

# CAPITOLUL 1

## INTRODUCERE ÎN STUDIUL TEORIEI PRELUCRĂRII MĂSURĂTORILOR TOPO-GEODEZICE

### 1.1. CONSIDERENTE GENERALE

Instrumentul principal de cunoaștere a lumii materiale îl constituie *observația* și în cadrul acesteia, *măsurarea*. Operația de măsurare reprezintă un proces experimental de obținere a informației sub forma unui raport numeric, între valoarea mărimii fizice măsurate și valoarea unei alte mărimi de același gen considerată drept unitate de măsură.

Scopul unei cercetări științifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a fi puse în slujba activității umane. Pentru aceasta, este necesară îmbinarea cercetării științifice cu aplicația tehnică – practică, fără de care orice speculație abstractă devine sterilă. Pentru realizarea acestui deziderat, prima condiție în alegerea mărimilor fizice, înțelegând prin aceasta și mărimile care intervin în tehnică și în practică, este ca ele să fie măsurabile.

Din punctul de vedere al subordonării metrologice, se deosebesc mijloace de măsurat etalon și de lucru. Etaloanele servesc la reproducerea și păstrarea unităților de măsură, precum și la verificarea altor mijloace de măsurat. Mijloacele de măsurat de lucru servesc la executarea operațiilor de măsurare în procese tehnologice, în lucrări de laborator etc.

Se cunoaște faptul că dacă o mărime se măsoară de mai multe ori, de fiecare dată se obține o altă valoare chiar dacă măsurătorile se desfășoară în aceleași condiții, de către același operator și cu instrumente de mare precizie.

Cauza acestor neconcordanțe se datorează erorilor care afectează întotdeauna o măsurătoare, făcând ca valoarea adevărată a mărimii măsurate să nu poată fi cunoscută niciodată.

Practic, neputând fi determinată valoarea adevărată a mărimii măsurate, se caută să se determine o valoare apropiată de aceasta într-un grad mai mare sau mai mic funcție de scopul pentru care se execută măsurătorile.

Apropierea mărimii determinate față de valoarea sa adevărată caracterizează precizia măsurătorii.

Ca urmare, prelucrarea măsurătorilor efectuate asupra unei mărimi urmărește obținerea celei mai bune valori a acesteia și a diferenței maxime între valoarea determinată și valoarea adevărată.

Informațiile, care constituie baza concretă de date necesară rezolvării problemelor geodezice, fotogrametrice și topografice, provin din observațiile efectuate asupra unor mărimi cu care se lucrează frecvent și care, în principal, sunt reprezentate de măsurătorile de unghiuri și distanțe. *Calitatea* informațiilor obținute din aceste măsurători este funcție directă de *volumul* observațiilor și de *precizia* instrumentelor de măsurat.

Se impune așadar, ca pornind de la scopul pentru care sunt efectuate măsurătorile să se stabilească valorile corespunzătoare ca mărime și precizie, luând în considerare aspectul economic referitor la volumul strict necesar și suficient al observațiilor care se impun. Teoria erorilor de măsurare sau teoria prelucrării măsurătorilor topo-geodezice intervine cu succes și rezolvă favorabil aceste aspecte. Teoria prelucrării măsurătorilor topo-geodezice, prezintă o importanță deosebită pentru practica măsurătorilor terestre, datorită volumului impresionant de observații ce trebuie executate, prelucrate și compensate în vederea obținerii valorilor lor celor mai probabile, ca și pentru evaluarea cât mai corectă și mai completă a preciziei.

Cunoscându-se cât mai exact mărimile erorilor medii ale fiecărui argument măsurabil în parte, se poate determina eroarea medie a unei funcții de aceste argumente. În acest fel, se poate rezolva problema inversă a erorilor de măsurare, în cadrul căreia, față de o eroare maximă impusă apriori unei funcții ce urmează a se determina, se va stabili încă din faza de proiect, care trebuie să fie erorile maxime cu care se vor măsura pe teren argumentele componente. Aceasta dă posibilitatea stabilirii preciziei optime de măsurare, cu avantaje economice importante.

Astfel, la realizarea unei rețele de triangulație, necesară ridicărilor topografice, a unei rețele de microtriangulație, necesară pentru urmărirea comportării unei construcții, studiul preciziei de determinare a poziției punctelor rețelei se face încă din faza de proiectare, funcție de configurația rețelei și de precizia cu care se vor executa măsurătorile pe teren. Acest studiu va urmări ca erorile în poziția punctelor, să se încadreze în toleranțele impuse anticipat. La sfârșit, prin compararea

erorilor post-procesate cu erorile stabilite anticipat, se va putea aprecia corectitudinea studiului făcut.

Studiul erorilor de măsurare prezintă o importanță cu totul deosebită în acele domenii ale măsurătorilor terestre (Geodezie, Fotogrammetrie, Cartografie și Topografie), în care exigențele impuse în privința preciziei sunt deosebit de ridicate.

Se subliniază faptul că de fiecare dată în practica măsurătorilor terestre trebuie avută în vedere precizia optimă necesară. Aceasta deoarece o precizie exagerată produce cheltuieli inutile de forță de muncă, de mijloace materiale și de timp, iar o precizie insuficientă duce la o calitate slabă a rezultatelor obținute din măsurători.

Toate lucrările de topografie și geodezie se bazează pe măsurători efectuate în scopul determinării poziției diferitelor obiecte și fenomene din spațiul terestru. Aceste măsurători se referă în special la mărimi liniare (lungimi) și la mărimi unghiulare (unghiuri).

Așa cum rezultă din definiție, orice proces de măsurare presupune, în primul rând, existența unei unități de măsură în raport de care să fie exprimată valoarea observată.

De-a lungul timpului s-au utilizat diferite unități de măsură, în prezent, majoritatea țărilor lumii, printre care și România, a adoptat Sistemul Internațional de Unități (SI).

## 1.2. SCURTĂ CLASIFICARE A MĂSURĂTORILOR

Măsurătorile pot fi clasificate după următoarele criterii:

*După modul de obținere a mărimii fizice care ne interesează:*

a) *Măsurători directe*, la care mărimea fizică considerată se compară direct cu unitatea de măsură, fiecare măsurătoare efectuată generând câte o valoare a mărimii măsurate.

Exemple de măsurători directe:

- măsurarea unui unghi cu teodolitul;
- măsurarea unei lungimi cu ruleta.

Se mai consideră ca măsurători directe și anumite funcții simple de măsurători directe și anume:

- diferența dintre două mărimi măsurate direct (exemplu: diferența de nivel rezultată prin scăderea citirilor pe miră);
- produsul dintre o mărime măsurată și o constantă.

Un caz special al măsurătorilor directe îl constituie măsurătorile condiționate, definite ca măsurători directe ce trebuie să satisfacă o serie de condiții geometrice sau analitice.

Exemple de măsurători condiționate:

1. Într-o rețea de formă triunghiulară au fost măsurate toate unghiurile. Teoretic, acestea trebuie să îndeplinească condiția din geometria plană că suma lor să fie egală cu  $200^g$ .
2. Suma diferențelor de nivel într-o drumuire închisă, trebuie să fie egală cu zero.

*b) Măsurători indirecte*, la care valoarea mărimilor care ne interesează se obține prin intermediul altor mărimi măsurate direct, acestea fiind funcțional dependente între ele.

Exemple de măsurători indirecte:

1. Determinarea coordonatelor punctelor unei rețele geodezice prin măsurători liniare, dependența între mărimile de determinat  $(x_i, y_i)$  și mărimile măsurate direct  $(D_{i-j})$ , fiind:

$$D_{i-j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

(1.1)

2. Determinarea elementelor elipsoidului de rotație pământesc (semiaxa și turtirea), prin măsurarea lungimilor de arc de meridian și de latitudini. Sfera măsurătorilor indirecte este mult mai largă decât cea a măsurătorilor directe, primele fiind de multe ori și mult mai simple. Există și anumite mărimi care practic nici nu pot fi măsurate direct, de exemplu determinarea densității care se face în funcție de volum și masă (mărimi ce se pot măsura direct),  $\delta = \delta(V, M)$  sau determinarea unor constante fizice cum ar fi accelerația gravitațională.

*După condițiile în care sunt executate:*

*a) Măsurători de aceeași precizie*, când se efectuează cu același instrument, de către același operator, prin aceeași metodă de lucru și în aceleași condiții de mediu. În acest caz se poate considera că tuturor acestor măsurători le putem acorda aceeași încredere.

*b) Măsurători de precizii diferite (ponderate)*, când unul din factorii de mai sus diferă, deci nu mai putem acorda aceeași încredere tuturor măsurătorilor, unele fiind determinate mai precis decât altele.

*După legătura dintre ele:*

*a) Măsurători dependente*

Dacă ansamblul condițiilor în care se efectuează o măsurătoare influențează total sau parțial rezultatul altei măsurători, se spune că acestea sunt dependente între ele.

*b) Măsurători independente*

Sunt acele erori care nu se influențează reciproc.

Corelația sau dependența între mărimi se exprimă cu ajutorul unui coeficient empiric de corelație, dedus experimental pe cale statistică efectuând mai multe măsurători. Aceste determinări însă sunt foarte greoaie.

*După numărul lor:*

a) *Măsurători necesare* definite prin numărul minim de măsurători, cu ajutorul cărora se poate stabili valoarea mărimii considerate.

b) *Măsurători suplimentare* efectuate în vederea ridicării preciziei de măsurare sau a preîntâmpinării eventualelor greșeli ce pot apărea.

Aceste măsurători suplimentare determină numărul gradelor de libertate ale rețelei respective.

### 1.3. SCURTĂ CLASIFICARE A ERORILOR DE MĂSURARE

Se numește *eroare* diferența dintre valoarea măsurată și valoarea adevărată a unei mărimi fizice:

$$e = M - X, \quad (1.2)$$

în care prin  $M$  s-a notat valoarea obținută prin măsurare, iar prin  $X$ , valoarea adevărată.

Valoarea reală a unei mărimi nu poate fi determinată niciodată din cauza inexactităților și erorilor de măsurare care apar în procesul de măsurare.

Această imposibilitate poate fi generată de o serie întreagă de cauze cum ar fi: variația în timp a obiectului măsurat, imperfecțiunea organelor de simț ale operatorului, imperfecțiunea aparaturii și a metodelor de măsurare, influența condițiilor exterioare.

Erorile pot fi clasificate după cum urmează:

*După modul de alegere a mărimii nominale:*

a) *Erori reale (adevărate)*,  $\varepsilon_i$  în cazul în care valoarea de referință (nominală) se consideră valoarea reală  $X$  a mărimii respective:

$$\varepsilon_i = M_i - X$$

(1.3)

Deoarece valoarea adevărată  $X$  a unei mărimi nu este accesibilă, înseamnă că nici eroarea adevărată  $\varepsilon$  nu poate fi cunoscută.

b) *Erori aparente* (probabile),  $v_i$  în cazul în care se consideră ca valoare de referință, valoarea probabilă a mărimii respective:

$$\pm v_i = M_i - M$$

(1.4)

Valoarea probabilă a unei mărimi se consideră a fi media aritmetică în cazul măsurătorilor de aceeași precizie, sau media ponderată în cazul măsurătorilor de precizie diferită (ponderate).

Dacă se schimbă sensul unei erori se obține corecția, deci  $c = -e$ .

*După mărimea lor:*

a) *Erori evitabile* (erori grosolane, greșeli)

Ele se pot evita printr-o atenție sporită în timpul procesului de măsurare

Exemplu: erori la metri de măsurare a distanțelor cu ruleta; erori de grade la citirea unghiurilor pe microscopul teodolitului.

Prin urmare, aceste erori grosolane sau greșeli sunt cu un ordin de mărime mai mare decât precizia de măsurare .

Acest tip de eroare se evidențiază imediat într-un șir de măsurători putând fi eliminată cu ușurință pe baza coroborării datelor cu cele de la alte observații.

În calculele de compensare se consideră că măsurătorile nu sunt afectate de erori grosolane.

b) *Erori inevitabile* ce nu pot fi eliminate indiferent de metoda folosită sau de gradul de atenție al operatorului, ci doar diminuate.

Aceste erori pot fi clasificate după modul de acționare astfel:

- *erori sistematice* sunt acelea la care se cunosc cauzele care le generează și legile după care acționează. Valoarea lor poate fi deci determinată și în consecință se poate corecta rezultatul obținut din măsurători.

Diminuarea erorilor sistematice se poate face prin:

- metoda de măsurare (de exemplu la măsurarea unghiurilor se efectuează determinări în cele două poziții ale lunetei, eliminându-se eroarea de colimație)

- prin calcul, aplicându-se corecții rezultatului (corecția de etalonare, corecția de temperatură, etc. la măsurarea distanțelor cu ruleta)

- printr-o reglare mai bună a aparatelor

- reducând la minim ponderea observațiilor pentru care nu s-au putut îndepărta erorile sistematice

Erorile sistematice pot fi la rândul lor *constante* sau *variabile*.

Exemplu: dacă un etalon cu care se măsoară distanța este mai scurt cu 1 cm, pentru fiecare introducere a etalonului în distanța de măsurat, se comite o eroare care își păstrează valoarea și semnul. Avem de-a face cu o eroare sistematică constantă. Aceasta se propagă după legea înmulțirii, adică eroarea totală este egală cu eroarea unitară înmulțită cu numărul care arată de câte ori intervine eroarea unitară în rezultatul final:

$$e_{st} = n \cdot e_s \quad (1.5)$$

în care:  $e_{st}$  = eroare sistematică totală;

$n$  = numărul care arată de câte ori etalonul se cuprinde în mărimea măsurată;

$e_s$  = eroarea sistematică constantă unitară.

Eroarea sistematică variabilă nu se propagă după legea liniară urmărită de erorile constante, deci ea nu își păstrează tot timpul semnul și valoarea.

Exemplu: eroarea de excentricitate a limbului, când centrul acestuia nu coincide cu centrul alidadei.

- *erori întâmplătoare* (accidentale) sunt acelea care influențează într-un mod întâmplător, cu cantități mici fiecare, dar apreciabile în total și nu pot fi eliminate.

Erorile întâmplătoare pot fi diminuate prin efectuarea mai multor măsurători. Ele se micșorează de asemenea, prin perfecționarea instrumentelor și a metodelor de lucru.

În studiul teoriei erorilor, se consideră că măsurătorile au fost corectate de toate celelalte erori (greșeli, erori sistematice) și *sunt afectate numai de erorile întâmplătoare*.

Schematic, această clasificare s-ar putea reda sub următoarea formă:

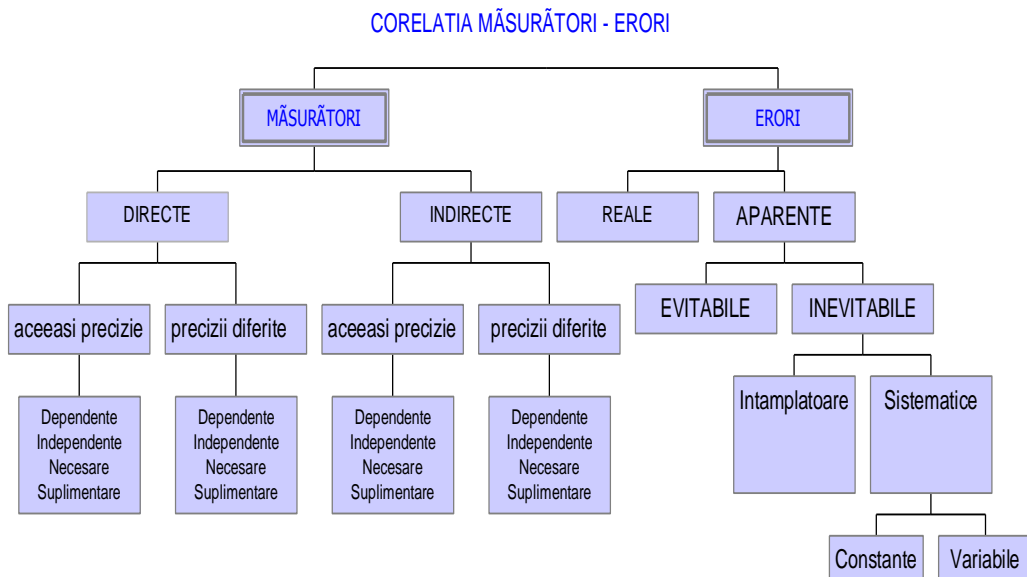


Figura 1.1 – Clasificarea și corelația măsurători – erori de măsurare

## CAPITOLUL 2 COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR DIRECTE

În practica măsurătorilor, pentru determinarea valorii unei mărimi fizice, de cele mai multe ori se execută un număr mai mare de măsurători decât cel strict necesar. Scopul compensării constă în aflarea celei mai probabile valori a mărimii, numită și valoare compensată, pe baza totalității măsurătorilor efectuate. Pentru obținerea unor soluții unice, este obligatorie aplicarea unui principiu, reprezentat în cazul de față de principiul sau *metoda celor mai mici pătrate*, așa cum se va prezenta în continuare.

În calculul de compensare, concomitent cu aflarea valorii compensate, se efectuează și evaluarea sau aprecierea preciziei rezultatului.

### 2.1. TEOREME FUNDAMENTALE ASUPRA ERORILOR ÎNTÂMPLĂTOARE

În funcție de valoarea cea mai probabilă  $M$  a mărimii măsurate se determină erorile întâmplătoare aparente  $v_i$ :

$$\pm v_1 = M_1 - M$$

$$\pm v_2 = M_2 - M$$

$$\pm v_3 = M_3 - M$$



$$\pm v_n = M_n - M$$

(2.1)

**Teorema I**

*Suma erorilor aparente "v<sub>i</sub>" este întotdeauna egală cu zero.*

Prin însumarea relațiilor membru cu membru se obține:

$$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 \pm \dots \pm v_n = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n - n \cdot M \quad (2.2)$$

Folosind notațiile Gauss:

$$[v_i] = [M_i] - n \cdot M$$

(2.3)

Ținând seama de relația de definiție a valorii celei mai probabile

$M = \frac{[M_i]}{n}$  și înlocuind-o în expresia de mai sus obținem:

$$[v_i] = [M_i] - n \frac{[M_i]}{n}$$

(2.4)

$$[v_i] = 0; \quad n \neq \infty$$

(2.5)

**Teorema II**

*Suma pătratelor erorilor întâmplătoare aparente "[v<sub>i</sub>v<sub>i</sub>]" trece printr-un minim pentru valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate.*

Se pornește tot de la expresiile erorilor aparente întâmplătoare definite față de valoarea  $M$  :

$$\begin{aligned} \pm v_1 &= M_1 - M \\ \pm v_2 &= M_2 - M \\ \pm v_3 &= M_3 - M \\ &\dots\dots\dots \\ \pm v_n &= M_n - M \end{aligned}$$

(2.6)

Dacă se ridică la pătrat și se însumează aceste egalități se va obține:

$$[v_i v_i] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = (M_1 - M)^2 + \dots + (M_n - M)^2$$

(2.7)

Această sumă se prezintă că o funcție de mărimea  $M$ , deci:

$$[v_i v_i] = F(M)$$

$$F(M) = (M_1 - M)^2 + (M_2 - M)^2 + \dots + (M_n - M)^2$$

(2.8)

Se știe că o funcție trece printr-un minim atunci când derivata de ordinul I este zero, iar derivata de ordinul II este mai mare decât zero:

$$F'(M) = -2(M_1 - M) - 2(M_2 - M) - \dots - 2(M_n - M) = 0 \quad (2.9)$$

de unde rezultă :

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n}$$

(2.10)

Această teoremă este foarte importantă în studiul teoriei erorilor, justificând expresia valorii celei mai probabile.

## 2.2. ERORILE ÎNTÂMPLĂTOARE ÎN MĂSURĂTORILE DIRECTE

### 2.2.1. VALOAREA CEA MAI PROBABILĂ A UNEI MĂRIMI MĂSURATE DIRECT

Dacă o mărime este măsurată în mod direct, de mai multe ori, cu același instrument și în aceleași condiții, se vor obține rezultate apropiate, care diferă totuși cu cantități mici.

Se poate afirma că orice măsurătoare directă este afectată de erori, erori care fac ca valoarea adevărată a mărimilor măsurate să nu fie accesibilă în practică.

Considerăm că asupra aceleiași mărimi  $M$  s-au executat " $n$ " măsurători, rezultând valorile  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

Dacă aceste valori sunt suficient de apropiate, rezultă că măsurătorile individuale sunt corecte.

Se consideră că valoarea cea mai probabilă pentru acest set de " $n$ " măsurători, este media aritmetică a acestora:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n} = \frac{[M_i]}{n}$$

(2.11)

Acest procedeu s-a considerat la început că fiind impus de logica lucrurilor (postulatul lui Gauss-1809), dar ulterior a fost justificat prin calculul probabilităților.

## 2.2.2. EROAREA MEDIE PĂTRATICĂ A UNEI SINGURE MĂSURĂTORI

Erorile aparente  $v_i = M_i - M$  caracterizează calitatea măsurătorilor: cu cât acestea sunt mai mici cu atât măsurătoarea este mai bună, mai precisă.

Dacă se consideră media erorilor aparente  $\frac{[v_i]}{n}$ , aceasta ar fi egală cu zero, deoarece  $[v_i] = 0$  (conform primei teoreme). Acest rezultat ar conduce la concluzia falsă că măsurătoarea este perfectă (nu există erori).

Pentru a scoate în evidență eventualele erori mari și de asemenea pentru a scăpa de semnele acestor erori, în practică se admite eroarea medie pătratică  $\frac{[v_i v_i]}{n}$ , în care  $n$  reprezintă numărul de măsurători efectuate.

Eroarea medie pătratică se notează cu  $m^2$  și are expresia:

$$m^2 = \frac{[v_i v_i]}{n} \quad (2.12)$$

sau, mai frecvent este folosită în calcul relația :

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n}} \quad (2.13)$$

**Observație:** în cazul în care se efectuează o singură măsurătoare asupra unei mărimi se obține rezultatul eronat:  $m = 0$ , adică măsurătoarea nu conține erori.

Formula care dă expresia erorii medii pătratice trebuie modificată astfel ca în cazul unei singure măsurători să avem de-a face cu o nedeterminare matematică.

Ținând seama de acest lucru, expresia lui  $m$  devine:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n - 1}} \quad (2.14)$$

(pentru o singură măsurătoare  $m$  ar deveni:  $m = \pm \sqrt{\frac{0}{0}}$  care este o nedeterminare din punct de vedere matematic).

Este important să se cunoască valoarea erorii medii pătratice pentru aprecierea calității și a preciziei unei măsurători. Cu cât aceasta va fi mai mică, cu atât măsurătoarea va fi mai precisă.

### 2.2.3. EROAREA MEDIE PĂTRATICĂ A MEDIEI ARITMETICE

Această eroare este definită ca diferența algebrică pozitivă sau negativă dintre valoarea cea mai probabilă ( $M$ ) și valoarea reală ( $X$ ), adică:

$$\pm e_m = M - X \quad (2.15)$$

Considerăm următoarele erori reale  $\varepsilon_i$ :

$$\pm \varepsilon_1 = M_1 - X$$

$$\pm \varepsilon_2 = M_2 - X$$

.....

$$\pm \varepsilon_n = M_n - X$$

(2.16)

Prin însumare:  $[\varepsilon_i] = M_1 + M_2 + \dots + M_n$

$$[\varepsilon_i] = [M_i] - n \cdot X$$

(2.17)

Dacă în această relație înlocuim  $[M_i] = M_1 + M_2 + \dots + M_n$  cu valoarea ei  $n \cdot M$  obținută din expresia mediei, rezultă :

$$[\varepsilon_i] = n \cdot M - n \cdot X \quad (2.18)$$

$$[\varepsilon_i] = n \cdot e_m$$

(2.19)

(adică, suma erorilor întâmplătoare reale este diferită de zero).

Prin ridicare la pătrat rezultă:

$$[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2 - 2[\varepsilon_i \varepsilon_j] \quad (2.20)$$

Pentru un număr mare de măsurători se poate considera că :  $[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2$ , deoarece erorile  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  fiind unele pozitive, iar altele negative, suma dublelor produse tinde către zero.

Din această relație rezultă că eroarea medie pătratică a mediei aritmetice va fi egală cu :

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon_i \varepsilon_i]}{n^2}}$$

(2.21)

S-a văzut însă că mărimea erorilor reale nu poate fi cunoscută, astfel încât aceste erori vor trebui înlocuite prin erori aparente.

Știm că:  $\pm v_i = M_i - X$

$$\pm \varepsilon_i = M_i - M$$

Se poate scrie că  $\pm \varepsilon_i = \pm v_i + (M - X)$ , folosindu-se un mic artificiu de calcul

$$\pm \varepsilon_i = \pm v_i + e_m$$

(2.22)

Dacă se determină din măsurători valoarea unei mărimi de "n" ori, vom avea:

$$\pm \varepsilon_1 = \pm v_1 \pm e_m$$

$$\pm \varepsilon_2 = \pm v_2 \pm e_m$$

.....

$$\pm \varepsilon_n = \pm v_n \pm e_m$$

(2.23)

Se ridică la pătrat aceste relații și se adună, obținându-se:

$$\varepsilon_1^2 = v_1^2 + e_m^2 \pm 2v_1 e_m$$

$$\varepsilon_2^2 = v_2^2 + e_m^2 \pm 2v_2 e_m$$

.....

$$\varepsilon_n^2 = v_n^2 + e_m^2 \pm 2v_n e_m$$

(2.24)

rezultă că:

$$[\varepsilon_i \varepsilon_i] = [v_i v_i] + n \cdot e_m^2$$

(2.25)

și ținând cont de relația:  $[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2$ , se poate scrie:

$$n^2 e_m^2 = [v_i v_i] + n \cdot e_m^2 \quad (2.26)$$

Deci:

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n(n-1)}} \quad (2.27)$$

Raportând această valoare la cea a erorii medii pătratice a unei singure măsurători se poate observa relația de legătură:

$$e_m = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (2.28)$$

adică, eroarea medie pătratică a mediei aritmetice se reduce proporțional cu rădăcina pătrată din numărul de măsurători.

### 2.3. APLICAȚII PRIVIND CALCULUL MEDIEI ȘI DISPERSIEI VARIABILELOR ALEATOARE

#### Aplicația 1

Fiind dat un vector aleator  $X = (10, 8, 6, 4, 2, 0)$ .

Să se calculeze media și dispersia acestuia precum și dispersia de selecție.

*Media*

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} = \frac{10+8+6+4+2+0}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

*Dispersia*

$$D^2(x) = \sigma^2(x) = M\{(x - \bar{x})^2\} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2(x) = \frac{(10-5)^2 + (8-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2 + (0-5)^2}{6}$$

$$\Rightarrow = \frac{70}{6} = 11,66$$

$$\Rightarrow \sigma^2(x) = 11,66$$

### Dispersia de selecție

$$S^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$
$$\Rightarrow S^2(x) = \frac{(10-5)^2 + (8-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2 + (0-5)^2}{6-1} = \frac{70}{5} = 14$$
$$\Rightarrow S^2(x) = 14$$

### Aplicația 2

Să se calculeze covarianța de selecție și coeficientul de corelație corespunzător pentru vectorii:

$$X = (8, 6, 4, 2, 0)$$

$$Y = (-4, 0, 1, 6, 2)$$

Se calculează media celor doi vectori:

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} = \frac{8+6+4+2+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$M(y) = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y} = \frac{-4+0+1+6+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Covarianța de selecție:

$$S(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Pentru vectorul X, covarianța de selecție are relația:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(8-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (0-4)^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(-4-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2 + (6-1)^2 + (2-1)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{52}{4}} = \sqrt{13}$$

$$S(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) + (0 \cdot 0) + (-2) \cdot 5 + (-4) \cdot 1}{4} =$$

$$= \frac{-36}{4} = -9$$

Coeficientul de corelație:

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-9}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = \frac{-9}{\sqrt{130}} = -0,78$$

### Aplicația 3

Să se calculeze matricea de varianță - covarianță corespunzătoare pentru vectorii:

$$X = (10, 8, 4, 6, 2)$$

$$Y = (4, -2, 0, 6, 2)$$

$$Z = (0, 1, 0, -4, -2)$$

Să se arate dacă acești vectori sunt independenți sau nu.

Se calculează media celor trei vectori:

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} = \frac{10+8+4+6+2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$M(y) = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y} = \frac{4+(-2)+0+6+2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$M(z) = \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \bar{z} = \frac{0+1+0+(-4)+(-2)}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Matricea de varianță-covarianță are forma:



$$\Sigma_{xyz} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}$$

Calculul covarianțelor:

$$S(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} =$$

$$= \frac{(10-6)(4-2) + (8-6)(-2-2) + (4-6)(0-2) + (6-6)(6-2) + (2-6)(2-2)}{5-1} =$$

$$S(x, y) = \frac{4}{4} = 1$$

$$S(x, z) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{n-1} =$$

$$= \frac{(10-6)(0+1) + (8-6)(1+1) + (4-6)(0+1) + (6-6)(-4+1) + (2-6)(-2+1)}{5-1} =$$

$$S(x, z) = \frac{10}{4} = 2,5$$

$$S(y, z) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{n-1} =$$

$$\frac{(4-2)(0+1) + (-2-2)(1+1) + (0-2)(0+1) + (6-2)(-4+1) + (2-2)(-2+1)}{5-1} =$$

$$S(y, z) = \frac{-20}{4} = -5$$

$$S_{xx} = S_{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(10-6)^2 + (8-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (2-6)^2}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$S_{yy} = S_{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{(4-2)^2 + (-2-2)^2 + (0-2)^2 + (6-2)^2 + (2-2)^2}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$S_{zz} = S_{z^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1} = \frac{(0+1)^2 + (1+1)^2 + (0+1)^2 + (-4+1)^2 + (-2+1)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Matricea de varianță-covarianță se poate scrie cu următoarele valori, fiind

simetrică în raport cu diagonala principală:

$$\Sigma_{xyz} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2,5 \\ 1 & 10 & -5 \\ 2,5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

#### Aplicația 4

Se consideră următoarea funcție :

$$F(xyz) = 2x^2 + 2y^2 - z + 4xy + 2$$

și vectorii aleatori :

$$x = (7, 5, 4, 0, 2)$$

$$y = (-2, 0, 2, 1, 4)$$

$$z = (0, 1, 0, 2, 4)$$

Pentru funcția  $F(x,y,z)$  se cunosc valorile medii și matricea de varianță-covarianță.

Să se calculeze media și dispersia acestei funcții.

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} = \frac{7+5+4+0+2}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$M(y) = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y} = \frac{-2+0+2+1+4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$M(z) = \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \bar{z} = \frac{0+1+0+2+4}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Media funcției  $F(xyz)$ :

$$\bar{F} = 2\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \bar{z} + 4\bar{x}\bar{y} + 2 = 2 \cdot 4,4^2 + 2 \cdot 1^2 - 1,4 + 4 \cdot 4,4 \cdot 1 + 2 = 58,92$$

Calculul dispersiei funcției  $F$ :

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_x^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_y^2 \cdot \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_z^2 \cdot \sigma_z^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\sigma_{xy} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\sigma_{xz} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\sigma_{yz}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{n-1} = \frac{-1,8}{4} = -0,45$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{n-1} = \frac{11}{4} = 2,75$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2}{n-1} = \frac{29,2}{4} = 7,3$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y - y_i)^2}{n-1} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{z^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (z - z_i)^2}{n-1} = \frac{11,2}{4} = 2,8$$

Derivatele funcției  $F$  în raport cu necunoscutele  $x, y$  și  $z$  au următoarele valori:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4\bar{x} + 4\bar{y} = 4 \cdot 4,4 + 4 \cdot 1 = 21,6$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4\bar{y} + 4\bar{x} = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4,4 = 21,6$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1$$

Valoarea dispersiei funcției  $F$  în raport cu necunoscutele  $x, y$  și  $z$  se va scrie:

$$\sigma_F^2 = (4\bar{x} + 4\bar{y})^2 \cdot 7,3 + (4\bar{y} + 4\bar{x})^2 \cdot 5 + (-1)^2 \cdot 2,8 + 2(4\bar{x} + 4\bar{y})(4\bar{y} + 4\bar{x})(-1) +$$

$$2(4\bar{x} + 4\bar{y})(-1)(-0,45) + 2(4\bar{y} + 4\bar{x})(-1) \cdot 2,75 =$$

$$= 466,56 \cdot 7,3 + 466,56 \cdot 5 + 2,8 - 933,12 + 19,44 - 118,8$$

$$\Rightarrow \sigma_F^2 = 4709,028$$

*Probleme recapitulative*

1. Fiind dat un vector aleator  $w = (-5, 2, 0, 6, 1, 2)$ .

**Se cere să se calculeze media și dispersia acestuia precum și dispersia de selecție.**

2. Să se calculeze covarianța de selecție și coeficientul de corelație corespunzător pentru vectorii:

$$A = (1, 7, -5, 8, -11)$$

$$B = (2, 4, -6, 0, 3)$$

3. Să se calculeze matricea de varianță - covarianță corespunzătoare pentru vectorii:

$$P = (2, 4, 7, 1, 3)$$

$$Q = (-5, 0, 4, 3, 7)$$

Să se arate dacă acești vectori sunt independenți sau nu.

4. Să se calculeze matricea de varianță - covarianță corespunzătoare pentru vectorii:

$$x_1 = (2, 4, 7, 1, 3)$$

$$x_2 = (-5, 0, 4, 3, 7)$$

$$x_3 = (-5, 0, 4, 3, 7)$$

Să se arate dacă acești vectori sunt independenți sau nu.

5. Se consideră următoarea funcție :

$$F(x, y) = 3xy - 2x^2 + 4y^3 - 12$$

și vectorii aleatori :

$$x = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$y = (-2, 0, 4, 6, 1)$$

pentru care se cunosc valorile medii și matricea de varianță -covarianță.

Să se calculeze media și dispersia acestei funcții.

6. Se consideră următoarea funcție :

$$F(x, y, z) = 4x^3 - 2y^2 + 4z + 2xy - 3y^2z^2 - 12$$

și vectorii aleatori :

$$x = (0, 1, 3, 4, 2)$$

$$y = (-2, 1, -4, 0, 3)$$

$$z = (-3, 0, 1, 5, 2)$$

pentru care se cunosc valorile medii și matricea de varianță –covarianță.  
Să se calculeze media și dispersia acestei funcții.

## 2.4. DETERMINĂRI ÎN CAZUL VARIABILELOR INDEPENDENTE

### Aplicația 1

Se consideră 10 valori reprezentând lungimea dintre două puncte, obținută în urma a 10 măsurători independente de aceeași precizie. Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă și abaterea standard ale distanței măsurate.

*Tabel 2.1*

<i>Nr.măsur.</i>	<i>Valoarea măsurată (m)</i>
1	103,543
2	103,567
3	103,538
4	103,556
5	103,549
6	103,561

7	103,559
8	103,550
9	103,548
10	103,554
$\Sigma$	<b>1035,525</b>

Tabel 2.2

Nr. măsurătoare	Valoarea măsurată	$v_i = M - M_i$ (mm)	$v_i^2$
1	103,543	9,5	90,25
2	103,567	3,5	12,25
3	103,538	14,5	210,25
4	103,556	- 3,5	12,25
5	103,549	- 14,5	210,25
6	103,561	- 8,5	72,25
7	103,559	- 6,5	42,25
8	103,550	2,5	6,25
9	103,548	4,5	20,25
10	103,554	-1,5	2,25
$\Sigma$	1035,525	$\Sigma v_i = 0,0$	$\Sigma v_i^2 = 678,50$

Valoarea cea mai probabilă a distanței, calculată pe baza măsurătorilor executate este *media aritmetică*, care rezultă  $M = 103,5525$  m.

Calculul *abaterii standard* este efectuat în coloanele tabelului, rezultând:

$$\sigma_M = \frac{678,5}{10-1} = 75,39 \text{ mm}^2,$$

respectiv  $\sigma_M = 8,68$  mm,

astfel că valoarea distanței cerute este  $103,553 \text{ m} \pm 8,68 \text{ mm}$ .

### Aplicația 2

Pentru determinarea unghiului format de două direcții orizontale, către două puncte A și B într-un punct de stație, se execută măsurători repetate ale direcțiilor unghiulare către cele două puncte, obținând valorile din tabelul următor. Se cere să se calculeze valorile cele mai probabile ale direcțiilor măsurate și coeficientul de corecție al celor două măsurători.

Tabel 2.3

Nr. măsur.	Punctul A	Punctul B
1	132.61.87	205.48.39
2	132.62.11	205.48.02
3	132.61.99	205.48.41
4	132.61.81	205.48.33
5	132.62.25	205.48.17
6	132.62.03	205.48.43
7	132.61.95	205.48.11
8	132.62.18	205.48.27
9	132.61.84	205.48.16
10	132.62.13	205.48.23
$\Sigma$	1326.20.16	2054.82.52

Valorile cele mai probabile ale celor două direcții unghiulare sunt:

$$d_A = 132.62.01,6$$

$$d_B = 205.48.25,2$$

Cu acestea se calculează corecțiile  $v_i$  și abaterile standard de selecție.

Rezultă varianțele  $\sigma_A^2 = 2034,40 \text{ sec}^2$  și  $\sigma_B^2 = 1717,60 \text{ sec}^2$ , din care se poate concluziona că măsurătoarea către punctul B este mai precisă decât cea către A.

Din varianțele celor două măsurători se calculează abaterile standard

$$\sigma_A = 15^{\text{cc}},03$$

$$\sigma_B = 13^{\text{cc}},81$$

**astfel că valorile măsurate ale celor două direcții se scriu sub forma:**

$$d_A = 132.62.02 \pm 0.00.15,03$$

$$d_B = 205.48.25 \pm 0.00.13,81$$

Covarianța celor două măsurători este  $\sigma_{AB} = \frac{-446,04}{9} = -49,56 \text{ sec}^2$ ,

Coeficientul de corelație este  $\rho_{AB} = \frac{-49,56}{15,03 \cdot 13,81} = -0.239$

Tabel 2.4

Nr. măsur.	Măsurători		Corecții $v_i$	
	A	B	A	B
1	132.61.87	205.48.39	- 14,6	13,8
2	132.62.11	205.48.02	9,4	-23,2
3	132.61.99	205.48.41	2,6	15,8
4	132.61.81	205.48.33	- 20,6	7,8

5	132.62.25	205.48.17	23,4	-8,2
6	132.62.03	205.48.43	1,4	17,8
7	132.61.95	205.48.11	- 6,6	-14,2
8	132.62.18	205.48.27	16,4	1,8
9	132.61.84	205.48.16	- 17,6	-9,2
10	132.62.13	205.48.23	11,4	-2,2
$\Sigma$			<b>0,0</b>	<b>0,0</b>

Tabel 2.5

$v_i^2$		$v_i^A \cdot v_i^B$
A	B	
213,16	190,44	-201,48
88,36	538,24	-218,08
6,76	249,64	41,08
424,36	60,84	-160,68
547,56	67,24	-191,88
1,96	316,84	24,92
43,56	201,64	93,72
268,96	3,24	29,52
309,76	84,64	161,92
129,96	4,84	-25,08
<b>2034,40</b>	<b>1717,60</b>	<b>-446,04</b>

### Aplicația 3

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă, varianța și abaterea standard pentru unghiul determinat de direcțiile unghiulare A și B măsurate în exemplul următor:

$$\alpha = d_B - d_A = 205.48.25,2 - 132.62.01,6 = 72.86.23,6$$

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_B^2 + \sigma_A^2 + 2 \cdot \sigma_{AB} = 1717,60 + 2034,40 - 99,12 = 3652,88 \text{ sec}^2;$$

Abaterea standard a unghiului calculat este  $\sigma_\alpha = \sqrt{\sigma_\alpha^2} = 60,44 \text{ sec}$ , deci valoarea sa se va scrie:

$$\alpha = 72,862 \pm 0.00.60,44$$

### Aplicația 4



Într-un dreptunghi s-au măsurat direct lungimea și lățimea rezultând:

$$L=54,35 \pm 0,05 \text{ [m]}$$

$$l=16,28 \pm 0,02 \text{ [m]}$$

Să se calculeze valoarea medie (cea mai probabilă) a suprafeței precum și eroarea acesteia (abaterea standard).

$$S = L \cdot l$$

$$\bar{S} = \bar{l} + \bar{L} = 16,28 \cdot 54,35 = 884,82 \text{ m}^2$$

$$\bar{S} = 884,82 \text{ m}^2$$

Abaterea standard se calculează cu relația:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_s^2} = \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial L} \right)_{\bar{L}}^2 \cdot \sigma_L^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_i^2 \cdot \sigma_l^2 \right]^{1/2} =$$

$$= (\bar{l}^2 \sigma_L^2 + \bar{L}^2 \sigma_l^2)^{1/2}$$

$$\sigma_s = \left\{ (16,28 \cdot 0,05)^2 + (54,35 \cdot 0,02)^2 \right\}^{1/2} = \pm 1,36 \text{ m}^2$$

$$\sigma_s = \pm 1,36 \text{ m}^2$$

#### Aplicația 5

Intr-un triunghi dreptunghic s-au măsurat direct catetele obținându-se următoarele rezultate.

$$b = 43,85 \pm 2 \text{ cm}$$

$$c = 97,26 \pm 5 \text{ cm.}$$

Să se calculeze ipotenuza și eroarea acesteia.

Notăm ipotenuza triunghiului:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\bar{a} = \sqrt{43,85^2 + 97,26^2} = 106,68 \text{ m}$$

Dispersia → abaterea standard:

$$\sigma_a^2 = \left( \frac{\partial a}{\partial b} \right)_b^2 \cdot \sigma_b^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial c} \right)_c^2 \cdot \sigma_c^2 = \frac{2\bar{b}}{2\sqrt{\bar{b}^2 + \bar{c}^2}} \cdot \sigma_b^2 + \frac{2\bar{c}}{2\sqrt{\bar{b}^2 + \bar{c}^2}} \cdot \sigma_c^2 =$$
$$= \frac{2 \cdot 43,85}{2\sqrt{43,85^2 + 97,26^2}} \cdot 4 \text{ cm}^2 + \frac{2 \cdot 97,26}{2\sqrt{43,85^2 + 97,26^2}} \cdot 85 \text{ cm}^2 =$$

$$= 0,41 \cdot 0,04 + 0,91 \cdot 0,25 = 0,24$$

$$\sigma_a = \pm 4,9 \text{ cm}$$

### Aplicația 6

Un unghi a fost măsurat în condiții identice de 5 ori obținându-se valorile din tabel (coloana  $M_i^0$ ). Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă a unghiului și parametri preciziei.

Tabel 2.6

Nr. crt.	Valoare măsurată $M_i^0$	Valoare redusă $x_i = M_i^0 - M_0$	Corecția $v_i = M - M_i^0$
1	18.75.40	+10 <sup>cc</sup>	-3 <sup>cc</sup>
2	18.75.37	+7 <sup>cc</sup>	0
3	18.75.36	+6 <sup>cc</sup>	+1 <sup>cc</sup>
4	18.75.34	+4 <sup>cc</sup>	+3 <sup>cc</sup>
5	18.75.38	+8 <sup>cc</sup>	-1 <sup>cc</sup>
□	$M_0 = 18^g 75^c 30^{cc}$	$[x] = +35^{cc}$	0

Se consideră valoarea de referință  $M_0 = 18^g 75^c 30^{cc}$

$[x] = +35^{cc}$  (eroare de neînchidere)

$$- \frac{[x]}{n} = \frac{+35}{5} = +7^{cc} \text{ (eroare pe unitatea de măsură)}$$

$$- \text{Media : } M = M_0 + \frac{[x]}{n} = 18.75.30 + 7^{cc} = 18.75.37$$

Pentru calcululș' corecțiilor se folosește relația:

$$v_i = M - M_i$$

$$v_1 = -3^{cc}$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 1^{cc}$$

$$v_4 = 3^{cc}$$

$$v_5 = -1^{cc}$$

$[vv] = 20^{cc}$  din care rezultă varianța:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{20^{cc}}{4} = 5^{cc}$$

- Abaterea standard pentru o măsurătoare:

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = 2^{cc},24$$

- Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{2^{cc},24}{\sqrt{5}} = \pm 1^{cc}$$

Valoarea unghiului măsurat va fi:

$$\hat{u} = 18.75.37 \pm 1^{cc}$$

### Aplicația 7

Pentru determinarea cotei unui punct  $P$  din trei puncte  $A, B, C$  de cotă cunoscută, s-au măsurat 3 diferențe de nivel rezultând următoarele date:

Tabel 2.7

Punct	Cota $H_i^0$ (m)	Diferența de nivel măsurată $\Delta H_i^0$ (m)	Ponderea ( $p_i$ )
A	86,144	+1,386	1,3
B	89,710	-2,172	0,6
C	87,022	+0,511	0,9

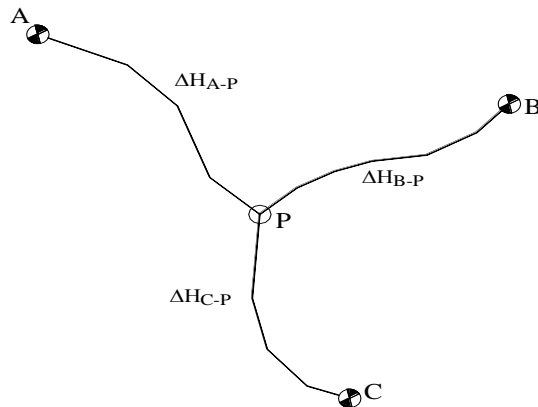


Figura 2.1 – Rețea de nivelment geometric

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă a cotei punctului  $P$  și precizia de determinare, considerând valoarea de referință  $H_0 = 87,500\text{m}$

**Se calculează 3 valori pentru cota punctului  $P$ , valori cărora li se atribuie ponderea diferențelor de nivel din care au fost calculate:**

Tabel 2.8

Traseu	Cota calculată ( $H_i$ )	Pondere ( $p_i$ )	Valoare redusă $x_i = H_i - H_0$ [mm]	$p_i \cdot x_i$
A-P	87,530	1,3	+30	39,0
B-P	87,538	0,6	+38	22,8
C-P	87,533	0,9	+33	29,7
$H_0 = 87,500$ (m)		$[p_i] = 2,8$		91,5

Tabel 2.8

Corecții $v_i = \{[p \cdot x] / [p]\} - x_i$ [mm]	$p_i \cdot v_i$
2,7	+3,5
-5,3	-3,2
-0,3	-0,3
	0

Se consideră valoarea de referință  $H_0 = 87,500$  m față de care se calculează valorile reduse  $x_i = H_i - H_0$

$$\frac{[p_i \cdot x_i]}{[p]} = \frac{91,5}{2,8} = 32,7 \text{ mm}$$

Se calculează  $[p_i \cdot x_i] = 91,5$

Se calculează valoarea cea mai probabilă a cotei:

$$H_m = 87,500\text{m} + 32,7\text{mm}$$

$$H_m = 87,533\text{m}$$

Se calculează  $[pvv] = 26,41$

*Evaluarea preciziei măsurătorilor*

- Se calculează varianța :

$$\sigma^2 = \frac{[pvv]}{n-1} = \frac{26,41}{2} = 13,20 \text{ mm}$$

- Abaterea standard a unității de pondere:

- Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\sum p_i v_i^2}{n-1}} = \frac{\pm 3,63}{\sqrt{7}} = \pm 1,387 \text{ mm}$$

$$\sigma_0 = \frac{\pm 3,63}{\sqrt{2,8}} = \pm 2,2 \text{ mm} = 0,002 \text{ m}$$

Valoarea cotei punctului  $P$  va fi:

$$H_P = H_m + \Delta h_m$$

$$H_P = 87,533 \pm 0,002 \text{ m}$$

*Compensarea diferențelor de nivel măsurate*

- Calculul diferențelor de nivel compensate:

$$\Delta H_i = \Delta H_i^0 + v_i$$

- Abaterile standard pentru valorile  $\Delta H_i$ :

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{P_i}}$$

Tabel 2.9

Pct	Dif. de nivel măs.	Corecții $v_i$ [m]	Dif. de nivel compensate	$\Delta h_i$ [mm]	Cota calculată $H_P$ [m]
A	+1,386	+0,002 7	+1,3887	3,2	87,5327
B	-2,172	-0,0053	-2,1773	4,7	87,5327
C	+0,511	-0,0003	+0,5107	3,8	87,5327

Determinarea cotelor punctului  $P$  funcție de diferențele de nivel compensate:

$$H_P = H_A + \Delta H_{comp}$$

$$H_P = H_B + \Delta H_{comp}$$

$$H_P = H_C + \Delta H_{comp}$$

### Aplicația 8

Pentru determinarea înălțimii unei clădiri se măsoară de mai multe ori cu ajutorul unui teodolit unghiurile verticale  $\alpha_i$  și cu ajutorul unei rulete se măsoară distanța orizontală  $d$ , valorile obținute fiind trecute în tabelele de mai jos.

Tabel

2.10

Nr. măs.	Unghiuri verticale (grade)	
	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	100.62.50	97.69.60
2	100.62.30	97.69.80
3	100.62.40	97.69.50
4	100.62.50	97.69.70
5	100.62.40	97.69.60
6	100.62.60	97.69.50
	$M_0=100.62.30$	$M_0=97.69.50$

Tabel 2.11

Nr. măs.	Distanța orizontală "d"
1	132,530
2	132,560
3	132,580
4	132,550
	$M_0=132,500m$

Se cere valoarea cea mai probabilă a înălțimii clădirii și precizia de determinare a acesteia.

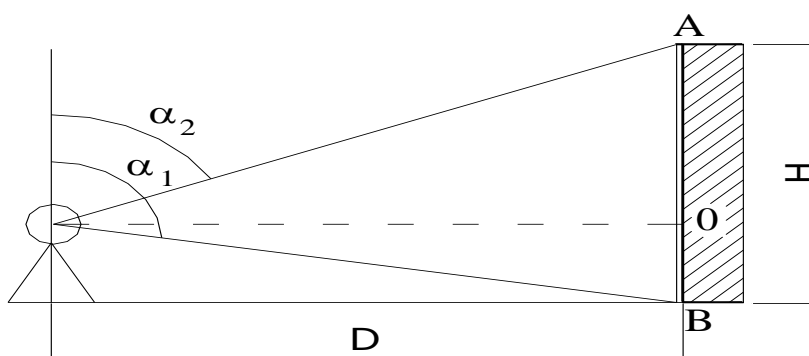


Figura 2.2 – Determinarea înălțimii unui obiectiv

Din figură se observă că:

$$H = AO + OB = d \operatorname{ctg} \alpha_2 - d \operatorname{ctg} \alpha_1 = d (\operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \alpha_1)$$

Deci, înălțimea clădirii se obține ca funcție de valorile măsurate direct  $d$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

*Etape 1 – Compensarea măsurătorilor unghiului vertical  $\alpha_1$*

Tabel 2.12

Nr. crt.	Valoarea măsurată ( $M_i^0$ ) $\rightarrow \alpha_1$	Valoare măsurată $M_i^0 - M_0$ ( $x_i$ )	Corecția ( $v_i$ )
1	100.62.50	+20 <sup>cc</sup>	-5 <sup>cc</sup>
2	100.62.30	0 <sup>cc</sup>	+15 <sup>cc</sup>
3	100.62.40	+10 <sup>cc</sup>	+5 <sup>cc</sup>
4	100.62.50	+20 <sup>cc</sup>	-5 <sup>cc</sup>
5	100.62.40	+10 <sup>cc</sup>	+5 <sup>cc</sup>
6	100.62.60	+30 <sup>cc</sup>	-15 <sup>cc</sup>
$\Sigma$	$M_0=100.62.30$	$[x] = +90^{\text{cc}}$	$[v] = 0$

*Etape 2 – Compensarea măsurătorilor unghiului vertical  $\alpha_2$*

Tabel 2.13

Nr. crt.	Valoarea măsurată ( $M_i^0$ ) $\rightarrow \alpha_2$	Valoarea redusă ( $x_i$ )	Corecția ( $v_i$ )
1	97.69.60	+10 <sup>cc</sup>	+2 <sup>cc</sup>
2	97.69.80	+30 <sup>cc</sup>	-20 <sup>cc</sup>
3	97.69.50	0 <sup>cc</sup>	+12 <sup>cc</sup>
4	97.69.70	+20 <sup>cc</sup>	-8 <sup>cc</sup>
5	97.69.60	+10 <sup>cc</sup>	+2 <sup>cc</sup>
6	97.69.50	0 <sup>cc</sup>	+12 <sup>cc</sup>
$\Sigma$	$M_0=97.69.50$	$[x]=+70^{\text{cc}}$	$[v]=0$

**Valorile de referință se aleg:**

$$\alpha_1 \rightarrow M_0 = 100.62.30$$

$$\alpha_2 \rightarrow M_0 = 97.69.50$$

Se calculează valoarea redusă:  $x_i = M_i^0 - M_0$  și  $[x]$

Eroarea pe unitatea de măsură:

$$\frac{[x]}{n} = \begin{cases} +15^{\text{cc}} \\ +12^{\text{cc}} \end{cases}$$

Calculul valorilor medii pentru  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$ :

$$M = M_0 + \frac{[x]}{n} = \begin{cases} 100.62.45 \\ 97.69.61 \end{cases}$$

Calculul varianței:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{550}{5} = 110^{cc}$$

Abaterea standard pentru o măsurătoare:

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 10,49^{cc}$$

Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{10,49}{\sqrt{6}} = \pm 4^{cc},3$$

Pentru  $\alpha_2$ :

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{684}{5} = 136^{cc},8$$

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 11^{cc},70$$

Valoarea finală a unghiurilor va fi:

$$\alpha_1 = 100.62.45 \pm 4^{cc},3$$

$$\alpha_2 = 97.69.62 \pm 4^{cc},8$$

**Etapa 3 - Compensarea măsurătorilor de distanță**

Se alege valoarea de referință:  $M_0 = 132,500$  m

Tabel 2.14

Nr. crt.	Valoarea măsurată $M_i^0$ (m)	Valoarea redusă $x_i = M_i^0 - M_0$ (mm)	Corecția $v_i = M - M_i^0$ (mm)
1	132,530	+30	+25
2	132,560	+60	-5



3	132,580	+80	-25
4	132,550	+50	5
$\Sigma$	$M_0=132,500$	$[x]=220$	$[v]=0$

$$\frac{[x]}{n} = \frac{22cm}{4} = 5,5cm$$

$$M = M_0 + \frac{[x]}{n} = 132,555(m)$$

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{550}{5} = 110mm$$

Calculul varianței:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{13}{4} = 4,33mm$$

Distanța:  $d = 132,555m \pm 1,04cm$

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 2,08mm$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \pm 1,04mm$$

Valoarea cea mai probabilă (medie) a înălțimii clădirii este:

$$H = d[\text{ctg}(\alpha_2) - \text{ctg}(\alpha_1)] = 132,555[\text{ctg}(97.69.62) - \text{ctg}(100.62.45)] = 6,099m$$

Pentru determinarea parametrilor preciziei trebuie calculate derivatele parțiale în raport cu cele trei variabile  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $d$ :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial d}\right) = \text{ctg}(\overline{\alpha_2}) - \text{ctg}(\overline{\alpha_1}) = 0,046$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{d}{\sin^2 \alpha_1} = 13256,8(cm)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{d}{\sin^2 \alpha_2} = 13272,9(cm)$$

Varianța funcției de mai multe variabile:

$$\sigma_{(F)}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots$$

$$\sigma_{(H)}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_0^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)_0^2 \cdot \sigma_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)_0^2 \cdot \sigma_{\alpha_2}^2 =$$

$$= 0,046^2 \cdot 1,0^2 \text{ cm}^2 + 13256,8^2 \text{ cm}^2 \cdot \left(\frac{4.3}{\rho^{cc}}\right)^2 + 13272.9^2 \text{ cm}^2 \left(\frac{4.8}{\rho^{cc}}\right)^2$$

Unde “ $\rho$ ” reprezintă coeficientul de transformare din secunde în radiani:  
 $\rho^{cc} = 636620$

$$\sigma_{(H)}^2 = 0,002116 \text{ cm}^2 + 0,0080 \text{ cm}^2 + 0,010 \text{ cm}^2 = 0,0201 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{(H)} = 0,14 \text{ cm}$$

Valoarea cea mai probabilă a înălțimii clădirii se poate scrie astfel:

$$H = 6,099 \text{ m} \pm 1,4 \text{ mm}$$

### Probleme recapitulative

1 - Pentru determinarea unui unghi către două puncte de detaliu, se execută măsurători repetate ale direcțiilor unghiulare către cele două puncte, obținând valorile din tabelul următor.

Se cere să se calculeze valorile cele mai probabile ale direcțiilor măsurate și coeficientul de corelație al celor două măsurători.

.Tabel 2.15

Nr. măsur.	Direcția 1	Direcția 2
1	204.61.17	317.48.51
2	204.62.25	317.48.27
3	204.61.75	317.48.94
4	204.61.44	317.48.30
5	204.62.07	317.48.24
6	204.62.83	317.48.64

2 - Se consideră 4 valori reprezentând lungimea dintre două puncte, obținută în urma a 4 măsurători independente de aceeași precizie.

Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă și abaterea standard ale distanței măsurate.

Tabel 2.16

Nr.măsur.	Valoarea măsurată (m)
1	74,218
2	74,217
3	74,210
4	74,224

3 - Pentru determinarea cotei unui punct "B" din cinci puncte C,D,E,F,G de cotă cunoscută, s-au măsurat 5 diferențe de nivel rezultând următoarele date:

Tabel

2.17

Punct	Cota " $H_i^0$ "(m)	Diferența de nivel măsurată $\Delta H_i^0$ (m)	Ponderea ( $p_i$ )
C	50,210	+0,286	0,2
D	52,400	-1,810	1,3
E	51,100	-0,604	0,9
F	54,600	-4,100	0,6
G	51,200	-0,740	1,1

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă a cotei punctului P și precizia de determinare, considerând valoarea de referință  $H_0 = 50,000$ m.

## CAPITOLUL 4

### EVALUAREA PRECIZIEI DETERMINĂRILOR UTILIZÂND ELIPSA ERORILOR

La măsurătorile de precizie, pe lângă valorile probabile ale mărimilor măsurate sau deduse indirect ne interesează și precizia acestora. Această problemă se pune deci și în cazul rețelelor geodezice.

Poziția planimetrică a unui punct în urma compensării depinde de doi parametri:  $X$  și  $Y$ , deci avem de-a face cu un sistem bidimensional de încredere care reprezintă o *elipsă*. Erorile medii pătratice  $m_x$  și  $m_y$  calculate în urma compensării își schimbă însă valorile la o rotație a axelor de coordonate ceea ce produce o neuniformitate în aprecierea preciziei.

În acest caz este necesar să se construiască elipsa erorilor, care este independentă de sistemul de axe ales. Cu ajutorul elipsei erorilor putem determina erorile în poziția punctelor pentru orice direcție (deci și pentru direcția axelor de coordonate) cât și direcțiile pentru care erorile sunt maxime sau minime.

Semiaxele elipsei și unghiurile acestora cu axele de coordonate se pot determina cu ajutorul unui sistem rectangular  $u, v$ , rotit cu unghiul  $\varphi$  față de sistemul inițial  $XY$  (figura 4.1).

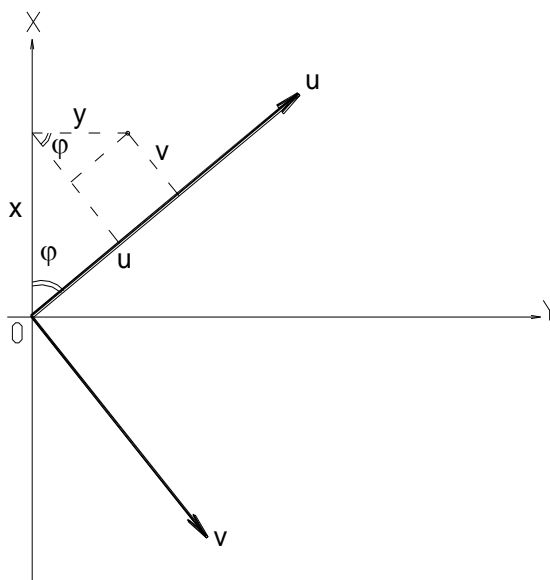


Figura 4.1 – Elementele elipsei erorilor

Coordonatele unui punct  $P$  în sistemul  $uv$  în funcție de coordonatele  $XY$  vor fi:

$$\begin{aligned} u &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ v &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Se observă că " $u$ " este o funcție liniară de  $X$  și  $Y$ , mărimi determinate indirect. Pentru determinarea erorii lui " $u$ " se aplică formula erorii unei funcții de mărimi determinate indirect. Vom avea:

$$Q_{uu} = Q_{xx} \cos^2 \varphi + 2Q_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + Q_{yy} \sin^2 \varphi \quad (4.2)$$

$$\text{iar eroarea medie: } m_u = \pm m \sqrt{Q_{uu}} \quad (4.3)$$

Valorile maxime sau minime ale funcției se obțin pentru  $\frac{\partial Q_{uu}}{\partial \varphi} = 0$

Relația mai poate fi scrisă și sub forma:

$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + Q_{xy} \sin 2\varphi \quad (4.4)$$

$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2} \cos 2\varphi + Q_{xy} \sin 2\varphi$$

Calculând derivata în raport cu  $\varphi$  se obține:

$$\frac{\partial Q_{uu}}{\partial \varphi} = -(Q_{xx} - Q_{yy}) \sin 2\varphi + 2Q_{xy} \cos 2\varphi = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{de unde rezultă: } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad (4.6)$$

având soluțiile:  $(\varphi)$  și  $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

Cele două direcții obținute sunt ortogonale:  $(\varphi)$  reprezintă unghiul format de axa  $OX$

cu direcția semiaxe mari a elipsei;  $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  dă valoarea minimă, adică unghiul

format de axa  $OX$  cu semiaxa mică.

Elipsa erorilor reprezintă un invariant al erorilor în poziția planimetrică a unui punct. Având construită elipsa erorilor într-un punct putem determina eroarea pe orice direcție pe cale grafică astfel:

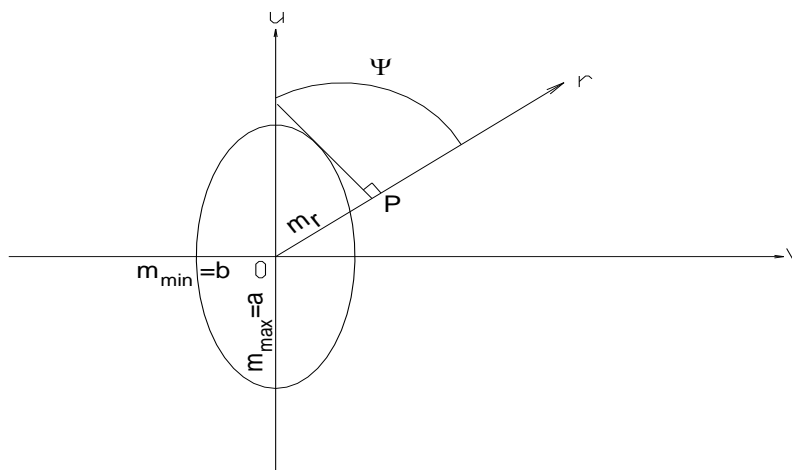


Figura 4.2 – Reprezentarea grafică a elipsei erorilor

Se coboară o perpendiculară pe direcția  $r$  tangentă la elipsă, mărimea erorii “ $m_r$ ” fiind egală cu segmentul cuprins între centrul elipsei și piciorul perpendicularei ( $OP$ )

Analitic, acest segment are valoarea dată de:

$$m_r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi \quad (4.7)$$

$$m_r^2 = m_{\max}^2 \cos^2 \varphi + m_{\min}^2 \sin^2 \varphi$$

Un caz particular al acestei relații avem când: ....  $\varphi = 0$ , rezultă  $m_r = m_x$  și  $\varphi = 100$ , rezultă  $m_r = m_y$ , adică proiecțiile elipsei pe direcția  $X$  și  $Y$  (figura 4.3).

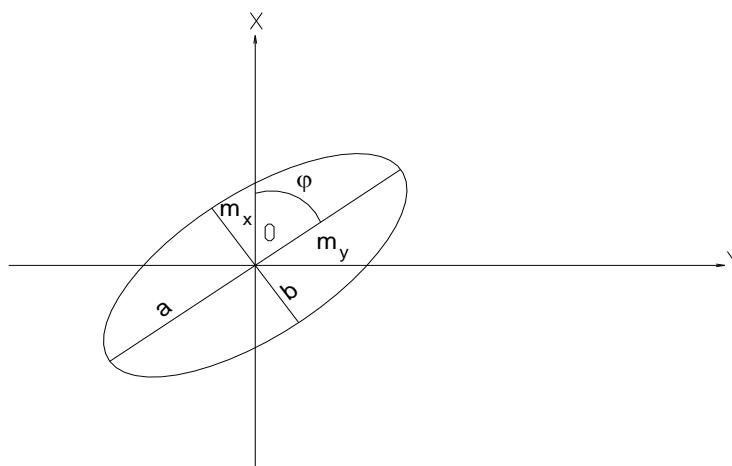


Figura 4.3 – Unghiul de rotație al elipsei erorilor

## Aplicația 1

Dintr-o lucrare de triangulație s-au extras din matricea coeficienților de pondere elementele corespunzătoare punctelor  $A$  și  $B$  înscrise în tabelul următor și exprimate în  $cm$ .

**Tabel  
4.1**

Coeficienți de pondere	$X_{(A)}$	$Y_{(A)}$	$X_{(B)}$	$Y_{(B)}$
$X_{(A)}$	+4,10	- 0,17	+ 4,00	-2,20
$Y_{(A)}$		+ 4,20	+2,10	+3,40
$X_{(B)}$			+5,60	+1,20
$Y_{(B)}$				+4,03

Se cere să se traseze elipsele în punctele  $A$  și  $B$  cât și elipsa relativă pentru aceste puncte. Orientarea direcției  $AB$  este:  $\theta = 63.^{\circ}81^c$  iar abaterea standard a unității de pondere este  $\sigma_0 = 1 \text{ cm}$

Pentru punctul  $A$ :

$$Q_{xx} = +4,10$$

$$Q_{yy} = +4,20$$

$$Q_{xy} = -0,17$$

Orientarea semiaxe mari (unghiul făcut cu axa  $OX$ ):

$$2\phi = \arctg \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{-0,34}{-0,1} \right) = \frac{1}{2} (\arctg 3,4) = 40.^{\circ}89.$$

$$\phi = 140.^{\circ}89$$

$$Q_{max,min} = S_{12} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

$$= 4,15 \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,01 + 0,1156} = 4,15 \pm 0,17$$

$$Q_{max,min} = 4,15 \pm 0,17$$

$$Q_{max} = 4,32 \text{ (cm)}$$

$$Q_{min} = 3,98 \text{ (cm)}$$

Semiaxe elipsei erorilor în punctul  $A$ :

$$a = \sigma_0 \sqrt{Q_{max}} = 1 \cdot \sqrt{4,32} = 2,08 \text{ cm.}$$

$$b = \sigma_0 \sqrt{Q_{min}} = 1 \cdot \sqrt{3,98} = 1,99 \text{ cm}$$

Pentru punctul  $B$ :

$$Q_{xx} = 5,60$$

$$Q_{yy} = 4,03$$

$$Q_{xy} = 1,20$$

Orientarea semiaxe mari:

$$2\phi = \operatorname{arctg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{+2,4}{+1,57} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1,52866) = 31.^{\circ}56.03$$

$$Q_{\max, \min} = S_{12} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

$$= 4,815 \pm \frac{1}{2} \sqrt{2,4649 + 5,76} = 4,815 \pm \frac{2,867}{2}$$

$$Q_{\max} = 4,815 + 1,433 = 6,2 \text{ (cm)}$$

$$Q_{\min} = 4,815 - 1,433 = 3,4 \text{ (cm)}$$

Semiaxele elipsei erorilor în punctul B:

$$a = 1 \cdot \sqrt{6,2} = 2,5 \text{ cm}$$

$$b = 1 \cdot \sqrt{3,4} = 1,8 \text{ cm}$$

Calculul elementelor elipsei relative:

$$Q_{xx} = 4,10 + 5,60 - 2 \cdot 4,00 = +1,70 - (Q_{xxA} + Q_{xxB} - 2Q_{xxAB})$$

$$Q_{yy} = 4,20 + 4,03 - 2 \cdot 3,40 = +1,43 - (Q_{yyA} + Q_{yyB} - 2Q_{yyAB})$$

$$Q_{xy} = (-0,17) + 1,20 - (2,20) - 2,10 = +1,13$$

Orientarea semiaxe mari:

$$\phi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2Q_{XY}}{Q_{XX} - Q_{YY}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2,26}{0,27} = 44.^{\circ}83.$$

$$Q_{\max, \min} = \frac{Q_{XX} + Q_{YY}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{XX} - Q_{YY})^2 + 4Q_{XY}^2}$$

$$= 1,615 \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,1369 + 5,1076} = 1,615 \pm 1,145$$

$$Q_{\max} = 2,76 \text{ (cm)} \approx 2,8 \text{ cm.}$$

$$Q_{\min} = 0,47 \text{ (cm)} \approx 0,5 \text{ cm.}$$

Semiaxele elipsei relative:

$$a = 1 \cdot \sqrt{2,08} = 1,7 \text{ cm}$$

$$b = 1 \cdot \sqrt{0,5} = 0,7 \text{ cm}$$

Reprezentarea grafică a elipsei erorilor se face la scară naturală (scara 1:1), funcție de elementele obținute prin calcul (unghiul de orientare al semiaxe mari, semiaxa mare și mică).



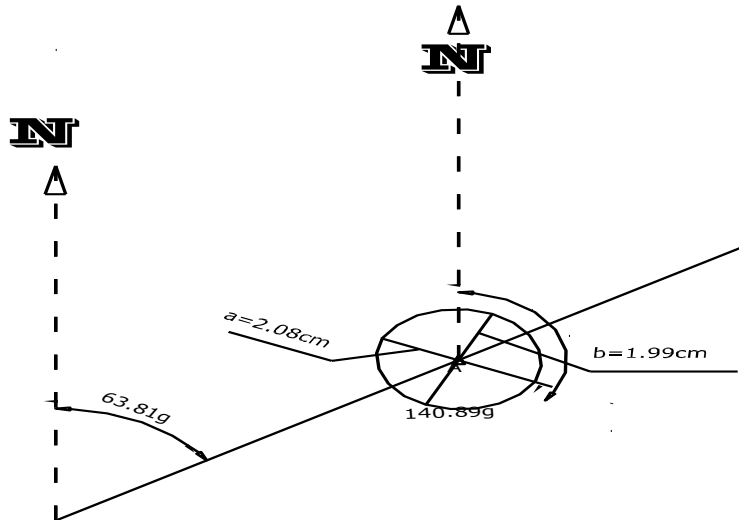


Figura 4.4 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctul A

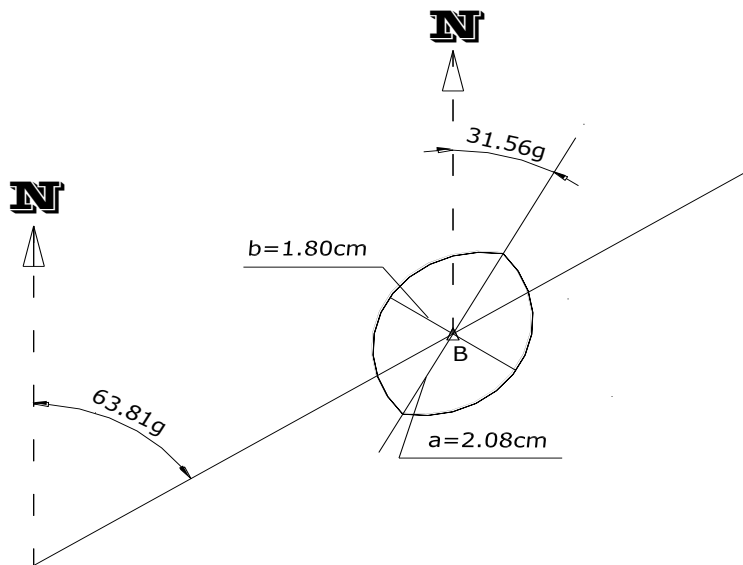


Figura 4.5 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctul B

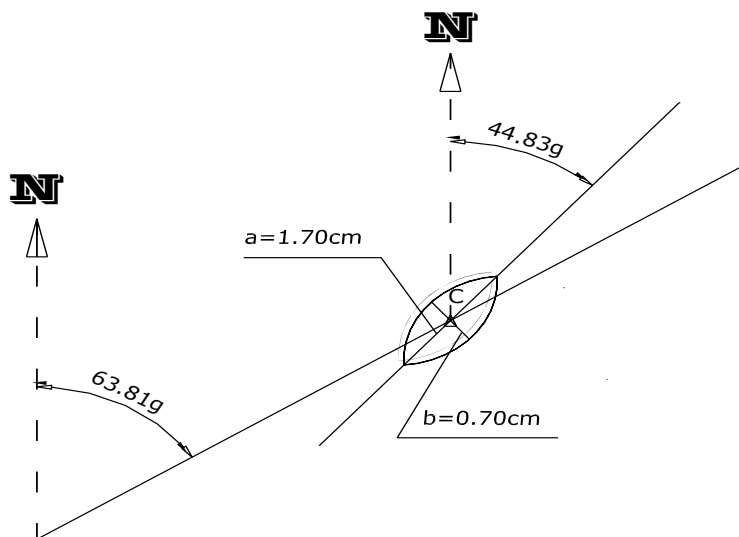


Figura 4.6 – Reprezentarea elipsei erorilor relativă

### Aplicația 2

Pornind de la tabelul coeficienților ecuațiilor normale, se cere să se determine necunoscutele  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$  prin rezolvarea sistemului cu schema Gauss – Doolittle extinsă, ce definesc poziția planimetrică a două puncte din teren A și B.

Tabel

4.2

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[a]$	$[aS]$	Control
0.39745	0.08189	-0.29011	0.0713	-29.42507	-29.22872	-29.22871
	0.81905	-0.51449	-0.58360	-11.74325	-11.94041	-11.94040
		0.62615	0.23976	16.87352	16.93483	16.93483
			0.59159	11.27591	11.53078	11.53078

Pe baza coeficienților de pondere calculați în schema Gauss-Doolittle extinsă, și alegând abaterea standard  $\tau_0 = 2,8$ , se vor reprezenta la scară naturală elipsele erorilor în punctele A și B.

Orientarea direcției dintre punctele A și B este de  $90^{\circ}$ .

Rezolvarea problemei implică parcurgerea următoarelor etape:

- rezolvarea sistemului normal cu schema Gauss-Doolittle extinsă;

- obținerea soluțiilor pe baza coeficienților liniei roșii a sistemului;
- calculul coeficienților de pondere pătratici și micști;
- calculul elementelor caracteristice elipsei erorilor;
- reprezentarea grafică a elipsei erorilor pentru punctele A și B la scara 1:2.

Tabel 4.3

[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[al]	[aS]
0.39745	0.08189	-0.20911	0.00713	-29.42507	-29.22872
-1	-0.206038	0.729928	-0.017939	74.034646	73.540621
	0.81905	-0.51449	-0.58360	-11.74325	-11.94041
	0.802178	-0.454716	-0.585069	-5.680567	-5.918183
	-1	0.566852	0.729351	7.081430	7.377643
		0.62615	0.23976	16.87352	16.93483
		0.156634	-0.086683	-7.824703	-7.754765
		-1	0.553411	49.955329	49.508823
			0.59159	11.27591	11.53078
			0.116770	3.330362	3.447109
			-1	-28.52069	-28.520502

Tabel 4.3-continuare

Control	$Q_{XXA}$	$Q_{YYA}$	$Q_{XXB}$	$Q_{YYB}$
--	-1	0	0	0
73.540587	2.51604	0	0	0
--	0	-1	0	0
-5.918174	0.206038	-1	0	0
7.377632	-0.256848	1.246606	0	0
--	0	0	-1	0
-7.754752	-0.613135	-0.566852	-1	0
49.50874	3.914444	3.618959	6.38431	0
--	0	0	0	-1
3.447132	-0.171103	-1.043053	-0.553411	-1
-28.52069	1.465299	8.932543	4.739325	8.563843

#### Observații:

- Termenii  $Q_{XXA}$ ,  $Q_{YYA}$ ,  $Q_{XXB}$ ,  $Q_{YYB}$  reprezintă coeficienții de pondere pătratici pentru punctele A și B.

Calculul necunoscutelor (soluțiilor) X, Y pentru punctele A și B:

$$-1 \cdot Y_B + (-28.52069) = 0 \rightarrow Y_B = -28.52069$$

$$-1 \cdot X_B + 0.553411 \cdot Y_B + 49.955329 = 0 \rightarrow X_B = 34.1717$$

$$-1 \cdot Y_A + 0.566852 \cdot X_B + 0.729351 \cdot Y_B + 7.081430 = 0 \rightarrow Y_A = 5.6501$$

$$-1 \cdot X_A + (-0.206038) \cdot Y_A + 0.729928 \cdot X_B + (-0.017939) + 74.034646 = 0 \rightarrow X_A = 98.3250$$

Verificarea soluțiilor obținute:

Soluțiile obținute pe baza schemei Gauss-Doolittle extinsă se verifică prin respectarea condiției impuse de următoarea relație:

$$[(S-Q-I) \cdot x_j] = - [I]$$

**Verificarea soluțiilor obținute se va face pe linia cu coeficienții ecuațiilor de condiție ale sistemului normal.**

$$[(S-Q-I) \cdot x_j] = [(-29.22872 + 1 + 29.42507) \cdot 98.3250 + (-11.94041 + 1 + 11.74325) \cdot 5.6501 + (16.93483 + 1 + 16.87352) \cdot 34.1717 + (11.53078 + 1 + 11.27591) \cdot (-28.52069)] = 13.0181$$

$$[I] = -29.42507 + (-11.74325) + 16.87352 + 11.27591 = -13.0188$$

$$\rightarrow 13.0181 \approx 13.0188$$

*Calculul coeficienților de pondere*

Coeficienții de pondere se vor calcula pe coloanele schemei Gauss-Doolittle extinse, iar valorile obținute se vor nota cu semn schimbat.

Coeficienții de pondere pentru punctul A:

$$Q_{XXA} = 2.51604 \cdot (-1) + (-0.256848) \cdot (0.206038) + 3.914444 \cdot (-0.613135) + 1.465299 \cdot (-0.171103) = -5.2198$$

$$\rightarrow Q_{XXA} = 5.2198$$

$$Q_{YYA} = 0 \cdot 0 + 1.246606 \cdot (-1) + 3.618959 \cdot (-0.566852) + 8.932543 \cdot (-1.043053) = -12.6151$$

$$\rightarrow Q_{YYA} = 12.6151$$

$$Q_{XYA} = 2.51604 \cdot 0 + (-0.256848) \cdot (-1) + 3.914444 \cdot (-0.566852) + 1.465299 \cdot (-1.043053) = -3.4904$$

$$\rightarrow Q_{XYA} = 3.4904$$

Coeficienții de pondere pentru punctul B:

$$Q_{XXB} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 6.384310 \cdot (-1) + 4.739325 \cdot (-0.553411) = -9.0071$$

$$\rightarrow Q_{XXB} = 9.0071$$

$$Q_{YYB} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 8.563843 \cdot (-1) = -8.563843$$

$$\rightarrow Q_{YYB} = 8.5638$$

$$Q_{XYB} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 6.38431 \cdot 0 + 4.739325 \cdot (-1) = -4.739325$$

$$\rightarrow Q_{XYB} = 4.7393$$

*Calculul elementelor caracteristice elipsei erorilor*

Elipsa erorilor în punctul A

Coeficienții de pondere care se iau în calcul pentru elipsa erorilor în punctul A sunt:

$$Q_{XXA} = 5.2198$$

$$Q_{YYA} = 12.6151$$

$$Q_{XYA} = 3.4904$$

Determinarea valorilor maxime și minime ale coeficienților de pondere:

$$Q_{\max, \min} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} = 8.9175 \pm \frac{10.1697}{2}$$

$$Q_{\max} = 14.0023$$

$$Q_{\min} = 3.8327$$

Determinarea valorilor semiaxelor elipsei erorilor:

$$a = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\max}} = 10.47 \text{ cm}$$

$$b = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\min}} = 5.48 \text{ cm}$$

Determinarea unghiului de rotației al semiaxe mari:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2Q_{XYA}}{Q_{XXA} - Q_{YYA}} = \frac{6.9808}{-7.3953} = -0.943945$$

$$\rightarrow \varphi = 175.91$$

## Elipsa erorilor în punctul B

Coeficienții de pondere care se iau în calcul pentru elipsa erorilor în punctul B sunt:

$$Q_{XXB} = 9.0071$$

$$Q_{YYB} = 8.5638$$

$$Q_{XYB} = 4.7393$$

Determinarea valorilor maxime și minime ale coeficienților de pondere:

$$Q_{\max, \min} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} = 8.7855 \pm 4.7445$$

$$Q_{\max} = 13.530$$

$$Q_{\min} = 4.041$$

Determinarea valorilor semiaxelor elipsei erorilor:

$$a = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\max}} = 10.30 \text{ cm}$$

$$b = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\min}} = 5.63 \text{ cm}$$

Determinarea unghiului de rotației al semiaxe mari:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2Q_{XYB}}{Q_{XXB} - Q_{YYB}} = \frac{9.4786}{0.4433} = 21.3819$$

$$\rightarrow \varphi = 48.51$$

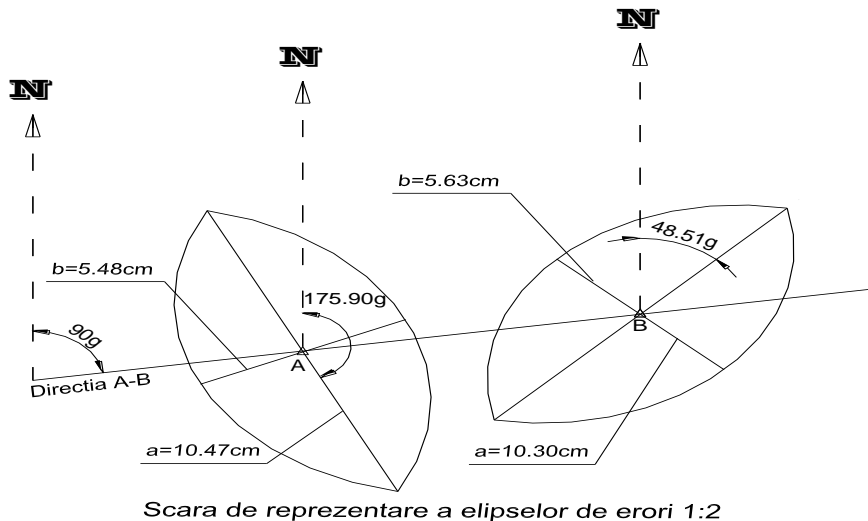


Figura 4.7 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctele A și B

## CAPITOLUL 5 COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR CONDIȚIONATE

Metoda măsurătorilor condiționate se aplică, în general în lucrările topo-geodezice, la compensarea rețelelor de sprijin (triangulație, trilateratie, poligonometrie, nivelment).

O rețea de sprijin, de exemplu de triangulație - este constituită dintr-o succesiune de figuri geometrice (triunghiuri, patrulatere, poligoane).

Pentru realizarea acestei rețele se măsoară unghiuri și laturi.

Pentru rezolvarea problemei de compensare este util să se evalueze numărul acestor relații cât și caracterul lor, pastrând însă doar relațiile independente.

Numărul ecuațiilor de condiție independente este egal cu numărul măsurătorilor efectuate în plus (nr. gradelor de libertate).

Se consideră  $n$  mărimi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  pentru determinarea cărora s-au efectuat măsurători directe, găsindu-se rezultatele  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Presupunem că cele  $n$  necunoscute  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , trebuie să satisfacă  $r$  relații de condiție independente între ele (rezultă deci că numărul mărimilor măsurate în plus este  $r$ ):

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

$$f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (5.1)$$

$$\dots$$

$$f_r(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Valorile măsurate direct  $l_1, l_2, \dots, l_n$  nu vor satisface riguros acest sistem, astfel încât prin înlocuirea necunoscutelor  $X_1, X_2, \dots, X_n$  prin  $l_1, l_2, \dots, l_n$  vom obține rezultate diferite de zero:

$$f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (5.2)$$

Mărimile  $w_i$  poartă denumirea de discordanțe, nepotriviri sau *termeni liberi*.

Problema care se pune este de a găsi corecțiile  $v_1, v_2, \dots, v_n$  care, aplicate mărimilor măsurate  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , să facă să dispară aceste mici discordanțe. Deci, pentru a fi satisfăcut sistemul trebuie să avem:

$$X_i = l_i + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.3)$$

Notând:  $f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) = w_i \quad (i = 1, 2, \dots, r)$

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)_0 = a_i \quad \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_0 = b_i \quad \left( \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right)_0 = r_i \quad (5.4)$$

Cu aceste notații se obține:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 = 0$$

$$\dots$$

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r = 0 \quad (5.5)$$

Acesta este *sistemul liniar al ecuațiilor de condiție a corecțiilor*.

Mărimea  $w$  reprezintă termenul liber al ecuației de condiție și reprezintă în același timp valoarea ecuației pentru mărimile măsurate. Această observație este utilă pentru calculul practic al termenului liber al ecuațiilor de condiție.

În sistemul liniar al ecuațiilor de condiție întrucât numărul ecuațiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor ( $r < n$ ), sistemul este nedeterminat, gradul de nedeterminare fiind  $(n-r)$ .

Pentru rezolvarea problemei, deci pentru determinarea tuturor corecțiilor  $v_i$ , vom folosi metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[v v] = \min . \quad (5.6)$$

sau, în cazul măsurătorilor ponderate:

$$[p v v] = \min . \quad (5.7)$$

Corecțiile de determinat  $v_i$ , trebuind să satisfacă atât condiția de minim cât și sistemul liniar, avem de-a face cu o problemă de *minim condiționat*, care se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange.









Efectuând derivatele parțiale în raport cu  $v$  și  $k$  și punând de asemenea condiția că acestea să fie nule, se obține:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial v_i} &= 2p_i v_i - 2a_i k_{1_1} - 2b_i k_2 - \dots - 2r_i k_r = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_1} &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 = 0 \text{ sau } [av] + w_1 = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_2} &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 = 0 \text{ sau } [bv] + w_2 = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_r} &= r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r = 0 \text{ sau } [rv] + w_r = 0\end{aligned}\tag{5.16}$$

Ecuatiile (5.16) mai pot fi scrise sub forma:

$$v_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r)\tag{5.17}$$

Efectuând calculele și grupând convenabil termenii se obține sistemul normal al corelațiilor în cazul ponderat:

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{p_1} (a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{a_2}{p_2} (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots + \\ + \frac{a_n}{p_n} (a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_1 = 0 \\ \frac{b_1}{p_1} (a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{b_2}{p_2} (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots + \\ + \frac{b_n}{p_n} (a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_2 = 0 \\ \frac{r_1}{p_1} (a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{r_2}{p_2} (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots + \\ + \frac{r_n}{p_n} (a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_r = 0\end{aligned}\tag{5.18}$$

Efectuând calculele:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 a_1}{p_1} k_1 + \frac{a_1 b_1}{p_1} k_2 + \dots + \frac{a_1 r_1}{p_1} k_r + \frac{a_2 a_2}{p_2} k_1 + \frac{a_2 b_2}{p_2} k_2 + \dots + \frac{a_2 r_2}{p_2} k_r + \dots + \\ + \frac{a_n a_n}{p_n} k_1 + \frac{a_n b_n}{p_n} k_2 + \dots + \frac{a_n r_n}{p_n} k_r + w_1 = 0\end{aligned}$$



## Tabelul coeficienților sistemului normal-Tabel

### 5.4

$\left[ \frac{aa}{p} \right]$	$\left[ \frac{ab}{p} \right]$	$\left[ \frac{ac}{p} \right]$	$\left[ \frac{aS}{p} \right]$	$\left[ \frac{aS}{p} \right] = \left[ \frac{aa}{p} \right] + \left[ \frac{ab}{p} \right] + \left[ \frac{ac}{p} \right]$
	$\left[ \frac{bb}{p} \right]$	$\left[ \frac{bc}{p} \right]$	$\left[ \frac{bS}{p} \right]$	$\left[ \frac{bS}{p} \right] = \left[ \frac{ab}{p} \right] + \left[ \frac{bb}{p} \right] + \left[ \frac{bc}{p} \right]$
		$\left[ \frac{cc}{p} \right]$	$\left[ \frac{cS}{p} \right]$	$\left[ \frac{cS}{p} \right] = \left[ \frac{ac}{p} \right] + \left[ \frac{bc}{p} \right] + \left[ \frac{cc}{p} \right]$

Rezolvarea sistemelor corelatelor se va realiza prin intermediul schemei Gauss-Doolittle simplă sau în cazul urmării evaluării preciziei prin intermediul coeficienților de pondere se vor atașa coloanele coeficienților de pondere aferenți, schema de rezolvare devenind astfel una extinsă.

## Aplicația 1

În rețeaua de triangulație din figura de mai jos au fost măsurate cu aceeași precizie direcțiile azimutale  $U_1, \dots, U_{10}$  date în tabelul următor.

Să se determine prin metoda observațiilor condiționate valorile probabile ale direcțiilor azimutale și abaterea standard a unghiului  $BDC$  compensat.

*Tabel 5.5*

<i>P.S.</i>	<i>P.V</i>	<i>Nr. vizei</i>	<i>Val.măsurate</i> $(U_i^0)$	<i>Corecții</i> $(v_i)^{cc}$	<i>Val.probabile</i> $(U_i = U_i^0 + v_i)$
<b>A</b>	<b>B</b>	1	0.00.00	+1	0.00.01
	C	2	57.15.20	-1	57.15.19
<b>B</b>	D	3	0.00.00	-3	399.99.97
	C	4	62.00.10	+4	62.00.14
	A	5	142.18.30	-1	142.18.29
<b>C</b>	A	6	0.00.00	+1	0.00.01
	B	7	62.66.72	-4	62.66.68
	D	8	108.95.30	+3	108.95.33
<b>D</b>	C	9	0.00.00	-3	399.99.97
	B	10	91.71.12	+3	91.71.15

În fiecare dintre cele 2 triunghiuri s-a măsurat câte un unghi în plus, deci putem scrie ecuațiile de condiție:

$$(U_2 - U_1) + (U_5 - U_4) + (U_7 - U_6) - 200^g = 0$$

$$(U_4 - U_3) + (U_8 - U_7) + (U_{10} - U_9) - 200^g = 0$$

Funcția de pondere, adică relația prin care calculăm mărimea unghiului BDC, a cărei precizie s-a cerut, este:

$$F = U_{10} - U_9$$

Înlocuim în primele relații valorile:  $U_i = U_i^0 + v_i$

$$(U_2^0 + v_2) - (U_1^0 + v_1) + (U_5^0 + v_5) - (U_4^0 + v_4) + (U_7^0 + v_7) - (U_6^0 + v_6) - 200^g = 0$$

$$(U_4^0 + v_4) - (U_3^0 + v_3) + (U_8^0 + v_8) - (U_7^0 + v_7) + (U_{10}^0 + v_{10}) - (U_9^0 + v_9) - 200 = 0$$

Se fac următoarele notații:

$$(U_2^0 - U_1^0) + (U_5^0 - U_4^0) + (U_7^0 - U_6^0) - 200^g = W_1 = 12^{cc}$$

$$(U_4^0 - U_3^0) + (U_8^0 - U_7^0) + (U_{10}^0 - U_9^0) - 200^g = W_2 = -20^{cc}$$

Ecuatiile de condiție ale corecțiilor „v”, vor fi:

- $v_1 + v_2 - v_4 + v_5 - v_6 + v_7 + W_1 = 0$
- $v_3 + v_4 - v_7 + v_8 - v_9 + v_{10} + W_2 = 0$

Se întocmește tabelul ecuațiilor de condiție:

Tabel 5.6

Nr.crt.	Ec. 1 (a <sub>i</sub> )	Ec. 2 (b <sub>i</sub> )	Funcția (f <sub>i</sub> )	Sume (s <sub>i</sub> )	Corecția (v <sub>i</sub> )
1.	-1	0	0	-1	+1
2.	+1	0	0	+1	-1
3.	0	-1	0	-1	-3
4.	-1	+1	0	0	+4
5.	+1	0	0	+1	-1
6.	-1	0	0	-1	+1
7.	+1	-1	0	0	-4
8.	0	+1	0	+1	+3
9.	0	-1	-1	-2	-3
10.	0	+1	+1	+2	+3

Sistemul ecuațiilor normale ale corelatelor:

Tabel

5.7

$k_1$	$k_2$	(ff)	S	C
6	-2	0	+4	+4
	6	+2	+6	+6
		+2	+4	+4

$$6k_1 - 2k_2 + 12 = 0$$

$$-2k_1 + 6k_2 - 20 = 0$$

Rezolvarea sistemului normal – Gauss.

Tabel 5.8

$k_1$	$k_2$	$W$	$(ff)$	$S$	Control
6	-2	+12	0	+16	--
-1	+0,3333	-2,0000	0,0000	-2,6667	-2,6667
$k_1 = -1$	6	-20	+2	-14	--
	+5,3333	-16,0000	+2,0000	-8,6667	-8,6667
	-1	+3,0000	-0,3750	+1,6250	+1,6250
	$K_2 = +3$		2		
		$q(ff) =$	+1,2500		

Verificarea soluțiilor:

$$[S - Q_{(ff)} - W] K = -[W]$$

$$+ 8 = + 8$$

Se calculează corecțiile „ $v_i$ ” :

$$v_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_1 + b_i k_2 + \dots)$$

Se calculează  $[pvv] = 72$

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots$$

$$p = 1 \text{ (aceeași precizie)}$$

Abateră standard a măsurătorilor (eroarea medie pătratică a unității de pondere):

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{72}{2}} = \pm 6^{cc}$$

Abateră standard a necunoscutei:

$$\mu_{(F)} = \mu_0 \sqrt{Q_{(ff)}} = 6 \sqrt{1,2500}$$

Verificarea compensării se efectuează înlocuind valorile compensate ale măsurătorilor în ecuațiile de condiție (coloana  $U_i = U_i^0 + v_i$ ).

## Aplicația 2

Să se compenseze unghiurile unui triunghi plan și să se deducă precizia lor după compensare, cunoscându-se din măsurători de aceeași precizie următoarele valori medii:

$$\alpha' = 47^{\circ} 15' 17''$$

$$\beta' = 73^{\circ} 43' 50''$$

$$\gamma' = 79.41.45''$$

Nefînchiderea unghiulară va fi egală cu:

$$W = \alpha' + \beta' + \gamma' - 200^{\circ} = +12''$$

Ecuația de condiție a figurii este:

$$\alpha + \beta + \gamma - 200^g = 0$$

Dar :  $\alpha = \alpha' + v_\alpha$

$$\beta = \beta' + v_\beta$$

$$\gamma = \gamma' + v_\gamma$$

Deci, se poate scrie ecuația de condiție finală:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + 12^{cc} = 0$$

**Avînd o singură ecuație de condiție rezultă vom avea o singură corelată K, deci sistemul de ecuații normale ale corelatelor se va reduce și el la o singură ecuație normală și anume:**

$$[aa] \cdot k + w = 0. \text{ adică :}$$

$$3k + 12^{cc} = 0 \quad k = -4^{cc}$$

Aplicînd formulele generale ale corecțiilor în funcție de corelate avem:

$$v_1 = a_1 k$$

$$v_2 = a_2 k$$

$$v_3 = a_3 k$$

și obținem:  $v_1 = k = -\frac{w}{3}$

$$v_2 = k = -\frac{w}{3}$$

$$v_3 = k = -\frac{w}{3}$$

Deci :  $v_1 = v_2 = v_3 = -4^{cc}$

Controlul corecțiilor se face folosind relația:

$$[vv] = -[kw]$$

$$48 = -(-4 \cdot 12)$$

$$48 = 48$$

Valorile compensate ale unghiurilor triunghiului plan vor fi:

$$\alpha = \alpha' + v_\alpha = 47.15.13$$

$$\beta = \beta' + v_\beta = 73.43.46$$

$$\gamma = \gamma' + v_\gamma = 79.41.41$$

Se îndeplinește astfel condiția:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200.00.00$$

Eroarea medie pătratică pentru fiecare valoare unghiulară măsurată se exprimă prin relația:

$$\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{48}{1}} = \pm 6^{cc},9$$



### Aplicația 3

## **Compensarea poligonului cu punct central utilizând metoda măsurătorilor condiționate**

Se consideră o rețea de triangulație locală, sub forma unui poligon cu punct central, format din 5 triunghiuri.

Cu un teodolit cu precizia de citire unghiulară de  $\pm 2^{\text{cc}}$ , se execută măsurători ale direcțiilor unghiulare între punctele ce formează poligonul cu punct central. Pe baza observațiilor de teren executate, la birou, prin diferența direcțiilor, au rezultat valorile unghiurilor orizontale dintre laturile triunghiurilor, valori prezentate în tabelul următor:

*Tabel 5.9*

<i>Număr unghi</i>	<i>Valoarea măsurată <math>\alpha_i^0</math></i>	<i>Număr unghi</i>	<i>Valoarea măsurată <math>\alpha_i^0</math></i>
1	68.21.43	--	--
2	55.92.60	9	62.13.17
3	71.39.20	10	54.21.70
4	53.20.94	11	75.85.76
5	70.31.64	12	75.39.70
6	48.29.90	13	81.38.64
7	65.20.58	14	83.71.97
8	51.07.31	15	83.64.98

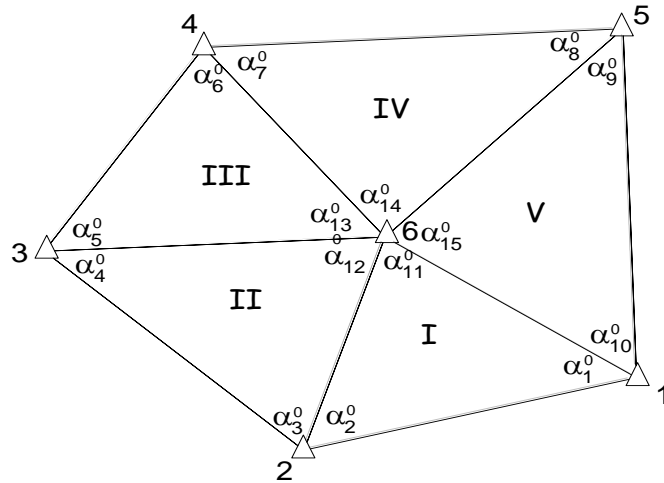


Figura 5.1 – Poligonul cu punct central

Utilizând principiile de compensare ale măsurătorilor condiționate de aceeași precizie, se cere să se compenseze valoarea unghiurilor orizontale măsurate și să se evalueze precizia de determinare a acestora.

### Etapa 1 – Scrierea ecuațiilor de condiție

Pentru fiecare triunghi al poligonului se vor scrie următoarele ecuații de condiție:

- ecuația de închidere a unghiurilor într-un triunghi ca sumă a unghiurilor orizontale egală cu  $200^g$ ;
- ecuația de închidere a unghiurilor orizontale la centru, suma unghiurilor egală cu  $400^g$ ;
- acordul laturilor sau raportul între sinusurile unghiurilor să fie egal cu 1.

Astfel se vor scrie: 5 ecuații de închidere a unghiurilor în triunghi, 1 ecuație de condiție la centru și 1 ecuație privind acordul laturilor.

$$\text{Ecuația 1 } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{11} - 200^g = 0$$

$$\text{Ecuația 2 } \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12} - 200^g = 0$$

$$\text{Ecuația 3 } \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_{13} - 200^g = 0$$

$$\text{Ecuația 4 } \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{14} - 200^g = 0$$

$$\text{Ecuația 5 } \alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{15} - 200^s = 0$$

$$\text{Ecuația la centru: } \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - 400^s = 0$$

Ecuația privind acordul laturilor:

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_5 \cdot \sin \alpha_7 \cdot \sin \alpha_9}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_4 \cdot \sin \alpha_6 \cdot \sin \alpha_8 \cdot \sin \alpha_{10}} = 1 = \frac{P_2}{P_1}$$

Ecuațiile sunt scrise pentru cazul unghiurilor definitiv compensate, care trebuie să îndeplinească aceste condiții impuse.

## Etapa 2 – Scrierea ecuațiilor de condiție ale corecțiilor

În ecuațiile de condiție inițiale, se înlocuiesc mărimile compensate ale unghiurilor orizontale cu valorile medii, obținute prin măsurători directe de aceeași precizie cu corecțiile respective, conform relației:

$$\alpha_i = \alpha_i^0 + v_i, i = 1 \dots 15$$

Cele 7 ecuații se vor scrie astfel:

$$1. (\alpha_1^0 + v_1) + (\alpha_2^0 + v_2) + (\alpha_{11}^0 + v_{11}) - 200^s = 0$$

$$2. (\alpha_3^0 + v_3) + (\alpha_4^0 + v_4) + (\alpha_{12}^0 + v_{12}) - 200^s = 0$$

$$3. (\alpha_5^0 + v_5) + (\alpha_6^0 + v_6) + (\alpha_{13}^0 + v_{13}) - 200^s = 0$$

$$4. (\alpha_7^0 + v_7) + (\alpha_8^0 + v_8) + (\alpha_{14}^0 + v_{14}) - 200^s = 0$$

$$5. (\alpha_9^0 + v_9) + (\alpha_{10}^0 + v_{10}) + (\alpha_{15}^0 + v_{15}) - 200^s = 0$$

6.

$$(\alpha_{11}^0 + v_{11}) + (\alpha_{12}^0 + v_{12}) + (\alpha_{13}^0 + v_{13}) + (\alpha_{14}^0 + v_{14}) + (\alpha_{15}^0 + v_{15}) - 400^s = 0$$

7.

$$\frac{\sin(\alpha_1^0 + v_1) \cdot \sin(\alpha_3^0 + v_3) \cdot \sin(\alpha_5^0 + v_5) \cdot \sin(\alpha_7^0 + v_7) \cdot \sin(\alpha_9^0 + v_9)}{\sin(\alpha_2^0 + v_2) \cdot \sin(\alpha_4^0 + v_4) \cdot \sin(\alpha_6^0 + v_6) \cdot \sin(\alpha_8^0 + v_8) \cdot \sin(\alpha_{10}^0 + v_{10})} = \frac{P_2^0}{P_1^0} = 1$$

Primele 6 ecuații de condiție au o formă liniară, iar cea de-a șaptea este neliniară. Operația de liniarizare se realizează printr-o dezvoltare în serie Taylor, în care se rețin doar primele derivate parțiale în raport cu mărimile medii ale măsurătorilor directe de ordinul I ale corecțiilor, obținându-se ecuația de corecție de pol sub următoarea formă:

$$P_1 - P_2 = P_1^0 + \frac{P_1^0}{\rho^{cc}} (ctg \alpha_1^0 \cdot v_i)_1^9 - P_2^0 + \frac{P_2^0}{\rho^{cc}} (ctg \alpha_2^0 \cdot v_i)_2^{10} = 0$$

Astfel, se pot scrie ecuațiile de condiție ale corecțiilor următoare:

1.  $v_1 + v_2 + v_{11} + w_1 = 0$
2.  $v_3 + v_4 + v_{12} + w_2 = 0$
3.  $v_5 + v_6 + v_{13} + w_3 = 0$
4.  $v_7 + v_8 + v_{14} + w_4 = 0$
5.  $v_9 + v_{10} + v_{15} + w_5 = 0$
6.  $v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_6 = 0$
7.  $ctg \alpha_1^0 \cdot v_1 - ctg \alpha_2^0 \cdot v_2 + ctg \alpha_3^0 \cdot v_3 - ctg \alpha_4^0 \cdot v_4 + ctg \alpha_5^0 \cdot v_5 -$   
 $ctg \alpha_6^0 \cdot v_6 + ctg \alpha_7^0 \cdot v_7 - ctg \alpha_8^0 \cdot v_8 + ctg \alpha_9^0 \cdot v_9 - ctg \alpha_{10}^0 \cdot v_{10} + w_7 = 0$

### Etapa 3 – Calculul termenilor liberi

$$w_1 = (\alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_{11}^0) - 200^g = -21^{cc}$$

$$w_2 = (\alpha_3^0 + \alpha_4^0 + \alpha_{12}^0) - 200^g = -16^{cc}$$

$$w_3 = (\alpha_5^0 + \alpha_6^0 + \alpha_{13}^0) - 200^g = +18^{cc}$$

$$w_4 = (\alpha_7^0 + \alpha_8^0 + \alpha_{14}^0) - 200^g = -14^{cc}$$

$$w_5 = (\alpha_9^0 + \alpha_{10}^0 + \alpha_{15}^0) - 200^g = -15^{cc}$$

$$w_6 = (\alpha_{11}^0 + \alpha_{12}^0 + \alpha_{13}^0 + \alpha_{14}^0 + \alpha_{15}^0) - 400^g = +105^{cc}$$

$$w_7 = \rho^{cc} \left( 1 - \frac{P_2^0}{P_1^0} \right) = -86^{cc}$$

### Etapa 4 – Scrierea ecuațiilor de corecții funcție de corelate

Sistemul liniar al ecuațiilor de condiție ale corecțiilor în care numărul ecuațiilor  $r = 7$ , este mai mic decât numărul necunoscutelor  $v_i$  egale cu 15, nu se poate rezolva.

Corecțiile  $v_i$  având valori mici, comparabile cu erorile de măsurare, li se poate aplica principiul celor mai mici pătrate, adică, suma pătratelor corecțiilor tinde spre un minim.

$$[vv] \rightarrow \min$$

Întrucât corecțiile trebuie să satisfacă simultan atât sistemul liniar al ecuațiilor de condiție al corecțiilor, cât și condiția de minim, ele se vor putea determina folosind metoda corelatelor.



Pentru coloana  $g_i$  se va aplica relația:  $g_i = \pm ctg \alpha_i^0$

Tabel 5.11

[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[ae]	[af]	[ag]	[aS]
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	S
3	0	0	0	0	1	-0.2839	3.7161
	3	0	0	0	1	-0.4216	3.5784
		3	0	0	1	-0.5516	3.4484
			3	0	1	-0.3584	3.6416
				3	1	-0.1991	3.8009
					5	0	10
						5.9298	5.9298

Sistemul normal al corelatelor are următoarea formă:

$$3k_1 + 0k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.2839k_7 - 21 = 0$$

$$3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.4216k_7 - 16 = 0$$

$$3k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.5516k_7 + 18 = 0$$

$$3k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.3584k_7 - 14 = 0$$

$$3k_5 + k_6 - 0.1991k_7 - 15 = 0$$

$$5k_6 + 105 = 0$$

$$5.9298k_7 - 86 = 0$$

### Etapa 6 – Rezolvarea sistemului normal al corelatelor

Rezolvarea sistemului corelatelor se va face cu ajutorul schemei Gauss-Doolittle, cu efectuarea controalelor obligatorii pe liniile roșii, prin eliminarea succesivă a necunoscutelor.

Tabel 5.12

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	L	S	C
3	0	0	0	0	1	-0.2839	-21	-17.2839	--
-	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-0.3</b>	<b>0.09463</b>	<b>7</b>	5.7613	5.7613
1					<b>3</b>	<b>3</b>			
	3	0	0	0	1	-0.4216	-16	-12.4216	--
	3	0	0	0	1	-0.4216	-16	-12.4216	-12.4216
									6
-	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-0.3</b>	<b>0.14053</b>	<b>5.333333</b>	4.140533	4.14053
1					<b>3</b>	<b>3</b>			3
	3	0	0	0	1	-0.5516	18	21.4484	--

3	0	0	1	-0.5516	18	21.4484	21.4484
-	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-0.3</b>	<b>0.18386</b>	<b>-6</b>	-7.149466	-7.14946
<b>1</b>			<b>3</b>	<b>6</b>			<b>6</b>
	3	0	1	-0.3584	-14	-10.3584	--
	3	0	1	-0.3584	-14	-10.3584	-10.3584
							<b>4</b>
	-	<b>0</b>	<b>-0.3</b>	<b>0.11946</b>	<b>4.666666</b>	3.4528	3.45279
	<b>1</b>		<b>3</b>	<b>6</b>			
		3	1	-0.1991	-15	-11.1991	--
		3	1	-0.1991	-15	-11.1991	-11.1991
							<b>1</b>
		-	<b>-0.3</b>	<b>0.06636</b>	<b>5</b>	3.733033	3.733033
		<b>1</b>	<b>3</b>	<b>6</b>			<b>3</b>
			5	0	105	115	--
			3.33	0.60486	120.9999	124.93819	124.93819
			<b>3</b>	<b>6</b>			<b>1</b>
			-1	<b>-0.1814</b>	<b>-36.29997</b>	-37.48143	-37.48143
				<b>5</b>			<b>4</b>
				5.928	-86	-81.8848	--
				5.57647	-111.5507	-105.9743	-105.9743
				<b>6</b>			<b>4</b>
				-1	<b>20.003813</b>	19.003814	19.003814
							<b>1</b>

Observații:

- valorile marcate boldite reprezintă pivoții de calcul aferenți fiecărei necunoscute.

### Etapa 7 – Calculul valorilor corelatelor $k_i$

Determinarea valorilor corelatelor  $k_i$  se va realiza pe liniile cu coeficienții ecuațiilor normale, egalând fiecare ecuație cu zero.

$$\begin{aligned}
-k_7 + 20.003813 &= 0 \rightarrow k_7 = 20.003813 \\
-k_6 - 0.181459 \cdot 20.003813 - 36.299977 &= 0 \rightarrow k_6 = -39.929848 \\
-k_5 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.066366 \cdot 20.003813 + 5 &= 0 \rightarrow \\
k_5 &= 19.637509 \\
-k_4 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.119466 \cdot 20.003813 + \\
+ 4.666666 &= 0 \rightarrow k_4 = 20.366377 \\
-k_3 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + \\
+ 0.183866 \cdot 20.003813 - 6 &= 0 \rightarrow k_3 = 10.987957 \\
-k_2 + 0 \cdot 10.987957 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + \\
+ 0.140533 \cdot 20.003813 + 5.333333 &= 0 \rightarrow k_2 = 21.454465 \\
-k_1 + 0 \cdot 21.454465 + 0 \cdot 10.987957 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 - \\
0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.094633 \cdot 20.003813 + 7 &= 0 \rightarrow k_1 = 22.202956
\end{aligned}$$

### Etapa 8 – Verificarea soluțiilor (corelatelor) obținute

Pentru verificarea valorilor obținute se va ține cont de îndeplinirea următoarei condiții de egalitate:

$$[(S - L) \cdot k_i] = -[L]$$

în care: S – suma coeficienților corelatelor pentru fiecare ecuație;

L – valoarea termenului liber;

$k_i$  – valoarea corelatei obținute.

Verificarea egalității se va face pe liniile din schema Gauss-Doolittle care conține coeficienții corelatelor.

$$[(S - L) \cdot k_i] = \begin{bmatrix} (-17.2839 + 21) \cdot 22.202956 + (-12.4216 + 16) \cdot 21.454465 + \\ (21.4484 - 18) \cdot 10.987957 + (-10.3584 + 14) \cdot 20.366377 + \\ + (-11.1991 + 15) \cdot 19.637509 + (115 - 105) \cdot (-39.929848) + \\ + (-81.8848 + 86) \cdot 20.003813 = 28.99955 \end{bmatrix}$$

$$[L] = -21 - 16 + 18 - 14 - 15 + 105 - 86 = -29$$

$\rightarrow 28.99955 \cong 29$  - condiția de egalitate este îndeplinită.



## Etapa 9 – Calculul corecțiilor $v_i$

**Determinarea corecțiilor  $v_i$  se va aface prin înlocuirea valorilor numerice ale corelatelor în sistemul ecuațiilor de corecții funcție de corelate, exprimat de ecuația:**

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + e_i k_5 + f_i k_6 + g_i k_7$$

Deoarece termenii liberi (neînchiderile unghiulare)  $w_i$  sunt exprimați în secunde și valorile corecțiilor  $v_i$  se vor obține în secunde centezimale.

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 + e_1 k_5 + f_1 k_6 + g_1 k_7 = 33^{cc},111$$

$$v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 + e_2 k_5 + f_2 k_6 + g_2 k_7 = 5^{cc},615$$

$$v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + d_3 k_4 + e_3 k_5 + f_3 k_6 + g_3 k_7 = 31^{cc},102$$

$$v_4 = a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 + d_4 k_4 + e_4 k_5 + f_4 k_6 + g_4 k_7 = 3^{cc},373$$

$$v_5 = a_5 k_1 + b_5 k_2 + c_5 k_3 + d_5 k_4 + e_5 k_5 + f_5 k_6 + g_5 k_7 = 21^{cc},056$$

$$v_6 = a_6 k_1 + b_6 k_2 + c_6 k_3 + d_6 k_4 + e_6 k_5 + f_6 k_6 + g_6 k_7 = -10^{cc},114$$

$$v_7 = a_7 k_1 + b_7 k_2 + c_7 k_3 + d_7 k_4 + e_7 k_5 + f_7 k_6 + g_7 k_7 = 32^{cc},537$$

$$v_8 = a_8 k_1 + b_8 k_2 + c_8 k_3 + d_8 k_4 + e_8 k_5 + f_8 k_6 + g_8 k_7 = 1^{cc},027$$

$$v_9 = a_9 k_1 + b_9 k_2 + c_9 k_3 + d_9 k_4 + e_9 k_5 + f_9 k_6 + g_9 k_7 = 33^{cc},170$$

$$v_{10} = a_{10} k_1 + b_{10} k_2 + c_{10} k_3 + d_{10} k_4 + e_{10} k_5 + f_{10} k_6 + g_{10} k_7 = 2^{cc},122$$

$$v_{11,12,13,14,15} = a_{11,12,13,14,15} k_1 + b_{11,12,13,14,15} k_2 + c_{11,12,13,14,15} k_3 + d_{11,12,13,14,15} k_4 + e_{11,12,13,14,15} k_5 + f_{11,12,13,14,15} k_6 + g_{11,12,13,14,15} k_7 = -39^{cc},929$$

Controlul corecțiilor aferente corelatelor calculate se realizează în mod tabelar, după cum urmează:

Tabel 5.13

$a_i k_1$	$b_i k_2$	$c_i k_3$	$d_i k_4$	$e_i k_5$	$f_i k_6$	$g_i k_7$	$\pm V_i^{cc}$
22.202	0	0	0	0	0	10.908	33.111
22.202	0	0	0	0	0	-16.587	5.615
0	21.454	0	0	0	0	9.647	31.102
0	21.454	0	0	0	0	-18.081	3.373
0	0	10.987	0	0	0	10.068	21.056
0	0	10.987	0	0	0	-21.102	-10.1149

0	0	0	20.366	0	0	12.170	32.536
0	0	0	20.366	0	0	-19.339	1.027

Tabel 5.13-continuare

$a_i/k_1$	$b_i/k_2$	$c_i/k_3$	$d_i/k_4$	$e_i/k_5$	$f_i/k_6$	$g_i/k_7$	$\pm V_i(^{cc})$
0	0	0	0	19.637	0	13.532	33.170
0	0	0	0	19.637	0	-17.515	2.122
22.202	0	0	0	0	-39.929	0	-17.727
0	21.454	0	0	0	-39.929	0	-18.475
0	0	10.987	0	0	-39.929	0	-28.942
0	0	0	20.366	0	-39.929	0	-19.563
0	0	0	0	19.637	-39.929	0	-20.292
66.606	64.362	32.961	61.098	58.911	-199.645	-36.299	<b>47.999</b>
							<b>47.999</b>

Pentru evaluarea preciziei se vor calcula pătratele corecțiilor calculate,  $v_i^2$  și se exprimă în secunde:

$$v_1^2 = 1096^{cc}.33$$

$$v_2^2 = 31^{cc}.53$$

$$v_3^2 = 967^{cc}.33$$

$$v_4^2 = 11^{cc}.37$$

$$v_5^2 = 443^{cc}.36$$

$$v_6^2 = 102^{cc}.21$$

$$v_7^2 = 1058^{cc}.59$$

$$v_8^2 = 1^{cc}.05$$

$$v_9^2 = 1100^{cc}.25$$

$$v_{10}^2 = 4^{cc}.50$$

$$v_{11}^2 = 314^{cc}.25$$

$$v_{12}^2 = 341^{cc}.32$$

$$v_{13}^2 = 837^{cc}.64$$

$$v_{14}^2 = 382^{cc}.71$$

$$v_{15}^2 = 411^{cc}.76$$

$$\rightarrow [v] = 7104^{cc}.20$$

## Etapa 10 – Efectuarea controlului provizoriu a compensării

Controlul provizoriu al valorilor obținute și al compensării executate, se efectuează prin înlocuirea corecțiilor în sistemul liniar al ecuațiilor de condiție ale corecțiilor, pentru care suma corecțiilor și al termenului liber trebuie să fie egală cu zero.

$$1. v_1 + v_2 + v_{11} + w_1 = 33.111 + 5.615 - 17.727 - 21 = -0^{cc}.001$$

$$2. v_3 + v_4 + v_{12} + w_2 = 31.102 + 3.737 - 18.475 - 16 = 0^{cc}$$

$$3. v_5 + v_6 + v_{13} + w_3 = 21.056 - 10.114 - 28.942 + 18 = 0^{cc}$$

$$4. v_7 + v_8 + v_{14} + w_4 = 32.536 + 1.027 - 19.563 - 14 = 0^{cc}$$

$$5. v_9 + v_{10} + v_{15} + w_5 = 33.170 + 2.122 - 20.292 - 15 = 0^{cc}$$

$$6. v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_6 = -17.727 - 18.475 - 28.942 - 19.563 - 20.292 + 105 = 0^{cc}.001$$

7.

$$ctg \alpha_1^0 \cdot v_1 - ctg \alpha_2^0 \cdot v_2 + ctg \alpha_3^0 \cdot v_3 - ctg \alpha_4^0 \cdot v_4 + ctg \alpha_5^0 \cdot v_5 - ctg \alpha_6^0 \cdot v_6 + ctg \alpha_7^0 \cdot v_7 - ctg \alpha_8^0 \cdot v_8 + ctg \alpha_9^0 \cdot v_9 - ctg \alpha_{10}^0 \cdot v_{10} + w_7 = 18.058 - 4.656 + 14.999 - 3.048 + 10.597 + 10.668 + 19.794 - 0.992 + 22.442 - 1.858 - 86 = 0^{cc}.002$$

## Etapa 11 – Calculul mărimilor celor mai probabile (compensate) ale unghiurilor orizontale

Mărimile cele mai probabile ale unghiurilor orizontale ale rețelei, reprezentând unghiurile compensate sau definitive, se obțin din însumarea valorilor măsurate direct pe teren cu aceeași precizie cu valorile corecțiilor calculate, adică:

$$\alpha_i + \alpha_i^0 + v_i$$

Tabel 5.14

Nr.unghi	Unghiuri măsurate $\alpha_i^0 (^{cc})$	Corecția	Unghiuri compensate
		$\pm v_i (^{cc})$	definitive- $\alpha_i (^{cc})$
1	68.21.43	33	68.21.76
2	55.92.60	6	55.92.66

3	71.39.20	31	71.39.51
4	53.20.94	3	53.20.97
5	70.31.64	21	70.31.85
6	48.29.90	-10	48.29.80
7	65.20.58	33	65.20.91

Tabel 5.14-continuare

Nr.unghi	Unghiuri măsurate	Corecția	Unghiuri compensate
	$\alpha_i^0 (^{\circ})$	$\pm v_i (^{\circ})$	definitive- $\alpha_i (^{\circ})$
8	51.07.31	1	51.07.32
9	62.13.17	33	62.13.50
10	54.21.70	2	54.21.72
11	75.85.76	-18	75.85.58
12	75.39.70	-18	75.39.52
13	81.38.64	-29	81.38.35
14	83.71.97	-20	83.71.77
15	83.64.98	-20	83.64.78
	$[\alpha_i^0]$	$[v_i]$	$[\alpha_i]$
$\Sigma$	999.99.65	48 <sup>cc</sup>	1000.00.00

### Etape 12 – Evaluarea preciziei determinărilor

- Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{7104.20}{7}} = \pm \sqrt{1014.88} = \pm 31^{\text{cc}}.85$$

în care:  $r$  – numărul corelatelor

- Eroarea medie pătratică a mediei:

$$\sigma_M = \pm \frac{\mu}{\sqrt{r}} = \pm \frac{31^{\text{cc}}.85}{\sqrt{7}} = \pm \frac{31^{\text{cc}}.85}{2.645} = \pm 12^{\text{cc}}.02$$