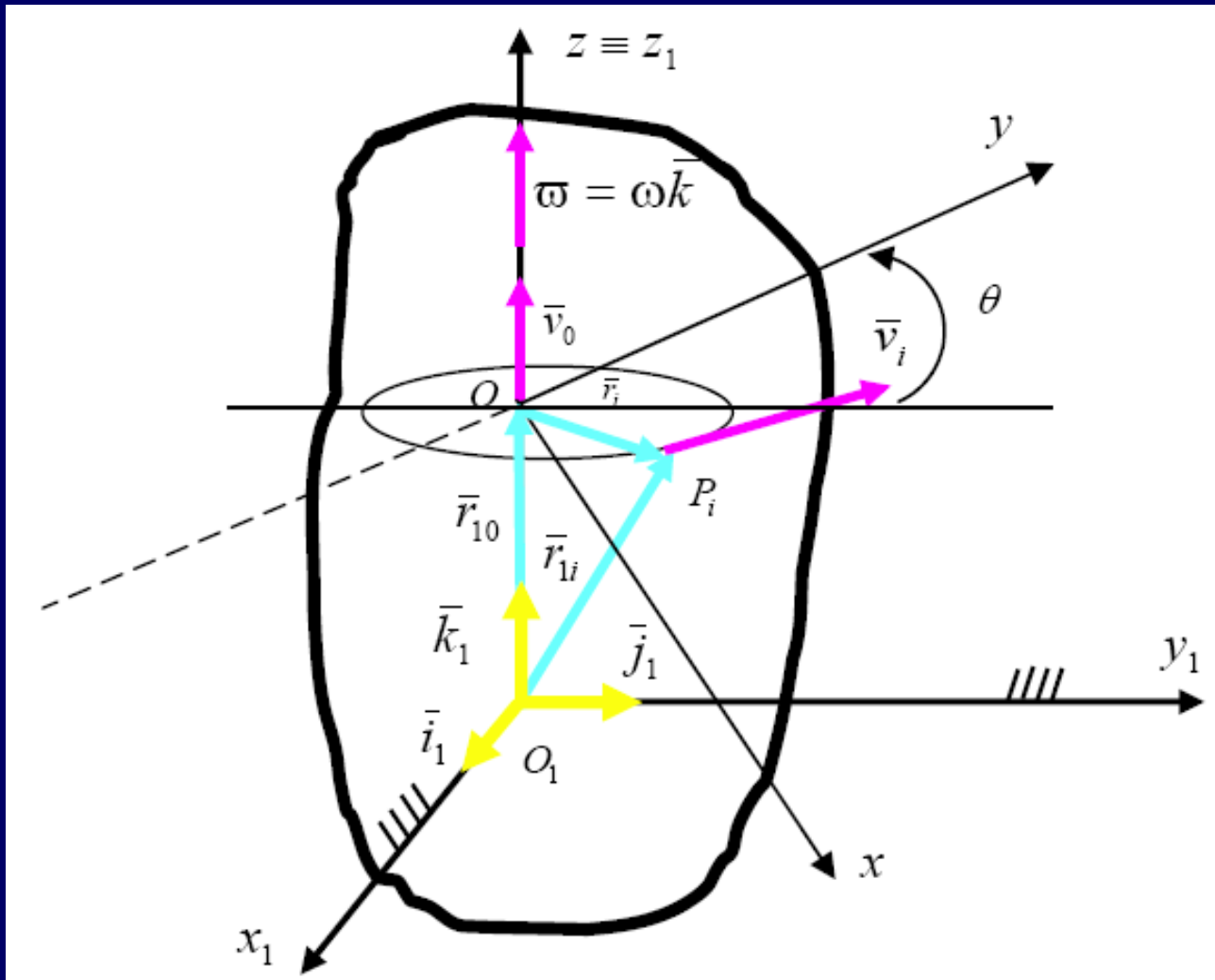
Mișcarea de roto-translație a solidului rigid

Un solid rigid execută o mișcare de rototranslație atunci când în tot timpul mișcării două puncte aparținând acestuia rămân permanent pe o dreaptă fixă Oz_1 .

Mișcarea solidului rigid se poate descompune într-o mișcare de translație rectilie în lungul axei fixe Oz_1 și o mișcare de rotație efectuată în jurul aceleiași axe.

Traectoria unui punct oarecare P_i , aparținând rigidului în mișcare de rototranslație față de axa fixă Oz_1 , este o curbă aparținând cilindrului circular drept având ca axă de simetrie axa Oz_1 și ca rază, distanța de la punctul P_i la axa Oz_1 . La un moment oarecare, poziția rigidului se poate determina dacă se cunoaște distanța OO_1 și unghiul θ .

Putem concluziona că rigidul în mișcare de rototranslație are două grade de libertate.



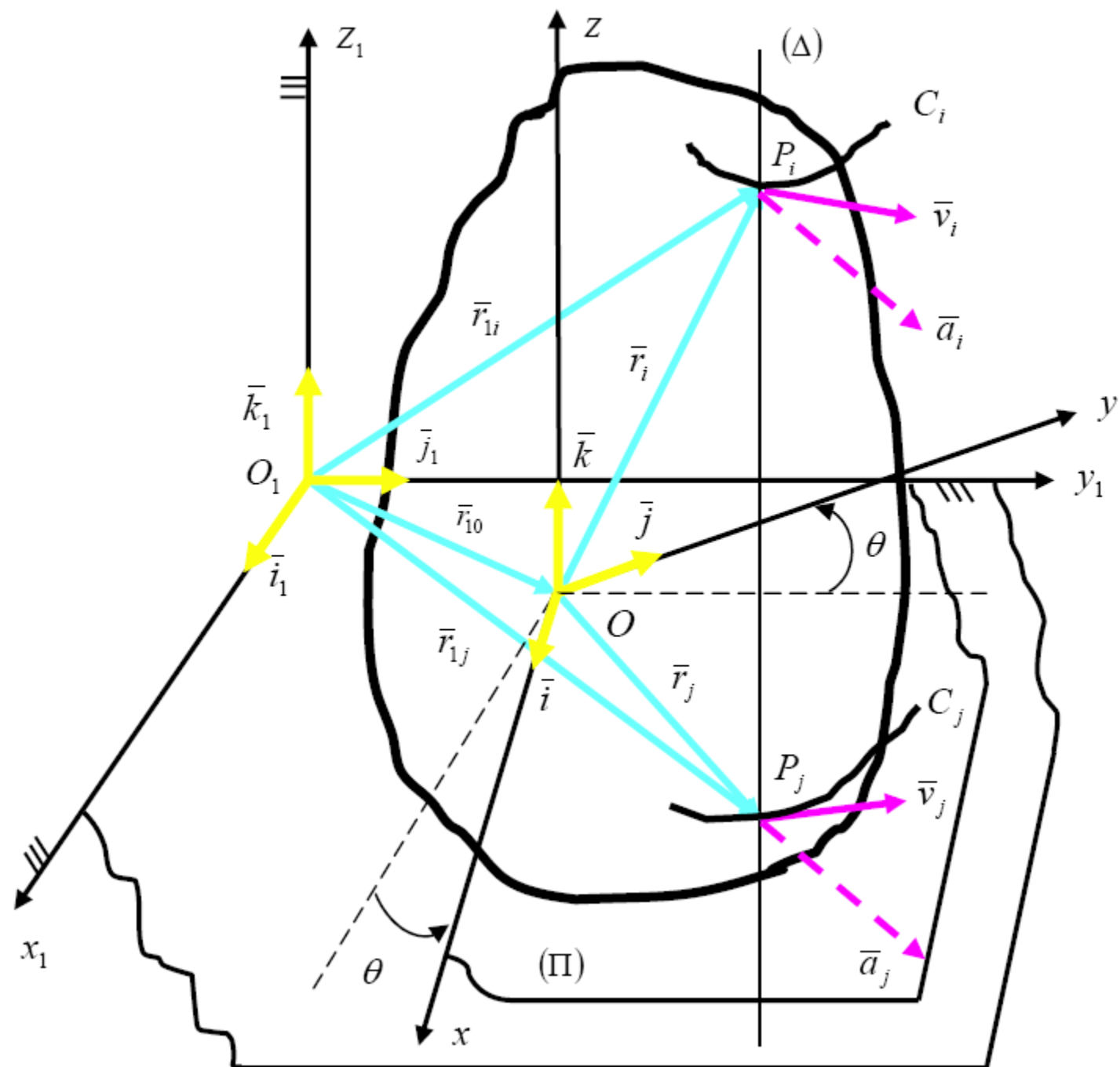
Mișcarea de rototranslație a solidului rigid

Mișcarea plan-paralelă a solidului rigid

Un solid rigid execută o mișcare plan-paralelă dacă în tot timpul mișcării, un plan aparținând acestuia rămâne suprapus cu un plan fix din spațiu.

Pentru studiul mișcării alegem două sisteme de referință: unul fix $O_1x_1y_1z_1$ și unul mobil $Oxyz$, solidar cu solidul rigid, al cărui plan xOy rămâne tot timpul mișcării suprapus cu planul fix $x_1O_1y_1$.

Solidul rigid în mișcare plan-paralelă are 3 grade de libertate, deoarece sunt necesari 3 parametri scalari de poziție: x_{10} , y_{10} și θ în determinarea poziției acestuia.



Mișcarea plan-paralelă a solidului rigid se realizează prin suprapunerea unei mișcări de translație a acestuia, efectuată paralel cu un plan-reper π , cu o mișcare de rotație a rigidului în jurul unei axe perpendiculare pe planul π .

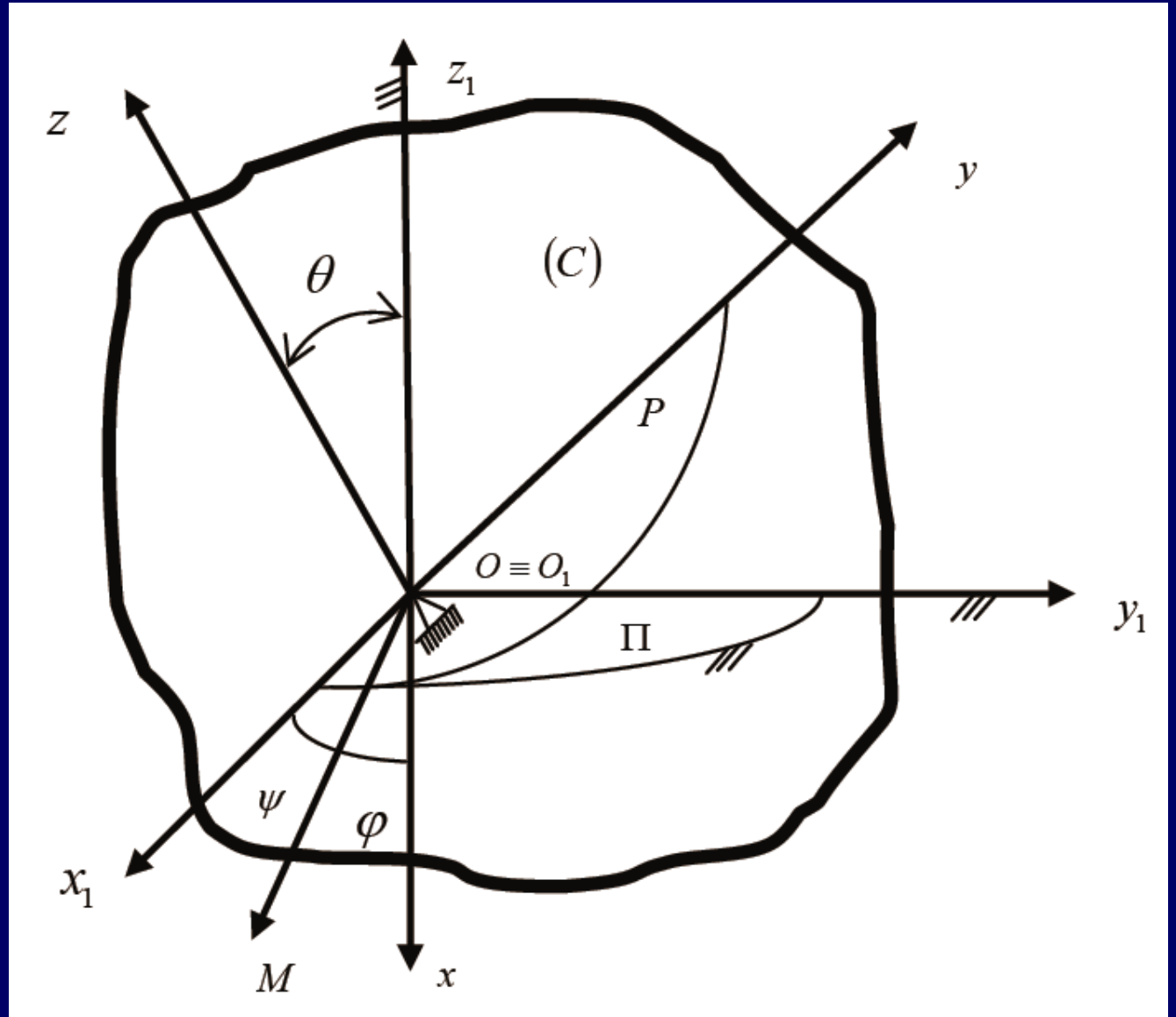
La un anumit moment t există un punct pentru care viteza acestuia este nulă. Acest punct notat cu I se numește *centru instantaneu de rotație*.

Locul geometric al punctelor succesive pentru care viteza lor este nulă se numește axă *instantanee de rotație*.

Locul geometric al CIR față de sistemul de referință mobil se numește *rostogolitoare (centroidă mobilă)*.

Locul geometric al CIR față de sistemul de referință fix poartă numele de *bază (centroidă fixă)*.

Mișcarea de rotație a solidului rigid în jurul unui punct fix



În cadrul mișcării de rotație a rigidului C în jurul punctului fix O_1 , orice rotație finită poate fi descompusă într-o infinitate de rotații elementare în jurul punctului său fix. Acestea pot fi înlocuite, din punct de vedere al traiectoriilor și distribuției câmpului de viteze, prin rotații elementare efectuate în jurul unor axe instantanee de rotație cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$.

Locul geometric al axelor instantanee de rotație față de sistemul cartezian fix $O_1x_1y_1z_1$ este o suprafață riglată având forma unei pânze duble conice cu vârful plasat în punctul fix O_1 , numită **axoidă fixă**. Față de sistemul cartezian mobil $Oxyz$, locul geometric al axelor instantanee de rotație poartă denumirea de **axoidă mobilă**, fiind tot o suprafață rigidă de forma unei pânze duble conice.