CAPITOLUL 1
INTRODUCERE ÎN STUDIUL TEORIEI PRELUCRĂRII MĂSURĂTORILOR TOPO-GEODEZICE

1.1. CONSIDERENTE GENERALE

Instrumentul principal de cunoaştere a lumii materiale îl constituie *observaţia* şi în cadrul acesteia, *măsurarea*. Operaţia de măsurare reprezintă un proces experimental de obţinere a informaţiei sub forma unui raport numeric, între valoarea mărimii fizice măsurate şi valoarea unei alte mărimi de acelaşi gen considerată drept unitate de măsură.
Scopul unei cercetări ştiinţifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a fi puse în slujba activităţii umane. Pentru aceasta, este necesară îmbinarea cercetării ştiinţifice cu aplicaţia tehnică – practică, fără de care orice speculaţie abstractă devine sterilă.
Pentru realizarea acestui deziderat, prima condiţie în alegerea mărimilor fizice, înţelegând prin aceasta şi mărimile care intervin în tehnică şi în practică, este ca ele să fie măsurabile.
Din punctul de vedere al subordonării metrologice, se deosebesc mijloace de măsurat etalon şi de lucru. Etaloanele servesc la reproducerea şi păstrarea unităţilor de măsură, precum şi la verificarea altor mijloace de măsurat. Mijloacele de măsurat de lucru servesc la executarea operaţiilor de măsurare în procese tehnologice, în lucrări de laborator etc.
Se cunoaşte faptul că dacă o mărime se măsoara de mai multe ori, de fiecare dată se obţine o altă valoare chiar dacă măsurătorile se desfăşoară în aceleaşi condiţii, de către acelaşi operator şi cu instrumente de mare precizie.
Cauza acestor neconcordanţe se datorează erorilor care afectează întotdeauna o măsuratoare, făcând ca valoarea adevărată a mărimii măsurate să nu poată fi cunoscută niciodată.
Practic, neputând fi determinată valoarea adevărată a mărimii măsurate, se caută să se determine o valoare apropiată de aceasta într-un grad mai mare sau mai mic funcţie de scopul pentru care se execută măsurătorile.

Apropierea mărimii determinate faţă de valoarea sa adevărată caracterizează precizia măsurătorii.
Ca urmare, prelucrarea măsurătorilor efectuate asupra unei mărimi urmăreşte obţinerea celei mai bune valori a acesteia şi a diferenţei maxime între valoarea determinată şi valoarea adevărată.
Informaţiile, care constituie baza concretă de date necesară rezolvării problemelor geodezice, fotogrametrice şi topografice, provin din observaţiile efectuate asupra unor mărimi cu care se lucrează frecvent şi care, în principal, sunt reprezentate de măsurătorile de unghiuri şi distanţe. *Calitatea* informaţiilor obţinute din aceste măsurători este funcţie directă de *volumul* observaţiilor şi de *precizia* instrumentelor de măsurat.
Se impune aşadar, ca pornind de la scopul pentru care sunt efectuate măsurătorile să se stabilească valorile corespunzatoare ca mărime şi precizie, luând în considerare aspectul economic referitor la volumul strict necesar şi suficient al observaţiilor care se impun. Teoria erorilor de măsurare sau teoria prelucrării măsurătorilor topo-geodezice intervine cu succes şi rezolvă favorabil aceste aspecte. Teoria prelucrării măsurătorilor topo-geodezice, prezintă o importanţă deosebită pentru practica măsurătorilor terestre, datorită volumului impresionant de observaţii ce trebuie executate, prelucrate şi compensate în vederea obţinerii valorilor lor celor mai probabile, ca şi pentru evaluarea cât mai corectă şi mai completă a preciziei.
Cunoscându-se cât mai exact mărimile erorilor medii ale fiecărui argument măsurabil în parte, se poate determina eroarea medie a unei funcţii de aceste argumente. În acest fel, se poate rezolva problema inversă a erorilor de măsurare, în cadrul căreia, faţă de o eroare maximă impusă apriori unei funcţii ce urmează a se determina, se va stabili încă din faza de proiect, care trebuie să fie erorile maxime cu care se vor măsura pe teren argumentele componente. Aceasta dă posibilitatea stabilirii preciziei optime de măsurare, cu avantaje economice importante.
Astfel, la realizarea unei reţele de triangulaţie, necesară ridicărilor topografice, a unei reţele de microtriangulaţie, necesară pentru urmărirea comportării unei construcţii, studiul preciziei de determinare a poziţiei punctelor reţelei se face încă din faza de proiectare, funcţie de configuraţia reţelei şi de precizia cu care se vor executa măsurătorile pe teren. Acest studiu va urmări ca erorile în poziţia punctelor, să se încadreze în toleranţele impuse anticipat. La sfârşit, prin compararea

erorilor post-procesate cu erorile stabilite anticipat, se va putea aprecia corectitudinea studiului făcut.
Studiul erorilor de măsurare prezintă o importanţă cu totul deosebită în acele domenii ale măsurătorilor terestre (Geodezie, Fotogrammetrie, Cartografie şi Topografie), în care exigenţele impuse în privinţa preciziei sunt deosebit de ridicate.
Se subliniază faptul că de fiecare dată în practica măsurătorilor terestre trebuie avută în vedere precizia optimă necesară. Aceasta deoarece o precizie exagerată produce cheltuieli inutile de forţă de muncă, de mijloace materiale şi de timp, iar o precizie insuficientă duce la o calitate slabă a rezultatelor obţinute din măsurători.
Toate lucrările de topografie şi geodezie se bazează pe măsurători efectuate în scopul determinării poziţiei diferitelor obiecte şi fenomene din spaţiul terestru. Aceste măsurători se referă în special la mărimi liniare (lungimi) şi la mărimi unghiulare (unghiuri).
Aşa cum rezultă din definiţie, orice proces de măsurare presupune, în primul rând, existenţa unei unităţi de măsură în raport de care să fie exprimată valoarea observată.
De-a lungul timpului s-au utilizat diferite unităţi de măsură, în prezent, majoritatea ţărilor lumii, printre care şi România, a adoptat Sistemul Internaţional de Unităţi (SI).

1.2. SCURTĂ CLASIFICARE A MĂSURĂTORILOR

Măsurătorile pot fi clasificate după următoarele criterii:
După modul de obţinere a mărimii fizice care ne interesează:
*a) Măsurători directe***,** la care mărimea fizică considerată se compară direct cu unitatea de măsură, fiecare măsurătoare efectuată generând câte o valoare a mărimii măsurate.
Exemple de măsurători directe:

- măsurarea unui unghi cu teodolitul;
- măsurarea unei lungimi cu ruleta.

Se mai consideră ca măsurători directe şi anumite funcţii simple de măsurători directe şi anume:

- diferenţa dintre două mărimi măsurate direct (exemplu: diferenţa de nivel rezultată prin scăderea citirilor pe miră);
- produsul dintre o mărime măsurată şi o constantă.

Un caz special al măsurătorilor directe îl constituie măsurătorile condiţionate, definite ca măsurători directe ce trebuie să satisfacă o serie de condiţii geometrice sau analitice.
Exemple de măsurători condiţionate:
1. Într-o reţea de formă triunghiulară au fost măsurate toate unghiurile.
Teoretic, acestea trebuie să îndeplinească condiţia din geometria plană că suma lor să fie egală cu 200^g.
2. Suma diferenţelor de nivel într-o drumuire închisă, trebuie să fie egală cu zero.

b) Măsurători indirecte, la care valoarea mărimilor care ne interesează se obţine prin intermediul altor mărimi măsurate direct, acestea fiind funcţional dependente între ele.
Exemple de măsurători indirecte:
1. Determinarea coordonatelor punctelor unei reţele geodezice prin măsurători liniare, dependenţa între mărimile de determinat (x_i, y_i) şi mărimile măsurate direct (D_{i-j}), fiind:

$$D_{i-j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \qquad (1.1)$$

2. Determinarea elementelor elipsoidului de rotaţie pământesc (semiaxa şi turtirea), prin măsurarea lungimilor de arc de meridian şi de latitudini.
Sfera măsurătorilor indirecte este mult mai largă decât cea a măsurătorilor directe, primele fiind de multe ori şi mult mai simple.
Există şi anumite mărimi care practic nici nu pot fi măsurate direct, de exemplu determinarea densităţii care se face în funcţie de volum şi masă (mărimi ce se pot măsura direct), $\delta = \delta(V, M)$ sau determinarea unor constante fizice cum ar fi acceleraţia gravitaţională.

După condiţiile în care sunt executate:
a) Măsurători de aceeaşi precizie, când se efectuează cu acelaşi instrument, de către acelaşi operator, prin aceeaşi metodă de lucru şi în aceleaşi condiţii de mediu. În acest caz se poate considera că tuturor acestor măsurători le putem acorda aceeaşi încredere.
b) Măsurători de precizii diferite (ponderate), când unul din factorii de mai sus diferă, deci nu mai putem acorda aceeaşi încredere tuturor măsurătorilor, unele fiind determinate mai precis decât altele.

După legătura dintre ele:
a) Măsurători dependente

Dacă ansamblul condiţiilor în care se efectuează o măsurătoare influenţează total sau parţial rezultatul altei măsurători, se spune că acestea sunt dependente între ele.
b) Măsurători independente
Sunt acele erori care nu se influenţează reciproc.
Corelaţia sau dependenţa între mărimi se exprimă cu ajutorul unui coeficient empiric de corelaţie, dedus experimental pe cale statistică efectuând mai multe măsurători.Aceste determinări însă sunt foarte greoaie.

După numărul lor:
a) Măsurători necesare definite prin numărul minim de măsurători, cu ajutorul cărora se poate stabili valoarea mărimii considerate.
b) Măsurători suplimentare efectuate în vederea ridicării preciziei de măsurare sau a preîntâmpinării eventualelor greşeli ce pot apărea.
Aceste măsurători suplimentare determină numărul gradelor de libertate ale reţelei respective.

1.3. SCURTĂ CLASIFICARE A ERORILOR DE MĂSURARE

Se numeşte *eroare* diferenţa dintre valoarea măsurată şi valoarea adevărată a unei mărimi fizice:

$$e = M - X \,, \quad (1.2)$$

în care prin *M* s-a notat valoarea obţinută prin măsurare, iar prin *X*, valoarea adevărată.
Valoarea reală a unei mărimi nu poate fi determinată niciodată din cauza inexactităţilor şi erorilor de măsurare care apar în procesul de măsurare .
Această imposibilitate poate fi generată de o serie întreagă de cauze cum ar fi: variaţia în timp a obiectului măsurat, imperfecţiunea organelor de simţ ale operatorului, imperfecţiunea aparaturii şi a metodelor de măsurare, influenţa condiţiilor exterioare.
Erorile pot fi clasificate după cum urmează:
După modul de alegere a mărimii nominale:
*a) Erori reale (adevărate**)**,* ε_i în cazul în care valoarea de referinţă (nominală) se consideră valoarea reală X a mărimii respective:

$$\varepsilon_i = M_i - X$$

(1.3)

Deoarece valoarea adevărată *X* a unei mărimi nu este accesibilă, înseamnă că nici eroarea adevărată ε nu poate fi cunoscută.

b) Erori aparente (probabile), v_i în cazul în care se consideră ca valoare de referinţă, valoarea probabilă a mărimii respective:

$$\pm v_i = M_i - M$$

(1.4)

Valoarea probabilă a unei mărimi se consideră a fi media aritmetică în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie, sau media ponderată în cazul măsurătorilor de precizie diferită (ponderate).

Dacă se schimbă sensul unei erori se obţine corecţia, deci $c = -e$.

După mărimea lor:

a) Erori evitabile (erori grosolane, greşeli)

Ele se pot evita printr-o atenţie sporită în timpul procesului de măsurare .

Exemplu**:** erori la metri de măsurare a distanţelor cu ruleta; erori de grade la citirea unghiurilor pe microscopul teodolitului.

Prin urmare, aceste erori grosolane sau greşeli sunt cu un ordin de mărime mai mare decât precizia de măsurare .

Acest tip de eroare se evidenţiază imediat într-un şir de măsurători putând fi eliminată cu uşurinţă pe baza coroborării datelor cu cele de la alte observaţii.

În calculele de compensare se consideră că măsurătorile nu sunt afectate de erori grosolane.

b) Erori inevitabile ce nu pot fi eliminate indiferent de metoda folosită sau de gradul de atenţie al operatorului, ci doar diminuate.

Aceste erori pot fi clasificate după modul de acţionare astfel:

- *erori sistematice* sunt acelea la care se cunosc cauzele care le generează şi legile după care acţionează. Valoarea lor poate fi deci determinată şi în consecinţă se poate corecta rezultatul obţinut din măsurători.

Diminuarea erorilor sistematice se poate face prin:

- metoda de măsurare (de exemplu la măsurarea unghiurilor se efectuează determinări în cele două poziţii ale lunetei, eliminându-se eroarea de colimaţie)
- prin calcul, aplicându-se corecţii rezultatului (corecţia de etalonare, corecţia de temperatură, etc. la măsurarea distanţelor cu ruleta)
- printr-o reglare mai bună a aparatelor

- reducând la minim ponderea observaţiilor pentru care nu s-au putut îndeparta erorile sistematice

Erorile sistematice pot fi la rândul lor *constante* sau *variabile*.

Exemplu**:** dacă un etalon cu care se măsoară distanţa este mai scurt cu 1 cm, pentru fiecare introducere a etalonului în distanţa de măsurat, se comite o eroare care îşi păstrează valoarea şi semnul. Avem de-a face cu o eroare sistematică constantă. Aceasta se propagă după legea înmulţirii, adică eroarea totală este egală cu eroarea unitară înmulţită cu numărul care arată de câte ori intervine eroarea unitară în rezultatul final:

$$e_{st} = n \cdot e_s \tag{1.5}$$

în care: e_{st} = eroare sistematică totală;

n = numărul care arată de câte ori etalonul se cuprinde în mărimea măsurată;

e_s = eroarea sistematică constantă unitară.

Eroarea sistematică variabilă nu se propagă după legea liniară urmărită de erorile constante, deci ea nu îşi păstrează tot timpul semnul şi valoarea.

Exemplu: eroarea de excentricitate a limbului, când centrul acestuia nu coincide cu centrul alidadei.

- *erori întâmplătoare* (accidentale) sunt acelea care influenţează într-un mod întâmplător, cu cantităţi mici fiecare, dar apreciabile în total şi nu pot fi eliminate.

Erorile întâmplătoare pot fi diminuate prin efectuarea mai multor măsurători. Ele se micşorează de asemenea, prin perfecţionarea instrumentelor şi a metodelor de lucru.

În studiul teoriei erorilor, se consideră că măsurătorile au fost corectate de toate celelalte erori (greşeli, erori sistematice) şi *sunt afectate numai de erorile întâmplătoare.*

Schematic, această clasificare s-ar putea reda sub următoarea formă:

CORELATIA MĂSURĂTORI - ERORI

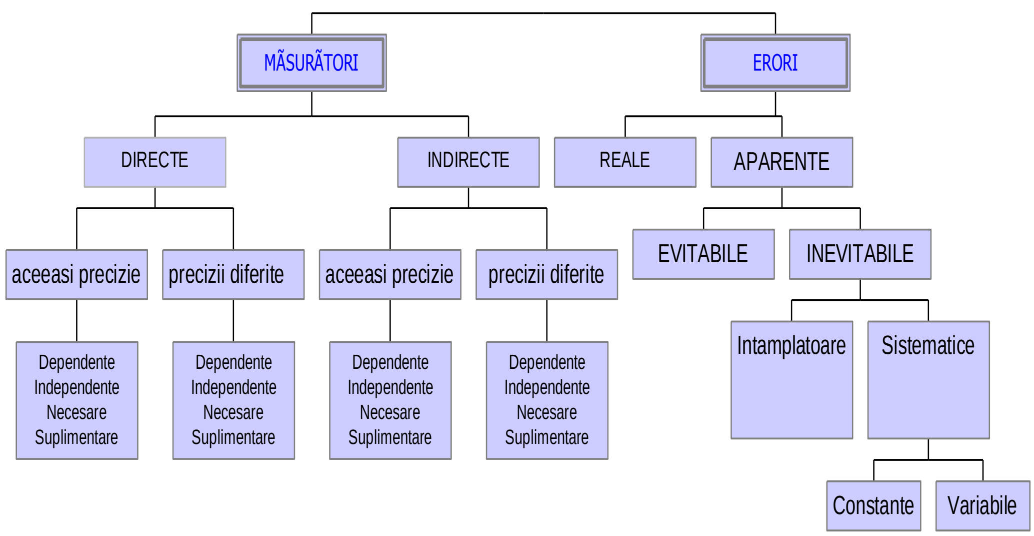

Figura 1.1 – Clasificarea şi corelaţia măsurători – erori de măsurare

CAPITOLUL 2
COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR DIRECTE

În practica măsurătorilor, pentru determinarea valorii unei mărimi fizice, de cele mai multe ori se execută un număr mai mare de măsurători decât cel strict necesar. Scopul compensării constă în aflarea celei mai probabile valori a mărimii, numită şi valoare compensată, pe baza totalităţii măsurătorilor efectuate. Pentru obţinerea unor soluţii unice, este obligatorie aplicarea unui principiu, reprezentat în cazul de faţă de principiul sau *metoda celor mai mici pătrate*, aşa cum se va prezenta în continuare.

În calculul de compensare, concomitent cu aflarea valorii compensate, se efectuează şi evaluarea sau aprecierea preciziei rezultatului.

2.1. TEOREME FUNDAMENTALE ASUPRA ERORILOR ÎNTÂMPLĂTOARE

În funcţie de valoarea cea mai probabilă M a mărimii măsurate se determină erorile întâmplătoare aparente v_i :

$$\pm v_1 = M_1 - M$$
$$\pm v_2 = M_2 - M$$
$$\pm v_3 = M_3 - M$$

$\pm\ v_n = M_n - M$

(2.1)

Teorema I

Suma erorilor aparente "v_i" este întotdeauna egală cu zero.

Prin însumarea relaţiilor membru cu membru se obţine:

$\pm\ v_1 \pm v_2 \pm v_3 \pm \ldots\ldots \pm v_n = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_n - n \cdot M$ (2.2)

Folosind notaţiile Gauss:

$[v_i] = [M_i] - n \cdot M$

(2.3)

Ţinând seama de relaţia de definiţie a valorii celei mai probabile $M = \frac{[M_i]}{n}$ şi înlocuind-o în expresia de mai sus obţinem:

$$[v_i] = [M_i] - n\frac{[M_i]}{n}$$

(2.4)

$$[v_i] = 0; \qquad n \neq \infty$$

(2.5)

Teorema II

Suma pătratelor erorilor întâmplătoare aparente "[vv]" trece printr-un minim pentru valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate.

Se porneşte tot de la expresiile erorilor aparente întâmplătoare definite faţă de valoarea M:

$\pm\ v_1 = M_1 - M$

$\pm\ v_2 = M_2 - M$

$\pm\ v_3 = M_3 - M$

……………

$\pm\ v_n = M_n - M$

(2.6)

Dacă se ridică la pătrat şi se însumează aceste egalităţi se va obţine:

$[v_i v_i] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots.. + v_n^2 = (M_1 - M)^2 + \ldots\ldots + (M_n - M)^2$

(2.7)

Această sumă se prezintă că o funcţie de mărimea M, deci: $[v_i v_i] = F(M)$

F(M) = (M_1-M)^2 + (M_2-M)^2 +……+ (M_n - M)^2
(2.8)
Se ştie că o funcţie trece printr-un minim atunci când derivata de ordinul I este zero, iar derivata de ordinul II este mai mare decât zero:
F'(M) = -2(M_1-M) – 2(M_2-M) -….-2(M_n-M) = 0 (2.9)
de unde rezultă :

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n}{n}$$

(2.10)
Această teoremă este foarte importantă în studiul teoriei erorilor, justificând expresia valorii celei mai probabile.

2.2. ERORILE ÎNTÂMPLĂTOARE ÎN MĂSURĂTORILE DIRECTE

2.2.1. VALOAREA CEA MAI PROBABILĂ A UNEI MĂRIMI MĂSURATE DIRECT

Dacă o mărime este măsurată în mod direct, de mai multe ori, cu acelaşi instrument şi în aceleaşi condiţii, se vor obţine rezultate apropiate, care diferă totuşi cu cantităţi mici.
Se poate afirma că orice măsurătoare directă este afectată de erori, erori care fac ca valoarea adevărată a mărimilor măsurate să nu fie accesibilă în practică.
Considerăm că asupra aceleeaşi mărimi M s-au executat ”n” măsurători, rezultând valorile $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
Dacă aceste valori sunt suficient de apropiate, rezultă că măsurătorile individuale sunt corecte.
Se consideră că valoarea cea mai probabilă pentru acest set de ”n” măsurători, este media aritmetică a acestora:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{n} = \frac{[M_i]}{n}$$

(2.11)
Acest procedeu s-a considerat la început că fiind impus de logica lucrurilor (postulatul lui Gauss-1809), dar ulterior a fost justificat prin calculul probabilităţilor.

2.2.2. EROAREA MEDIE PĂTRATICĂ A UNEI SINGURE MĂSURĂTORI

Erorile aparente $v_i = M_i - M$ caracterizează calitatea măsurătorilor: cu cât acestea sunt mai mici cu atât măsurătoare a este mai bună, mai precisă.

Dacă se consideră media erorilor aparente $\frac{[v_i]}{n}$, aceasta ar fi egală cu zero, deoarece $[v_i]$=0 (conform primei teoreme). Acest rezultat ar conduce la concluzia falsă că măsurătoarea este perfectă (nu există erori).

Pentru a scoate în evidenţă eventualele erori mari şi de asemenea pentru a scăpa de semnele acestor erori, în practică se admite eroarea medie pătratică $\frac{[v_i v_i]}{n}$, în care n reprezintă numărul de măsurători efectuate.

Eroarea medie pătratică se noteaza cu m^2 şi are expresia:

$$m^2 = \frac{[v_i v_i]}{n} \tag{2.12}$$

sau, mai frecvent este folosită în calcul relaţia :

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n}} \tag{2.13}$$

Observaţie: în cazul în care se efectueaza o singură măsurătoare asupra unei mărimi se obţine rezultatul eronat: m = 0, adică măsurătoarea nu conţine erori.

Formula care dă expresia erorii medii pătratice trebuie modificată astfel ca în cazul unei singure măsurători să avem de-a face cu o nedeterminare matematică.

Ţinând seama de acest lucru, expresia lui *m* devine:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n-1}} \tag{2.14}$$

(pentru o singură măsurătoare *m* ar deveni: $m = \pm\sqrt{\frac{0}{0}}$ care este o nedeterminare din punct de vedere matematic).

Este important să se cunoască valoarea erorii medii pătratice pentru aprecierea calităţii şi a preciziei unei măsurători. Cu cât aceasta va fi mai mică, cu atât măsurătoarea va fi mai precisă.

2.2.3. EROAREA MEDIE PĂTRATICĂ A MEDIEI ARITMETICE

Această eroare este definită că diferenţa algebrică pozitivă sau negativă dintre valoarea cea mai probabilă (M) şi valoarea reală (X), adică:

$$\pm e_m = M - X \tag{2.15}$$

Considerăm următoarele erori reale ε_i:

$$\pm \varepsilon_1 = M_1 - X$$
$$\pm \varepsilon_2 = M_2 - X$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm \varepsilon_n = M_n - X$$

(2.16)

Prin însumare: $[\varepsilon_i] = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n$

$$[\varepsilon_i] = [M_i] - n \cdot X$$

(2.17)

Dacă în această relaţie înlocuim $[M_i] = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n$ cu valoarea ei $n \cdot M$ obţinută din expresia mediei, rezultă :

$$[\varepsilon_i] = n \cdot (M - X)$$

(2.18)

$$[\varepsilon_i] = n \cdot e_m$$

(2.19)

(adică, suma erorilor întâmplătoare reale este diferită de zero).

Prin ridicare la pătrat rezultă:

$$[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2 - 2[\varepsilon_i \varepsilon_j]$$

(2.20)

Pentru un număr mare de măsurători se poate considera că : $[\varepsilon_i\varepsilon_i]$= $n^2 \cdot e_m{}^2$, deoarece erorile $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ fiind unele pozitive, iar altele negative, suma dublelor produse tinde către zero.
Din această relaţie rezultă că eroarea medie pătratică a mediei aritmetice va fi egală cu :

$$e_m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_i]}{n^2}}$$

(2.21)

S-a văzut însă că mărimea erorilor reale nu poate fi cunoscută, astfel încât aceste erori vor trebui înlocuite prin erori aparente.
Ştim că: $\pm\, v_i = M_i$ - X

$\pm\, \varepsilon_i = M_i - M$

Se poate scrie că $\pm\varepsilon_i = \pm\, v_i + (M$ -X), folosindu-se un mic artificiu de calcul

$$\pm\, \varepsilon_i = \pm\, v_i + e_m$$

(2.22)

Dacă se determină din măsurători valoarea unei mărimi de ”n” ori, vom avea:

$\pm\, \varepsilon_1 = \pm\, v_1 \pm\, e_m$

$\pm\, \varepsilon_2 = \pm\, v_2 \pm\, e_m$

……………..

$\pm\, \varepsilon_n = \pm\, v_n \pm\, e_m$

(2.23)

Se ridică la pătrat aceste relaţii şi se adună, obţinându-se:

$\varepsilon_1^2 = v_1^2 + e_m^2 \pm 2v_1 e_m$

$\varepsilon_2^2 = v_2^2 + e_m^2 \pm 2v_2 e_m$

…………………

$\varepsilon_n^2 = v_n^2 + e_m^2 \pm 2v_n e_m$

(2.24)

rezultă că:

$$[\varepsilon_i\varepsilon_i] = [v_i v_i] + n \cdot e_m^2$$

(2.25)

şi ţinând cont de relaţia: $[\varepsilon_i\varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2$, se poate scrie:

$$n^2 e_m^2 = [v_i v_i] + n \cdot e_m^2$$

(2.26)

Deci:

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n(n-1)}}$$

(2.27)

Raportând această valoare la cea a erorii medii pătratice a unei singure măsurători se poate observa relaţia de legătură:

$$e_m = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$$

(2.28)

adică, eroarea medie pătratică a mediei aritmetice se reduce proporţional cu rădăcina pătrată din numărul de măsurători.

2.3. APLICAŢII PRIVIND CALCULUL MEDIEI ŞI DISPERSIEI VARIABILELOR ALEATOARE

__Aplicaţia 1__

Fiind dat un vector aleator X = (10,8,6,4,2,0).

Sã se calculeze media şi dispersia acestuia precum şi dispersia de selecţie.

Media

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} = \frac{10+8+6+4+2+0}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Dispersia

$$D^2(x) = \sigma^2(x) = M\left\{\left(x-\bar{x}\right)^2\right\} = \frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(x) = \frac{(10-5)^2+(8-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2+(2-5)^2+(0-5)^2}{6} = \frac{70}{6} = 11{,}66$$

$$\Rightarrow \sigma^2(x) = 11{,}66$$

Dispersia de selecţie

$$S^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

$$\Rightarrow\ S^2(x) = \frac{(10-5)^2 + (8-5)^2 + (6-5)^2 + (4-5)^2 + (2-5)^2 + (0-5)^2}{6-1} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\Rightarrow\ S^2(x) = 14$$

<u>*Aplicaţia 2*</u>

Sã se calculeze covarianţa de selecţie şi coeficientul de corelaţie corespunzãtor pentru vectorii:

X = (8,6,4,2,0)
Y = (-4,0,1,6,2)

Se calculează media celor doi vectori:

$$M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} = \frac{8+6+4+2+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$M(y) = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y} = \frac{-4+0+1+6+2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Covarianţa de selecţie:

$$S\ (x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{n-1}$$

Pentru vectorul X, covarianţa de selecţie are relaţia:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(8-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (0-4)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{(-4-1)^2+(0-1)^2+(1-1)^2+(6-1)^2+(2-1)^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{52}{4}}=\sqrt{13}$$

$$S\ (x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{n-1}=\frac{4\cdot(-5)+2\cdot(-1)+(0\cdot 0)+(-2)\cdot 5+(-4)\cdot 1}{4}=$$

$$=\frac{-36}{4}=-9$$

Coeficientul de corelaţie:

$$\rho_{xy}=\frac{S_{xy}}{S_x\cdot S_y}=\frac{-9}{\sqrt{10\cdot\sqrt{13}}}=\frac{-9}{\sqrt{130}}=-0{,}78$$

<u>Aplicaţia 3</u>

Sã se calculeze matricea de varianţã - covarianţã corespunzãtoare pentru vectorii:

X = (10,8,4,6,2)

Y = (4,-2,0,6,2)

Z = (0,1,0,-4,-2)

Să se arate dacă aceşti vectori sunt independenţi sau nu.

Se calculează media celor trei vectori:

$$M(x)=\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}=\frac{10+8+4+6+2}{5}=\frac{30}{5}=6$$

$$M(y)=\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=\overline{y}=\frac{4+(-2)+0+6+2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$M(z)=\overline{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n}=\overline{z}=\frac{0+1+0+(-4)+(-2)}{5}=\frac{-5}{5}=-1$$

Matricea de varianţă-covarianţă are forma:

$$\Sigma_{xyz} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}$$

Calculul covarianţelor:

$$S\ \ (x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{n-1} =$$

$$= \frac{(10-6)(4-2)+(8-6)(-2-2)+(4-6)(0-2)+(6-6)(6-2)+(2-6)(2-2)}{5-1} =$$

$$S(x, y) = \frac{4}{4} = 1$$

$$S\ \ (x, z) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(z_i - \overline{z}\right)}{n-1} =$$

$$= \frac{(10-6)(0+1)+(8-6)(1+1)+(4-6)(0+1)+(6-6)(-4+1)+(2-6)(-2+1)}{5-1} =$$

$$S(x, z) = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$S\ \ (y, z) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)\left(z_i - \overline{z}\right)}{n-1} =$$

$$\frac{(4-2)(0+1)+(-2-2)(1+1)+(0-2)(0+1)+(6-2)(-4+1)+(2-2)(-2+1)}{5-1} =$$

$$S(y, z) = \frac{-20}{4} = -5$$

$$S_{xx} = S_{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x - \overline{x_i}\right)^2}{n-1} = \frac{(10-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2+(2-6)^2}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$S_{yy} = S_{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y - \overline{y_i}\right)^2}{n-1} = \frac{(4-2)^2+(-2-2)^2+(0-2)^2+(6-2)^2+(2-2)^2}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$S_{zz} = S_{z^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z - \overline{z_i}\right)^2}{n-1} = \frac{(0+1)^2 + (1+1)^2 + (0+1)^2 + (-4+1)^2 + (-2+1)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Matricea de varianţă-covarianţă se poate scrie cu următoarele valori, fiind
simetrică în raport cu diagonala principală:

$$\Sigma_{xyz} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2,5 \\ 1 & 10 & -5 \\ 2,5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicaţia 4

Se consideră următoarea funcţie :

F(xyz)=2x^2 *+ 2y*^{2}*– z +4xy +2*

şi vectorii aleatori :

x = (7,5,4,0,6)
y = (-2,0,2,1,4)
z = (0,1,0,2,4)

Pentru funcţia *F(x,y,z)* se cunosc valorile medii şi matricea de varianţã–covarianţã.

Sã se calculeze media şi dispersia acestei funcţii.

$$M(x) = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x} = \frac{7+5+4+0+2}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$$

$$M(y) = \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{y} = \frac{-2+0+2+1+4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$M(z) = \overline{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} = \overline{z} = \frac{0+1+0+2+4}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

Media funcţiei *F*(*xyz*):

$$\overline{F} = 2\overline{x}^2 + 2\overline{y}^2 - z + 4\overline{x}\overline{y} + 2 = 2\cdot 4,4^2 + 2\cdot 1^2 - 1,4 + 4\cdot 4,4\cdot 1 + 2 = 58,92$$

Calculul dispersiei funcţiei *F*:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x}}^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\bar{y}}^2 \cdot \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\bar{z}}^2 \cdot \sigma_z^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\sigma_{xy} +$$

$$+2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\sigma_{xz} + 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\sigma_{yz}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\sigma_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{n-1} = \frac{-1{,}8}{4} = --0{,}45$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{n-1} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x - \overline{x_i}\right)^2}{n-1} = \frac{29{,}2}{4} = 7{,}3$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y - \overline{y_i}\right)^2}{n-1} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{z^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z - \overline{z_i}\right)^2}{n-1} = \frac{11{,}2}{4} = 2{,}8$$

Derivatele funcţiei *F* în raport cu necunoscutele *x,y* şi *z* au următoarele valori:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} = 4\bar{x} + 4\bar{y} = 4 \cdot 4{,}4 + 4 \cdot 1 = 21{,}6$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 4\bar{y} + 4\bar{x} = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4{,}4 = 21{,}6$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = -1$$

Valoarea dispersiei funcţiei *F* în raport cu necunoscutele *x,y* şi *z* se va scrie:

$$\sigma_F^2 = (4\bar{x} + 4\bar{y})^2 \cdot 7{,}3 + (4\bar{y} + 4\bar{x})^2 \cdot 5 + (-1)^2 \cdot 2{,}8 + 2(4\bar{x} + 4\bar{y})(4\bar{y} + 4\bar{x})(-1) +$$

$$2(4\bar{x} + 4\bar{y})(-1)(-0{,}45) + 2(4\bar{y} + 4\bar{x})(-1) \cdot 2{,}75 =$$

$$= 466{,}56 \cdot 7{,}3 + 466{,}56 \cdot 5 + 2{,}8 - 933{,}12 + 19{,}44 - 118{,}8$$

$$\Rightarrow \sigma_F^2 = 4709{,}028$$

Probleme recapitulative

1. Fiind dat un vector aleator *w* = $(-5,2,0,6,1,2)$.

Se cere sã se calculeze media şi dispersia acestuia precum şi dispersia de selecţie.

2. Sã se calculeze covarianţa de selecţie şi coeficientul de corelaţie corespunzãtor pentru vectorii:

$A = (1,7,-5,8,-11)$

$B = (2,4,-6,0,3)$

3. Sã se calculeze matricea de varianţã - covarianţã corespunzãtoare pentru vectorii:

$P = (2,4,7,1,3)$

$Q = (-5,0,4,3,7)$

Să se arate dacă aceşti vectori sunt independenţi sau nu.

4. Sã se calculeze matricea de varianţã - covarianţã corespunzãtoare pentru
vectorii:

$x_1 = (2,4,7,1,3)$

$x_2 = (-5,0,4,3,7)$

$x_3 = (-5,0,4,3,7)$

Să se arate dacă aceşti vectori sunt independenţi sau nu.

5. Se consideră următoarea funcţie :

$$F(x,y) = 3xy - 2x^2 + 4y^3 - 12$$

şi vectorii aleatori :

$x = (1,2,3,4,5)$

$y = (-2,0,4,6,1)$

pentru care se cunosc valorile medii şi matricea de varianţã –covarianţã.
Sã se calculeze media şi dispersia acestei funcţii.

6. Se consideră următoarea funcţie :

$$F(x,y,z) = 4x^3 - 2y^2 + 4z + 2xy - 3y^2z^2 - 12$$

şi vectorii aleatori :

x = (0,1,3,4,2)
y = (-2,1, -4,0,3)
z = (-3,0,1,5,2)

pentru care se cunosc valorile medii şi matricea de varianţã –covarianţã. Sã se calculeze media şi dispersia acestei funcţii.

2.4. DETERMINĂRI ÎN CAZUL VARIABILELOR INDEPENDENTE

Aplicaţia 1

Se consideră 10 valori reprezentând lungimea dintre două puncte, obţinută în urma a 10 măsurători independente de aceeaşi precizie. Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă şi abaterea standard ale distanţei măsurate.

Tabel 2.1

Nr.măsur.	*Valoarea măsurată (m)*
1	103,543
2	103,567
3	103,538
4	103,556
5	103,549
6	103,561

7	103,559
8	103,550
9	103,548
10	103,554
Σ	**1035,525**

Tabel 2.2

Nr. măsurătoare	*Valoarea măsurată*	$v_i = M - M_i$ *(mm)*	v_i^2
1	103,543	9,5	90,25
2	103,567	3,5	12,25
3	103,538	14,5	210,25
4	103,556	- 3,5	12,25
5	103,549	- 14,5	210,25
6	103,561	- 8,5	72,25
7	103,559	- 6,5	42,25
8	103,550	2,5	6,25
9	103,548	4,5	20,25
10	103,554	-1,5	2,25
Σ	1035,525	$\sum v_i = 0,0$	$\sum v_i^2 = 678,50$

Valoarea cea mai probabilă a distanţei, calculată pe baza măsurătorilor executate este *media aritmetică*, care rezultă M = 103,5525 m**.**
Calculul *abaterii standard* este efectuat în coloanele tabelului, rezultând:

$$\sigma_M = \frac{678,5}{10-1} = 75,39 \text{ mm}^2,$$

respectiv $\sigma_M = 8,68$ mm,
astfel că valoarea distanţei cerute este *103,553 m* $\pm$ *8,68 mm*.

<u>*Aplicaţia 2*</u>
Pentru determinarea unghiului format de două direcţii orizontale, către două puncte A şi B într-un punct de staţie, se execută măsurători repetate ale direcţiilor unghiulare către cele două puncte, obţinând valorile din tabelul următor. Se cere să se calculeze valorile cele mai probabile ale direcţiilor măsurate şi coeficientul de corecţie al celor două măsurători.

Tabel 2.3

Nr. măsur.	*Punctul A*	*Punctul B*
1	132.61.87	205.48.39
2	132.62.11	205.48.02
3	132.61.99	205.48.41
4	132.61.81	205.48.33
5	132.62.25	205.48.17
6	132.62.03	205.48.43
7	132.61.95	205.48.11
8	132.62.18	205.48.27
9	132.61.84	205.48.16
10	132.62.13	205.48.23
Σ	1326.20.16	2054.82.52

Valorile cele mai probabile ale celor două direcţii unghiulare sunt:

d_A **=** 132.62.01,6

d_B **=** 205.48.25,2

Cu acestea se calculează corecţiile v_i şi abaterile standard de selecţie. Rezultă *varianţele* σ^2_A **=** 2034,40 sec^2 şi σ^2_B = 1717,60 sec^2, din care se poate concluziona că măsurătoarea către punctul B este mai precisă decât cea către A.

Din varianţele celor două măsurători se calculează *abaterile standard*

σ_A **=**$15^{cc},03$

σ_B =$13^{cc},81$

astfel că valorile măsurate ale celor două direcţii se scriu sub forma:

d_A =132.62.02 $\pm$0.00.15,03

d_B =205.48.25 $\pm$0.00.13,81

Covarianţa celor două măsurători este $\sigma_{AB} = \frac{-446,04}{9} = -49,56$ sec^2,

Coeficientul de corelaţie este $\rho_{AB} = \frac{-49,56}{15,03 \cdot 13,81}$ = –0.239

Tabel 2.4

Nr. măs.	*Măsurători*		*Corecţii v_i*	
	A	*B*	*A*	*B*
1	132.61.87	205.48.39	- 14,6	13,8
2	132.62.11	205.48.02	9,4	-23,2
3	132.61.99	205.48.41	2,6	15,8
4	132.61.81	205.48.33	- 20,6	7,8

5	132.62.25	205.48.17	23,4	-8,2
6	132.62.03	205.48.43	1,4	17,8
7	132.61.95	205.48.11	- 6,6	-14,2
8	132.62.18	205.48.27	16,4	1,8
9	132.61.84	205.48.16	- 17,6	-9,2
10	132.62.13	205.48.23	11,4	-2,2
Σ			**0,0**	**0,0**

Tabel 2.5

v_i^2		$v_i^A . v_i^B$
A	*B*	
213,16	190,44	-201,48
88,36	538,24	-218,08
6,76	249,64	41,08
424,36	60,84	-160,68
547,56	67,24	-191,88
1,96	316,84	24,92
43,56	201,64	93,72
268,96	3,24	29,52
309,76	84,64	161,92
129,96	4,84	-25,08
2034,40	**1717,60**	**-446,04**

<u>Aplicaţia 3</u>

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă, varianţa şi abaterea standard pentru
unghiul determinat de direcţiile unghiulare A şi B măsurate în exemplul următor:

$\alpha = d_B - d_A$ = 205.48.25,2 – 132.62.01,6 = 72.86.23,6

$\sigma_\alpha^2 = \sigma_B^2 + \sigma_A^2 + 2 \cdot \sigma_{AB}$ = 1717,60 + 2034,40 – 99,12 = 3652,88 sec^2;

Abaterea standard a unghiului calculat este $\sigma_\alpha = \sqrt{\sigma_\alpha^2}$ = 60,44 sec, deci valoarea sa se va scrie:

α =72,862 $\pm$ 0.00.60,44

<u>Aplicaţia 4</u>

Într-un dreptunghi s-au măsurat direct lungimea şi lăţimea rezultând:

L=54,35 ±0,05 [m]

l =16,28 ±0,02 [m]

Să se calculeze valoarea medie (cea mai probabilă) a suprafeţei precum şi eroarea acesteia (abaterea standard).

$$S = L \cdot l$$

$\bar{S} = \bar{l} + \bar{L}$ =16,28 · 54,35=884,82m^2

$$\bar{S} = 884{,}82 m^2$$

Abaterea standard se calculează cu relaţia:

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial L} \right)_{\bar{L}}^2 \cdot \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial l} \right)_{\bar{l}}^2 \cdot \sigma_l^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \left(\bar{l}^2 \sigma_L^2 + \bar{L}^2 \sigma_l^2 \right)^{1/2}$$

$$\sigma_S = \left\{ (16{,}28 \cdot 0.05)^2 + (54.35 \cdot 0.02)^2 \right\}^{1/2} = \pm 1.36 m^2$$

$$\sigma_S = \pm 1.36 m^2$$

Aplicaţia 5

Intr-un triunghi dreptunghic s-au măsurat direct catetele obţinându-se următoarele rezultate.

b = 43,85 ±2cm

c = 97,26 ±5cm.

Să se calculeze ipotenuza şi eroarea acesteia.

Notăm ipotenuza triunghiului:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\bar{a} = \sqrt{43{,}85^2 + 97{,}26^2} = 106{,}68 m$$

Dispersia → abaterea standard:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial b} \right)_{\bar{b}}^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial c} \right)_{\bar{c}}^2 \cdot \sigma_c^2 \quad = \frac{2\bar{b}}{2\sqrt{\bar{b}^2 + \bar{c}^2}} \cdot \sigma_b^2 + \frac{2\bar{c}}{2\sqrt{\bar{b}^2 + \bar{c}^2}} \cdot \sigma_c^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 43.85}{2\sqrt{43.85^2 + 97.26^2}} \cdot 4cm^2 + \frac{2 \cdot 97.26}{2\sqrt{43.85^2 + 97.26^2}} \cdot 85cm^2 =$$

=0,41· 0,04+0,91· 0,25=0,24

$$\sigma_a = \pm 4.9 cm$$

Aplicaţia 6

Un unghi a fost măsurat în condiţii identice de 5 ori obţinându-se valorile din tabel (coloana M_i^0). Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă a unghiului şi parametri preciziei.

Tabel 2.6

Nr. crt.	*Valoare măsurată* M_i^0	*Valoare redusă* $x_i=M_i^0-M_0$	*Corecţia* $v_i=M-M_i^0$
1	18.75.40	$+10^{cc}$	-3^{cc}
2	18.75.37	$+7^{cc}$	0
3	18.75.36	$+6^{cc}$	$+1^{cc}$
4	18.75.34	$+4^{cc}$	$+3^{cc}$
5	18.75.38	$+8^{cc}$	-1^{cc}
□	$M_0=18^g75^c30^{cc}$	$[x]=+35^{cc}$	0

Se consideră valoarea de referinţă $M_0= 18^g75^c30^{cc}$

$[x]= +35^{cc}$ (eroare de neînchidere)

$$- \quad \frac{[x]}{n}=\frac{+35}{5}=+7^{cc}\text{(eroare pe unitatea de mãsurã)}$$

$$- \quad Media : M = M_0 + \frac{[x]}{n} = 18.75.30 + 7^{cc} = 18.75.37$$

Pentru calculuş' corecţiilor se foloseşte relaţia:

$v_i= M-M_i$

$$v_1 = -3^{cc}$$
$$v_2 = 0$$
$$v_3 = 1^{cc}$$
$$v_4 = 3^{cc}$$
$$v_5 = -1^{cc}$$

$[vv] = 20^{cc}$ din care rezultă varianţa:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{20^{cc}}{4} = 5^{cc}$$

- Abaterea standard pentru o măsurătoare:

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = 2^{cc},24$$

- Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{2^{cc},24}{\sqrt{5}} = \pm 1^{cc}$$

Valoarea unghiului măsurat va fi:

$\hat{u}$ = 18.75.37 ±1^{cc}

Aplicaţia 7

Pentru determinarea cotei unui punct *P* din trei puncte *A,B,C* de cotă cunoscută, s-au măsurat 3 diferenţe de nivel rezultând următoarele date:

Tabel 2.7

Punct	*Cota H_i^0 (m)*	*Diferenţa de nivel măsurată ΔH_i^0 (m)*	*Ponderea (p_i)*
A	86,144	+1,386	1,3
B	89,710	-2,172	0,6
C	87,022	+0,511	0,9

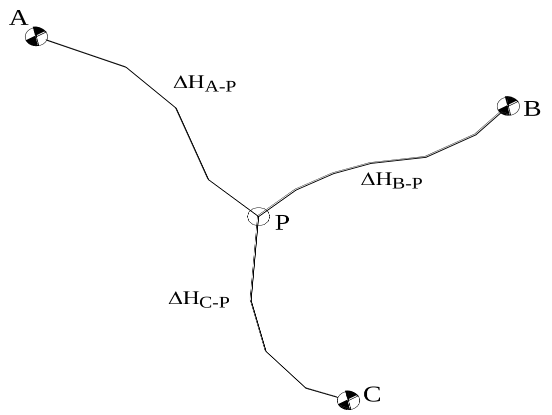

Figura 2.1 – Reţea de nivelment geometric

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă a cotei punctului *P* şi precizia de determinare, considerând valoarea de referinţă H_0 = 87,500m

Se calculează 3 valori pentru cota punctului *P*, valori cărora li se atribuie ponderea diferenţelor de nivel din care au fost calculate:

Tabel 2.8

Traseu	*Cota calculată (H_i)*	*Pondere (p_i)*	*Valoare redusă $x_i=H_i-H_0$ [mm]*	$p_i \cdot x_i$
A-P	87,530	1,3	+30	39,0
B-P	87,538	0,6	+38	22,8
C-P	87,533	0,9	+33	29,7
H_0=87,500 (m)		[p_i]=2,8		91,5

Tabel 2.8

Corecţii $v_i=\{[p{\cdot}x]/[p]\}-x_i$ [mm]	$p_i{\cdot}v_i$
2,7	+3,5
-5,3	-3,2
-0,3	-0,3
	0

Se consideră valoarea de referinţă H_0 = 87,500 m faţă de care se calculează valorile reduse $x_i = H_i – H_0$

$$\frac{[p_i x_i]}{[p]} = \frac{91,5}{2,8} = 32,7mm$$

Se calculează $[p_i x_i]$ = 91,5

Se calculează valoarea cea mai probabilă a cotei:

H_m = 87,500m + 32,7mm

H_m = 87,533m

Se calculează [pvv] =26,41

Evaluarea preciziei măsurătorilor

- Se calculează varianţa :

$$\sigma^2 = \frac{[pvv]}{n-1} = \frac{26,41}{2} = 13,20mm$$

- Abaterea standard a unităţii de pondere:

- Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm 3{,}63mm$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{\pm 3{,}63}{\sqrt{[p]}} = \frac{\pm 3{,}63}{\sqrt{2{,}8}} = 2{,}2mm = 0{,}002m$$

Valoarea cotei punctului *P* va fi:

$H_P = H_m + □_m$

$H_P = 87{,}533 \pm 0{,}002m$

Compensarea diferenţelor de nivel măsurate

- Calculul diferenţelor de nivel compensate:

$□H_i = □H_i^0 + v_i$

- Abaterile standard pentru valorile □Hi:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}}$$

Tabel 2.9

Pct	*Dif. de nivel măs.*	*Corecţii v_i [m]*	*Dif. de nivel compensate*	*$□_i$ [mm]*	*Cota calculată H_P [m]*
A	+1,386	+0,0027	+1,3887	3,2	87,5327
B	-2,172	-0,0053	-2,1773	4,7	87,5327
C	+0,511	-0,0003	+0,5107	3,8	87,5327

Determinarea cotelor punctului *P* funcţie de diferenţele de nivel compensate:

$H_P = H_A + □H_{comp}$

$H_P = H_B + □H_{comp}$

$H_P = H_C + □H_{comp}$

<u>*Aplicaţia 8*</u>

Pentru determinarea înălţimii unei clădiri se măsoară de mai multe ori cu ajutorul unui teodolit unghiurile verticale α_i şi cu ajutorul unei rulete se măsoară distanţa orizontală *d*, valorile obţinute fiind trecute în tabelele de mai jos.

Tabel 2.10

Nr. măs.	*Unghiuri verticale (grade)*	
	α□	α_2
1	100.62.50	97.69.60
2	100.62.30	97.69.80
3	100.62.40	97.69.50
4	100.62.50	97.69.70
5	100.62.40	97.69.60
6	100.62.60	97.69.50
	M_0 =100.62.30	M_0 =97.69.50

Tabel 2.11

Nr. măs.	*Distanţa orizontală "d"*
1	132,530
2	132,560
3	132,580
4	132,550
	M_0 =132,500m

Se cere valoarea cea mai probabilă a înălţimii clădirii şi precizia de determinare a acesteia.

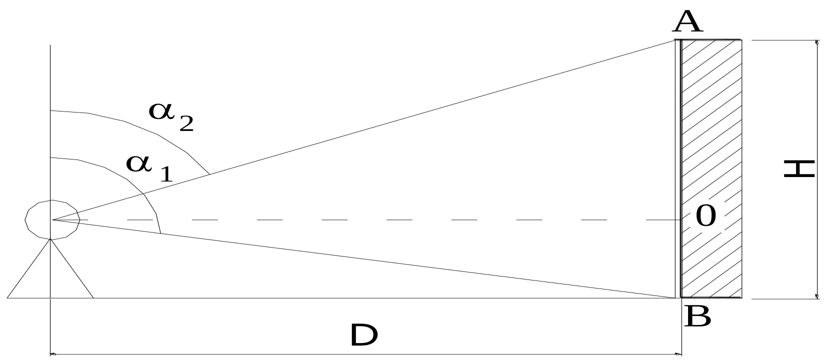

Figura 2.2 – Determinarea înălţimii unui obiectiv

Din figură se observă că:

$H = AO+OB= d\ ctg\alpha_2 – d\ ctg\alpha_1= d\ (ctg\alpha_2 –ctg\alpha_1)$

Deci, înălţimea clădirii se obţine ca funcţie de valorile măsurate direct *d*, α_1, α_2.

Etapa 1 – Compensarea măsurătorilor unghiului vertical α_1

Tabel 2.12

Nr. crt.	*Valoarea măsurată* $(M_i^0) \rightarrow \alpha_1$	*Valoare măsurată* $M_i^0 - M_0$ (x_i)	*Corecţia* (v_i)
1	100.62.50	$+20^{cc}$	-5^{cc}
2	100.62.30	0^{cc}	$+15^{cc}$
3	100.62.40	$+10^{cc}$	$+5^{cc}$
4	100.62.50	$+20^{cc}$	-5^{cc}
5	100.62.40	$+10^{cc}$	$+5^{cc}$
6	100.62.60	$+30^{cc}$	-15^{cc}
Σ	M_0 =100.62.30	$[x] = +90^{cc}$	$[v_i] = 0$

Etapa 2 – Compensarea măsurătorilor unghiului vertical α_2

Tabel 2.13

Nr. crt.	*Valoarea măsurată* $(M_i^0) \rightarrow \alpha_2$	*Valoarea redusă* (x_i)	*Corecţia* (v_i)
1	97.69.60	$+10^{cc}$	$+2^{cc}$
2	97.69.80	$+30^{cc}$	-20^{cc}
3	97.69.50	0^{cc}	$+12^{cc}$
4	97.69.70	$+20^{cc}$	-8^{cc}
5	97.69.60	$+10^{cc}$	$+2^{cc}$
6	97.69.50	0^{CC}	$+12^{cc}$
Σ	M_0 =97.69.50	$[x]=+70^{cc}$	$[v] =0$

Valorile de referinţă se aleg:

$\alpha_1 \rightarrow M_0 = 100.62.30$

$\alpha_2 \rightarrow M_0 = 97.69.50$

Se calculează valoarea redusă: $x_i = M_i^0 - M_0$ şi $[x]$

Eroarea pe unitatea de măsură:

$$\frac{[x]}{n} = \left\langle \begin{matrix} +15^{cc} \\ +12^{cc} \end{matrix} \right.$$

Calculul valorilor medii pentru α_1 şi α_2:

$$M = M_0 + \frac{[x]}{n} = \left\langle \begin{matrix} 100.62.45 \\ 97.69.61 \end{matrix} \right.$$

Calculul varianţei:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{550}{5} = 110^{cc}$$

Abaterea standard pentru o măsurătoare:

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 10{,}49^{CC}$$

Abaterea standard a mediei:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{10{,}49}{\sqrt{6}} = \pm 4^{cc}{,}3$$

Pentru α_2:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{684}{5} = 136^{cc}{,}8$$

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 11^{cc}{,}70$$

Valoarea finală a unghiurilor va fi:

$\alpha_1 = 100.62.45 \pm 4^{cc},3$

$\alpha_2 = 97.69.62 \pm 4^{cc},8$

Etapa 3 - Compensarea măsurătorilor de distanţă

Se alege valoarea de referinţă: $M_0 = 132{,}500$ m

Tabel 2.14

Nr. crt.	*Valoarea măsurată M_i^0(m)*	*Valoarea redusă $x_i=M_i^0-M_0$ (mm)*	*Corecţia $v_i=M-M_i^0$ (mm)*
1	132,530	+30	+25
2	132,560	+60	-5

3	132,580	+80	-25
4	132,550	+50	5
Σ	M_0=132,500	[*x*]= 220	[*v*]=0

$$\frac{[x]}{n} = \frac{22cm}{4} = 5{,}5cm$$

$$M = M_0 + \frac{[x]}{n} = 132{,}555(m)$$

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{550}{5} = 110mm$$

Calculul varianţei:

$$\sigma^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{13}{4} = 4{,}33mm$$

Distanţa: *d* = 132,555m ±1,04cm

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm 2{,}08mm$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \pm 1{,}04mm$$

Valoarea cea mai probabilă (medie) a înălţimii clădirii este:

H= d[ctg(α_2)- ctg(α_1)]=132,555[ctg(97.69.62) –ctg(100.62.45)]= 6,099m

Pentru determinarea parametrilor preciziei trebuiesc calculate derivatele parţiale în raport cu cele trei variabile α_1, α_2, *d*:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial d}\right) = ctg(\overline{\alpha_2}) - ctg(\overline{\alpha_1}) = 0{,}046$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{d}{\sin^2 \alpha_1} = 13256{,}8(cm)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{d}{\sin^2 \alpha_2} = 13272{,}9(cm)$$

Varianţa funcţiei de mai multe variabile:

$$\sigma_{(F)}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_{(H)}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial d}\right)_0^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\right)_0^2 \cdot \sigma_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right)_0^2 \cdot \sigma_{\alpha_2}^2 =$$

$$= 0{,}046^2 \cdot 1{,}0^2\, cm^2 + 13256{,}8^2\, cm^2 \cdot \left(\frac{4.3}{\rho^{cc}}\right)^2 + 13272.9^2\, cm^2 \left(\frac{4.8}{\rho^{cc}}\right)^2$$

Unde "ρ" reprezintă coeficientul de transformare din secunde în radiani:
ρ^{cc}= 636620

$\sigma_{(H)}{}^2$=0,002116cm^2+ 0,0080cm^2+0,010cm^2 = 0,0201cm^2

$\sigma_{(H)}$ = 0,14cm

Valoarea cea mai probabilă a înălţimii clădirii se poate scrie astfel:

H=6,099m ±1,4mm

Probleme recapitulative

1 - Pentru determinarea unui unghi către două puncte de detaliu, se execută măsurători repetate ale direcţiilor unghiulare către cele două puncte, obţinând valorile din tabelul următor.
Se cere să se calculeze valorile cele mai probabile ale direcţiilor măsurate şi coeficientul de corelaţie al celor două măsurători.

.Tabel 2.15

Nr. măsur.	*Direcţia 1*	*Direcţia 2*
1	204.61.17	317.48.51
2	204.62.25	317.48.27
3	204.61.75	317.48.94
4	204.61.44	317.48.30
5	204.62.07	317.48.24
6	204.62.83	317.48.64

2 - Se consideră 4 valori reprezentând lungimea dintre două puncte, obţinută în urma a 4 măsurători independente de aceeaşi precizie.

Se cere să se calculeze valoarea cea mai probabilă şi abaterea standard ale distanţei măsurate.

Tabel 2.16

Nr.măsur.	*Valoarea măsurată (m)*
1	74,218
2	74,217
3	74,210
4	74,224

3 - Pentru determinarea cotei unui punct "*B*" din cinci puncte *C,D,E,F,G* de cotă cunoscută, s-au măsurat 5 diferenţe de nivel rezultând următoarele date:

Tabel 2.17

Punct	*Cota "H_i^0"(m)*	*Diferenţa de nivel măsurată ΔH_i^0 (m)*	*Ponderea (p_i)*
C	50,210	+0,286	0,2
D	52,400	-1,810	1,3
E	51,100	-0,604	0,9
F	54,600	-4,100	0,6
G	51,200	-0,740	1,1

Să se calculeze valoarea cea mai probabilă a cotei punctului *P* şi precizia de determinare, considerând valoarea de referinţă H_0 = 50,000m.

CAPITOLUL 4

EVALUAREA PRECIZIEI DETERMINĂRILOR UTILIZÂND ELIPSA ERORILOR

La măsurătorile de precizie, pe lângă valorile probabile ale mărimilor măsurate sau deduse indirect ne interesează şi precizia acestora.Această problemă se pune deci şi în cazul reţelelor geodezice.

Poziţia planimetrică a unui punct în urma compensării depinde de doi parametri: X şi Y, deci avem de-a face cu un sistem bidimensional de încredere care reprezintă o *elipsă*. Erorile medii pătratice m_x şi m_y calculate în urma compensării îşi schimbă însă valorile la o rotaţie a axelor de coordonate ceea ce produce o neuniformitate_în aprecierea preciziei.
În acest caz este necesar să se construiască elipsa erorilor, care este independentă de sistemul de axe ales. Cu ajutorul elipsei erorilor putem determina erorile în poziţia punctelor pentru orice direcţie (deci şi pentru direcţia axelor de coordonate) cât şi direcţiile pentru care erorile sunt maxime sau minime.
Semiaxele elipsei şi unghiurile acestora cu axele de coordonate se pot determina cu ajutorul unui sistem rectangular u, v, rotit cu unghiul φ faţă de sistemul iniţial XY (figura 4.1).

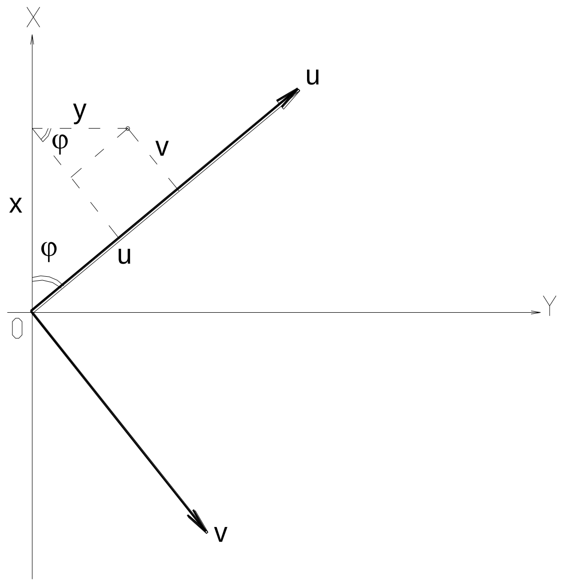

Figura 4.1 – Elementele elipsei erorilor

Coordonatele unui punct *P* în sistemul uv în funcţie de coordonatele XY vor fi:

$$u = X\cos\varphi + Y\sin\varphi \qquad (4.1)$$
$$v = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

Se observă că "u"este o funcţie liniară de X şi Y, mărimi determinate indirect. Pentru determinarea erorii lui "u" se aplică formula erorii unei funcţii de mărimi determinate indirect. Vom avea:

$$Q_{uu} = Q_{xx}\cos^2\varphi + 2Q_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi \qquad (4.2)$$

iar eroarea medie: $m_u = \pm m\sqrt{Q_{uu}}$ (4.3)

Valorile maxime sau minime ale funcţiei se obţin pentu $\dfrac{\partial Q_{uu}}{\partial\varphi} = 0$

Relaţia mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + Q_{xy}\sin 2\varphi$$
$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{2}\cos 2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi \qquad (4.4)$$

Calculând derivata în raport cu φ se obţine:

$$\frac{\partial Q_{uu}}{\partial\varphi} = -(Q_{xx} - Q_{yy})\sin 2\varphi + 2Q_{xy}\cos 2\varphi = 0 \qquad (4.5)$$

de unde rezultă: $tg 2\varphi = \dfrac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$ (4.6)

având soluţiile: (φ) şi $\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Cele două direcţii obţinute sunt ortogonale: (φ) reprezintă unghiul format de axa *OX* cu direcţia semiaxei mari a elipsei; $\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ dă valoarea minimă, adică unghiul format de axa *OX* cu semiaxa mică.

Elipsa erorilor reprezintă un invariant al erorilor în poziţia planimetrică a unui punct. Având construită elipsa erorilor într-un punct putem determina eroarea pe orice direcţie pe cale grafică astfel:

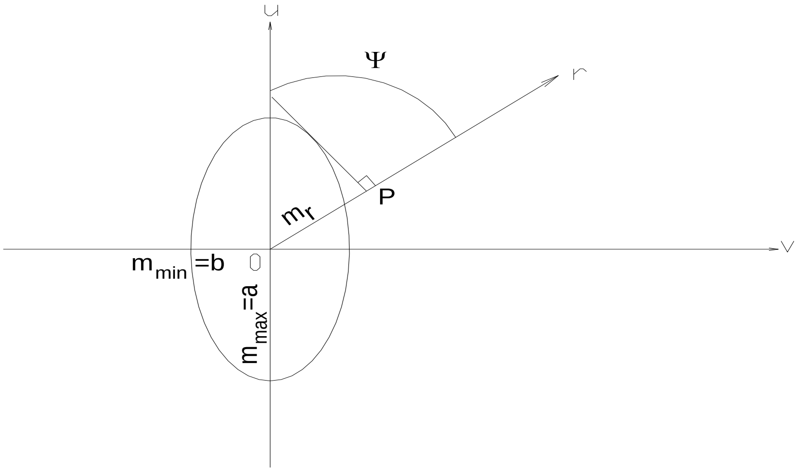

Figura 4.2 – Reprezentarea grafică a elipsei erorilor

Se coboară o perpendiculară pe direcţia r tangentă la elipsă, mărimea erorii "m_r" fiind egală cu segmentul cuprins între centrul elipsei şi piciorul perpendicularei (OP)
Analitic, acest segment are valoarea dată de:

$$m_r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$$
$$m_r^2 = m_{\max}^2 \cos^2 \varphi + m_{\min}^2 \sin^2 \varphi \quad (4.7)$$

Un caz particular al acestei relaţii avem când: …. $\varphi = 0$, rezultă $m_r = m_x$ şi $\varphi = 100$, rezultă $m_r = m_y$, adică proiecţiile elipsei pe direcţia X şi Y (figura 4.3).

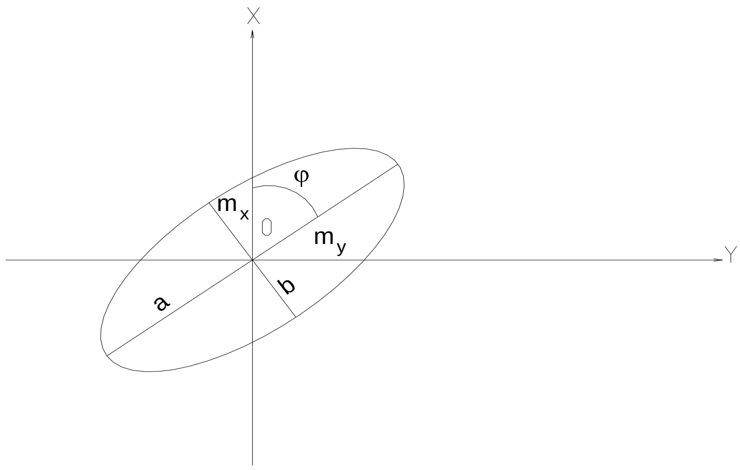

Figura 4.3 – Unghiul de rotaţie al elipsei erorilor

Aplicaţia 1

Dintr-o lucrare de triangulaţie s-au extras din matricea coeficienţilor de pondere elementele corespunzătoare punctelor *A* şi *B* înscrise în tabelul următor şi exprimate în *cm*.

Tabel 4.1

Coeficienţi de pondere	$X_{(A)}$	$Y(_A)$	$X(_B)$	$Y(_B)$
$X(_A)$	+4,10	- 0,17	+ 4,00	-2,20
$Y(_A)$		+ 4,20	+2,10	+3,40
$X(_B)$			+5,60	+1,20
$Y(_B)$				+4,03

Se cere să se traseze elipsele în punctele *A* şi *B* cît şi elipsa relativă pentru aceste puncte. Orientarea direcţiei AB este: $\theta = 63.^g 81^c$ iar abaterea standard a unităţii de pondere este σ_0 =1 cm

Pentru punctul A:

Q_{xx} = +4,10
Q_{yy} = +4,20
Q_{xy} = -0,17

Orientarea semiaxei mari (unghiul făcut cu axa *OX*):

$$2\phi = \text{arctg}\ \frac{2Q_{xy}}{Q_{XX} - Q_{YY}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\left(arctg\ \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \right)$$

$$\phi = \frac{1}{2}\left(arctg\ \frac{-0,34}{-0,1} \right) = \frac{1}{2}\left(arctg 3,4\right) = 40.^g 89.$$

$$\phi = 140.^g 89$$

$$Q_{max,min} = S_{12} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}{}^2}$$

$$= 4,15 \pm \frac{1}{2}\sqrt{0,01 + 0,1156} = 4,15 \pm 0,17$$

$Q_{max,min}$ = 4,15 $\pm$ 0,17
Q_{max} = 4,32 (cm)
Q_{min} = 3,98 (cm)

Semiaxele elipsei erorilor în punctul A:

$a = \sigma_0 \sqrt{Q_{\max}} = 1 \cdot \sqrt{4.32}$ = 2,08 cm.

$b = \sigma_0 \sqrt{Q_{\min}} = 1 \cdot \sqrt{3.98}$ = 1.99 cm

Pentru punctul B :

Q_{xx}= 5,60
Q_{yy}= 4,03
Q_{xy}= 1,20

Orientarea semiaxei mari:

$$2\phi = arctg\,\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} arctg\,\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}}$$

$$\phi = \frac{1}{2} arctg\,\frac{+2,4}{+1,57} = \frac{1}{2} arctg(1,52866) = 31.^{g}56.03$$

$$Q_{max,min} = S_{12} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}{}^2}$$

$$= 4,815 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2,4649 + 5,76} = 4,815 \pm \frac{2,867}{2}$$

Q_{max} = 4,815+1,433= 6,2 (cm)
Q_{min} = 4,815 - 1,433= 3,4 (cm)

Semiaxele elipsei erorilor în punctul *B*:

$a = 1 \cdot \sqrt{6,2}$ = 2,5cm

$b = 1 \cdot \sqrt{3,4}$ =1,8cm

Calculul elementelor elipsei relative:

Q_{xx} = 4,10 + 5,60-2 · 4,00= +1,70 - ($Qxx_A + Qxx_B - 2Qxx_{AB}$)
Q_{yy} = 4,20+4,03-2 · 3,40= +1,43 - ($Q_{YYA} + Q_{YYB} - 2Q_{YYAB}$)
Q_{xy} = (-0,17)+1,20-(2,20)-2,10= +1,13

Orientarea semiaxei mari:

$$\phi = \frac{1}{2} arctg\,\frac{2Q_{XY}}{Q_{XX} - Q_{YY}} = \frac{1}{2} arctg\,\frac{2,26}{0,27} = 44.^{g}83.$$

$$Q_{max,min} = \frac{Q_{XX} + Q_{YY}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(Q_{XX} - Q_{YY})^2 + 4Q_{XY}{}^2}$$

$$= 1,615 \pm \frac{1}{2}\sqrt{0,1369 + 5,1076} = 1,615 \pm 1,145$$

Q_{max} = 2,76 (cm) $\approx 2,8$ cm.

Q_{max} = 0,47 (cm) $\approx 0,5$ cm.

Semiaxele elipsei relative:

$a = 1 \cdot \sqrt{2,08}$ = 1,7cm

$b = 1 \cdot \sqrt{0,5}$ = 0,7cm

Reprezentarea grafică a elipsei erorilor se face la scară naturală (scara 1:1), funcţie de elementele obţinute prin calcul (unghiul de orientare al semiaxei mari, semiaxa mare şi mică).

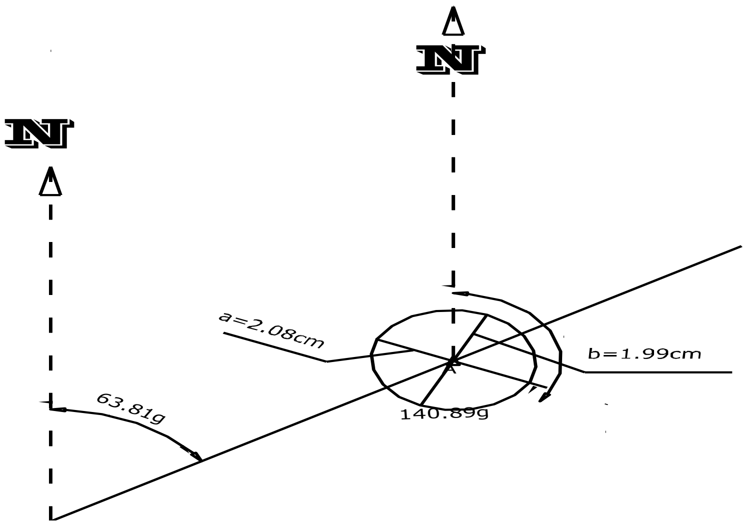

Figura 4.4 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctul A

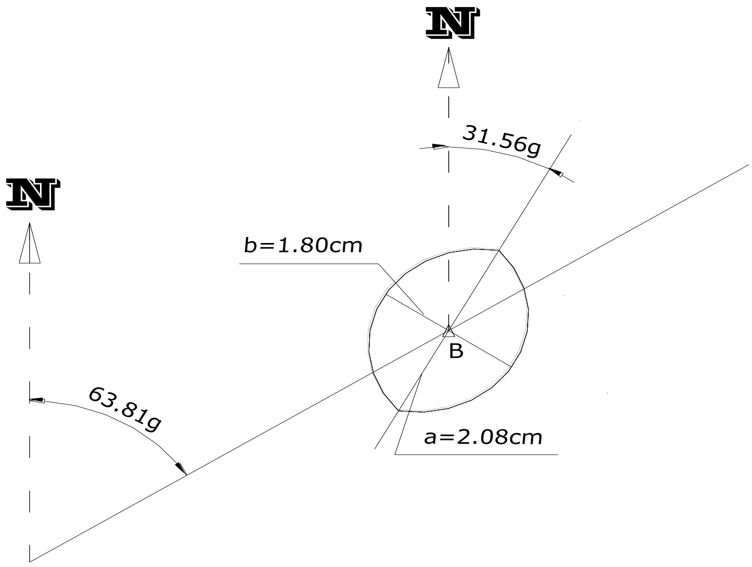

Figura 4.5 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctul B

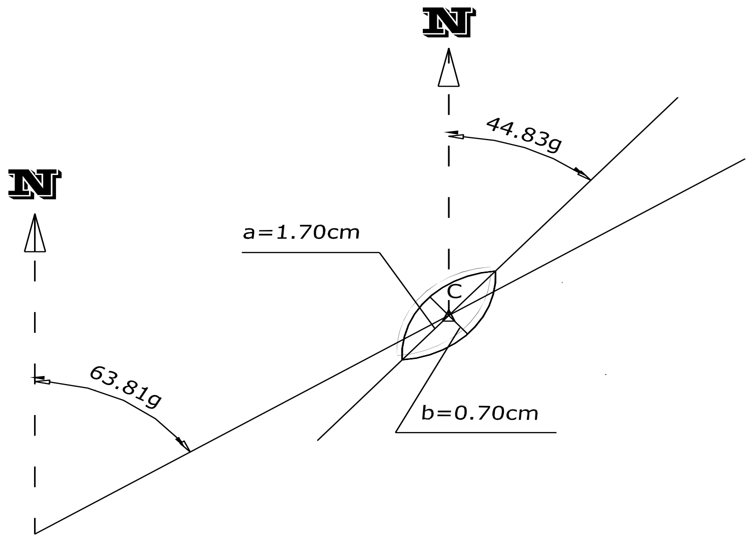

Figura 4.6 – Reprezentarea elipsei erorilor relativă

Aplicaţia 2

Pornind de la tabelul coeficienţilor ecuaţiilor normale, se cere să se determine necunoscutele X_A, Y_A, X_B, Y_B prin rezolvarea sistemului cu schema Gauss – Doolittle extinsă, ce definesc poziţia planimetrică a două puncte din teren *A* şi *B*.

Tabel 4.2

[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[al]	[aS]	Control
0.39745	0.08189	–0.29011	0.0713	–29.42507	–29.22872	–29.22871
	0.81905	–0.51449	–0.58360	–11.74325	-11.94041	-11.94040
		0.62615	0.23976	16.87352	16.93483	16.93483
			0.59159	11.27591	11.53078	11.53078

Pe baza coeficienţilor de pondere calculaţi în schema Gauss-Doolitlle extinsă, şi alegând abaterea standard τ_0 = 2,8, se vor reprezenta la scară naturală elipsele erorilor în punctele *A* şi *B*.
Orientarea direcţiei dintre punctele *A* şi *B* este de 90^g.

Rezolvarea problemei implică parcurgerea următoarelor etape:

- rezolvarea sistemului normal cu schema Gauss-Doolittle extinsă;

- obţinerea soluţiilor pe baza coeficienţilor liniei roşii a sistemului;
- calculul coeficienţilor de pondere pătratici şi micşti;
- calculul elementelor caracteristice elipsei erorilor;
- reprezentarea grafică a elipsei erorilor pentru punctele *A* şi *B* la scara 1:2.

Tabel 4.3

[aa]	*[ab]*	*[ac]*	*[ad]*	*[al]*	*[aS]*
0.39745	0.08189	–0.20911	0.00713	–29.42507	–29.22872
–1	–0.206038	0.729928	–0.017939	74.034646	73.540621
	0.81905	–0.51449	–0.58360	–11.74325	–11.94041
	0.802178	–0.454716	–0.585069	–5.680567	–5.918183
	–1	0.566852	0.729351	7.081430	7.377643
		0.62615	0.23976	16.87352	16.93483
		0.156634	–0.086683	–7.824703	–7.754765
		–1	0.553411	49.955329	49.508823
			0.59159	11.27591	11.53078
			0.116770	3.330362	3.447109
			–1	–28.52069	–28.520502

Tabel 4.3-continuare

Control	Q_{XXA}	Q_{YYA}	Q_{XXB}	Q_{YYB}
--	–1	0	0	0
73.540587	2.51604	0	0	0
--	0	–1	0	0
–5.918174	0.206038	–1	0	0
7.377632	–0.256848	1.246606	0	0
--	0	0	–1	0
–7.754752	–0.613135	–0.566852	–1	0
49.50874	3.914444	3.618959	6.38431	0
--	0	0	0	–1
3.447132	–0.171103	–1.043053	–0.553411	–1
–28.52069	1.465299	8.932543	4.739325	8.563843

Observaţii:

- Termenii Q_{XXA}, Q_{YYA}, Q_{XXB}, Q_{YYB} reprezintă coeficienţii de pondere pătratici pentru punctele *A* şi *B*.

Calculul necunoscutelor (soluţiilor) X, Y pentru punctele A şi B:

$-1 \cdot Y_B + (-28.52069) = 0 \rightarrow Y_B = -28.52069$

$-1 \cdot X_B + 0.553411 \cdot Y_B + 49.955329 = 0 \rightarrow X_B = 34.1717$

$-1 \cdot Y_A + 0.566852 \cdot X_B + 0.729351 \cdot Y_B + 7.081430 = 0 \rightarrow Y_A = 5.6501$

$-1 \cdot X_A + (-0.206038) \cdot Y_A + 0.729928 \cdot X_B \cdot (-0.017939) + 74.034646 = 0 \rightarrow X_A = 98.3250$

Verificarea soluţiilor obţinute:

Soluţiile obţinute pe baza schemei Gauss-Doolittle extinsă se verifică prin respectarea condiţiei impuse de următoarea relaţie:

$[(S - Q - l) \cdot x_i] = -[l]$

Verificarea soluţiilor obţinute se va face pe linia cu coeficienţii ecuaţiilor de condiţie ale sistemului normal.

$[(S - Q - l) \cdot x_i]$ = [(–29.22872 + 1 + 29.42507) · 98.3250 + (–11.94041 + 1 + 11.74325)· 5.6501 + + (16.93483 + 1 + 16.87352) · 34.1717 + (11.53078 + 1 + 11.27591) · (–28.52069)] = 13.0181

$[l]$ = –29.42507 + (–11.74325) + 16.87352 + 11.27591 = – 13.0188

→ 13.0181 ≈ 13.0188

Calculul coeficienţilor de pondere

Coeficienţii de pondere se vor calcula pe coloanele schemei Gauss-Doolittle extinse, iar valorile obţinute se vor nota cu semn schimbat.

Coeficienţii de pondere pentru punctul *A*:

Q_{XXA} = 2.51604 · (–1) + (–0.256848) · (0.206038) + 3.914444 · (–0.613135) + + 1.465299 · (–0.171103) = – 5.2198

→ Q_{XXA} = 5.2198

$Q_{YYA} = 0 \cdot 0 + 1.246606 \cdot (-1) + 3.618959 \cdot (-0.566852) + 8.932543 \cdot (-1.043053) = -12.6151$

→ Q_{YYA} = 12.6151

Q_{XYA} = 2.51604 · 0 + (–0.256848) · (–1) + 3.914444 · (–0.566852) + 1.465299 · · (–1.043053) = – 3.4904

→ Q_{XYA} = 3.4904

Coeficienţii de pondere pentru punctul *B*:

Q_{XXB} = 0 · 0 + 0 · 0 + 6,384310 · (–1) + 4,739325 · (–0,553411) = – 9,0071

→ Q_{XXB} = 9.0071

Q_{YYB} = 0 · 0 + 0 · 0 + 0 · 0 + 8.563843 · (–1) = – 8.563843

→ Q_{YYB} = 8.5638

Q_{XYB} = 0 · 0 + 0 · 0 + 6.38431 · 0 + 4.739325 · (–1) = – 4.739325

→ Q_{XYB} = 4.7393

Calculul elementelor caracteristice elipsei erorilor

Elipsa erorilor în punctul A

Coeficienţii de pondere care se iau în calcul pentru elipsa erorilor în punctul A sunt:

Q_{XXA} = 5.2198

Q_{YYA} = 12.6151
Q_{XYA} = 3.4904

Determinarea valorilor maxime şi minime ale coeficienţilor de pondere:

$$Q_{\max,\min} = \frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{xx}-Q_{yy}\right)^2+4Q_{xy}^2} = 8.9175 \pm \frac{10.1697}{2}$$

Q_{max} = 14.0023
Q_{min} = 3.8327

Determinarea valorilor semiaxelor elipsei erorilor:

$$a = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{mx}} = 10.47cm$$

$$b = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\min}} = 5.48cm$$

Determinarea unghiului de rotaţiei al semiaxei mari:

$$tg\,2\varphi = \frac{2Q_{XYA}}{Q_{XXA}-Q_{YYA}} = \frac{6.9808}{-7.3953} = -0.943945$$

→ $\varphi = 175.91$

Elipsa erorilor în punctul B

Coeficienţii de pondere care se iau în calcul pentru elipsa erorilor în punctul B sunt:

Q_{XXB} = 9.0071
Q_{YYB} = 8.5638
Q_{XYB} = 4.7393

Determinarea valorilor maxime şi minime ale coeficienţilor de pondere:

$$Q_{\max,\min} = \frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{xx}-Q_{yy}\right)^2+4Q_{xy}^2} = 8.7855 \pm 4.7445$$

Q_{max} = 13.530
Q_{min} = 4.041

Determinarea valorilor semiaxelor elipsei erorilor:

$$a = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{mx}} = 10.30cm$$

$$b = \sigma_0 \cdot \sqrt{Q_{\min}} = 5.63cm$$

Determinarea unghiului de rotaţiei al semiaxei mari:

$$tg\,2\varphi = \frac{2Q_{XYB}}{Q_{XXB}-Q_{YYB}} = \frac{9.4786}{0.4433} = 21.3819$$

→ $\varphi = 48.51$

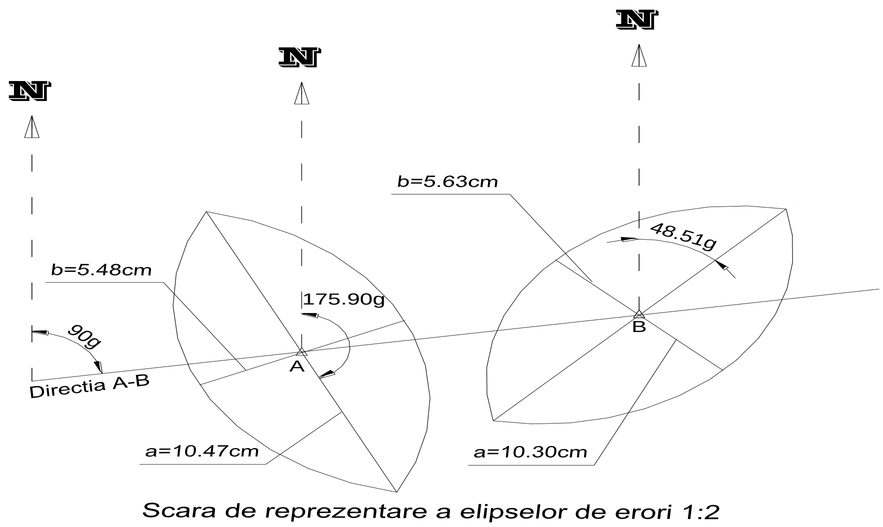

Figura 4.7 – Reprezentarea elipsei erorilor în punctele A şi B

CAPITOLUL 5
COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR CONDIŢIONATE

Metoda măsurătorilor condiţionate se aplică, în general în lucrările topo-geodezice, la compensarea reţelelor de sprijin (triangulaţie, trilateraţie, poligonometrie, nivelment).
O reţea de sprijin, de exemplu de triangulaţie - este constituită dintr-o succesiune de figuri geometrice (triunghiuri, patrulatere, poligoane).
Pentru realizarea acestei reţele se măsoară unghiuri şi laturi.
Pentru rezolvarea problemei de compensare este util să se evalueze numărul acestor relaţii cât şi caracterul lor, pastrând însă doar relaţiile independente.
Numărul ecuaţiilor de condiţie independente este egal cu numărul măsurătorilor efectuate în plus (nr. gradelor de libertate).
Se consideră n mărimi $X_1, X_2, ...X_n$ pentru determinarea cărora s-au efectuat măsurători directe, găsindu-se rezultatele $l_1, l_2, ...l_n$. Presupunem că cele n necunoscute $X_1, X_2, ...X_n$, trebuie să satisfacă r relaţii de condiţie independente între ele (rezultă deci că numărul mărimilor măsurate în plus este r):

$$f_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

$$f_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \qquad (5.1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

Valorile măsurate direct $l_1, l_2, ..., l_n$ nu vor satisface riguros acest sistem, astfel încât prin înlocuirea necunoscutelor $X_1, X_2, ..., X_n$ prin $l_1, l_2, ..., l_n$ vom obţine rezultate diferite de zero:

$$f_i(l_1, l_2, ..., l_n) = w_i \qquad (i = 1, 2, ...r) \qquad (5.2)$$

Mărimile w_i poartă denumirea de discordanţe, nepotriviri sau *termeni liberi.*

Problema care se pune este de a găsi corecţiile $v_1, v_2, ..., v_n$ care, aplicate mărimilor măsurate $l_1, l_2, ..., l_n$, să facă să dispară aceste mici discordanţe. Deci, pentru a fi satisfăcut sistemul trebuie să avem:

$$X_i = l_i + v_i \qquad (i = 1, 2, ...n) \qquad (5.3)$$

Notând:

$$f_i(l_1, l_2, ..., l_n) = w_i \qquad (i = 1, 2, ...r)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)_0 = a_i \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)_0 = b_i \quad \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right)_0 = r_i \qquad (5.4)$$

Cu aceste notaţii se obţine:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r &= 0 \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Acesta este *sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor.*

Mărimea w reprezintă termenul liber al ecuaţiei de condiţie şi reprezintă în acelaşi timp valoarea ecuaţiei pentru mărimile măsurate. Această observaţie este utilă pentru calculul practic al termenului liber al ecuaţiilor de condiţie.

În sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie întrucât numărul ecuaţiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor (*r<n*), sistemul este nedeterminat, gradul de nedeterminare fiind *(n-r).*

Pentru rezolvarea problemei, deci pentru determinarea tuturor corecţiilor v_i, vom folosi metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[vv] = \min. \qquad (5.6)$$

sau, în cazul măsurătorilor ponderate:

$$[pvv] = \min. \qquad (5.7)$$

Corecţiile de determinat v_i, trebuind să satisfacă atât condiţia de minim cât şi sistemul liniar, avem de-a face cu o problemă de *minim condiţionat*, care se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange.

5.1. MĂSURĂTORI CONDIŢIONATE DE ACEEAŞI PRECIZIE

Funcţia Lagrange, introdusă în acest scop are forma:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, .., v_n, k_1, k_2, ..., k_r) = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 - \\ - 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1) - \\ - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2) - \\ .... \\ - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r) = \min .\end{aligned} \tag{5.8}$$

În expresia acestei funcţii, parametri k_i se numesc *multiplicatori Lagrange sau corelate Gauss.*

Punctele staţionare libere ale funcţiei se determină, anulând derivatele parţiale în număr de $n + r$ ale funcţiei φ în raport cu $v_1, v_2, ..., v_n$, $k_1, k_2, ..., k_r$.

Efectuând derivatele parţiale ale funcţiei obţinem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial v_i} &= 2v_i - 2a_i k_1 - 2b_i k_2 ..... - 2r_i k_r \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_1} &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_2} &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0 \\ &.. \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_r} &= r_1 v_1 + r_2 v_2 + .. + r_n v_n + w_r = 0\end{aligned} \tag{5.9}$$

Sistemul se mai poate scrie sub forma:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + ... + r_i k_n \qquad (i = 1, 2, ...n) \tag{5.10}$$

Substituind valorile corecţiilor v_i şi efectuând calculele, rezultă:

$$\begin{aligned}&a_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + ... + r_1 k_r) + a_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + ... + r_2 k_r) + ... \\ &+ a_n(a_n k_1 + b_n k_2 + .. + r_n k_r) + w_1 = 0 \\ &.. \\ &r_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + ... + r_1 k_r) + r_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + ... + r_2 k_r + ... \\ &+ r_n (a_n k_1 + b_n k_2 + ... + r_n k_r) + w_r = 0\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}&a_1 a_1 k_1 + a_1 b_1 k_2 + ... + a_1 r_1 k_r + a_2 a_2 k_1 + a_2 b_2 k_2 + ... + a_2 r_2 k_r + ... \\ &+ a_n a_n k_1 + a_n b_n k_2 + ... + a_n r_n k_r + w_1 = 0\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$a_1b_1k_1 + b_1b_1k_2 + ... + b_1r_1k_r + a_2b_2k_1 + b_2b_2k_2 + ... +$$
$$b_2r_2k_r + ... + a_nb_nk_1 + b_nb_nk_2 + ... + b_nr_nk_r + w_2 = 0$$

$$a_1r_1k_1 + b_1r_1k_2 + ... + r_1r_1k_r + a_2r_2k_1 + b_2r_2k_2 + ... +$$
$$+ r_2r_2k_r + ... + a_nr_nk_1 + b_nr_nk_2 + ... + r_nr_nk_R + w_r = 0$$

Trecând la sumele Gauss se va obţine:

$$\begin{aligned} &[aa]k_1 + [ab]k_2 + ... + [ar]k_r + w_1 = 0 \\ &[ab]k_1 + [bb]k_2 + ... + [br]k_r + w_2 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[ar]k_1 + [br]k_2 + ... + [rr]k_r + w_r = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sistemul având r ecuaţii liniare şi r necunoscute, reprezintă *sistemul normal al corelatelor.*

Matricea sistemului normal al corelatelor fiind simetrică şi pozitiv definită, are inversă.Deci, sistemul are soluţie şi aceasta este unică. Rezolvând sistemul cu una din metodele cunoscute se determina corelatele $k_1, k_2, ..., k_r$.

Introducând valorile găsite pentru corelatele k în sistem, se determină valorile cele mai probabile ale corecţiilor v. Aceste corecţii se aplică apoi mărimilor măsurate direct, l_i conform relaţiei:

$$x_i = l_i + v_i, \quad (5.12)$$

rezultând valorile compensate ale mărimilor x_i.

Pornim de la un sistem format din 3 ecuaţii de condiţie a corecţiilor:

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1 = 0 \\ &b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2 = 0 \\ &c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n + w_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sistemul normal al corelatelor va fi:

$$\begin{aligned} &[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0 \\ &[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 = 0 \\ &[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Deducerea practică a coeficienţilor ecuaţiilor din sistem cât şi calculele de control respective, este arătată în tabelul următor:

Tabloul coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor – Tabel 5.1

Nr. crt.	a_i	b_i	c_i	S_i	*Notaţii şi controale*
1	a_1	b_1	c_1	S_1	$S_1=a_1+b_1+c_1$
2	a_2	b_2	c_2	S_2	$S_2=a_2+b_2+c_2$
....	....	....	....	....	....
n	a_n	b_n	c_n	S_n	$S_n=a_n+b_n+c_n$
Σ	*[a]*	*[b]*	*[c]*	*[S]*	Σ = *[a]+[b]+[c] = [S]*

Tabloul coeficienţilor sistemului normal – Tabel 5.2

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[aS]$	$[aS] = [aa] + [ab] + [ac]$
	$[bb]$	$[bc]$	$[bS]$	$[bS] = [ab] + [bb] + [bc]$
		$[cc]$	$[cS]$	$[cS] = [ac] + [bc] + [cc]$

5.2. MĂSURĂTORI CONDIŢIONATE DE PRECIZII DIFERITE (PONDERATE)

În acest caz ca şi în situaţia măsurătorilor de aceeaşi precizie, corecţiile v_i ce urmează a fi determinate, trebuie să satisfacă atât condiţia $[pvv]=\min$ .cât şi sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor reprezentând tot o problemă de minim condiţionat .

Funcţia Lagrange în acest caz va fi :

$$\begin{aligned}\phi(v_1,v_2,...,v_n,k_1,k_2,...,k_r) = {} & p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + ... + p_nv_n^2 - \\ & -2k_1(a_1v_1 + a\ v_2 + ... + a_nv_n + w_1) \\ & -2k_2(b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2) \\ & .... \\ & -2k_r(r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r) = \min .\end{aligned} \tag{5.15}$$

Efectuând derivatele parţiale în raport cu v şi k şi punând de asemenea condiţia că acestea să fie nule, se obţine:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2a_i k_{1_1} - 2b_i k_2 - \ldots - 2r_i k_r = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 sau : [av] + w_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \; sau : [bv] + w_2 = 0 \qquad (5.16)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + w_r = 0 sau : [rv] + w_r = 0$$

Ecuaţiile (5.16) mai pot fi scrise sub forma:

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_1 + b_i k_2 + \ldots + r_i k_r\right) \qquad (5.17)$$

Efectuând calculele şi grupând convenabil termenii se obţine sistemul normal al corelalatelor în cazul ponderat:

$$\frac{a_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r\right) + \frac{a_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{a_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + .. + r_n k_r\right) + w_1 = 0$$
$$\frac{b_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r\right) + \frac{b_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{b_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + \ldots + r_n k_r\right) + w_2 = 0 \qquad (5.18)$$
$$\frac{r_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + .. + r_1 k_r\right) + \frac{r_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + .. + r_2 k_r\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{r_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + .. + r_n k_r\right) + w_r = 0$$

Efectuând calculele:

$$\frac{a_1 a_1}{p_1} k_1 + \frac{a_1 b_1}{p_1} k_2 + \ldots + \frac{a_1 r_1}{p_1} k_r + \frac{a_2 a_2}{p_2} k_1 + \frac{a_2 b_2}{p_2} k_2 + \ldots + \frac{a_2 r_2}{p_2} k_r + \ldots +$$
$$+ \frac{a_n a_n}{p_n} k_1 + \frac{a_n b_n}{p_n} k_2 + \ldots . + \frac{a_n r_n}{p_n} k_r + w_1 = 0$$

$$\frac{a_1b_1}{p_1}k_1+\frac{b_1b_1}{p_1}k_2+..+\frac{b_1r_1}{p_1}k_r+\frac{a_2b_2}{p_2}k_1+\frac{b_2b_2}{p_2}k_2+...+\frac{b_2r_2}{p_2}k_r+...+$$
$$+\frac{a_nb_n}{p_n}k_1+\frac{b_nb_n}{p_n}k_2+...++\frac{b_nr_n}{p_n}k_r+w_2=0$$
$$\frac{a_1r_1}{p_1}k_1+\frac{b_1r_1}{p_1}k_2+...+\frac{r_1r_1}{p_1}k_r+\frac{a_2r_2}{p_2}k_1+\frac{b_2r_2}{p_2}k_2+...+\frac{r_2r_2}{p_2}k_r+...+ \tag{5.19}$$
$$+\frac{a_nr_n}{p_n}k_1+\frac{b_nr_n}{p_n}k_2+....+\frac{r_nr_n}{p_n}k_r+w_r=0$$

Trecând la notaţiile Gauss, vom obţine:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+...+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1=0$$
$$\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+....+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2=0 \tag{5.20}$$
$$..$$
$$\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+...+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0$$

Acest sistem se poate rezolva, matricea ataşată fiind nesingulară. ($\Delta \neq 0$).
Soluţiile obţinute (corelatele k) permit determinarea celorlalte necunoscute (corecţiile v). În cazul sistemelor mici, determinarea coeficienţilor sistemului normal al corelatelor se face conform următoarelor tabele:

Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor de corect şi al ponderilor – Tabel 5.3

Nr. crt.	$\frac{1}{p_i}$	a_i	b_i	c_i	S_i	*Control*
1 2 ..... *n*	$1/p_1$ $1/p_2$ ..... $1/p_n$	a_1 a_2 ..... a_n	b_1 b_2 ..... b_n	c_1 c_2 .... c_n	S_1 S_2 .... S_n	$S_1 = a_1+b_1+c_1$ $S_2 = a_2+b_2+c_2$ .... $S_n = a_n+b_n+c_n$
Σ		*[a]*	*[b]*	*[c]*	*[S]*	Σ = *[a]+[b]+[c] = [S]*

Tabelul coeficienţilor sistemului normal-Tabel 5.4

$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{aS}{p}\right]$	$\left[\frac{aS}{p}\right]=\left[\frac{aa}{p}\right]+\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{ac}{p}\right]$
	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bS}{p}\right]$	$\left[\frac{bS}{p}\right]=\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]$
		$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cS}{p}\right]$	$\left[\frac{cS}{p}\right]=\left[\frac{ac}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+\left[\frac{cc}{p}\right]$

Rezolvarea sistemelor corelatelor se va realiza prin intermediul schemei Gauss-Doolittle simplă sau în cazul urmăririi evaluarii preciziei prin intermediul coeficienţilor de pondere se vor ataşa coloanele coeficienţilor de pondere aferenţi, schema de rezolvare devenind astfel una extinsă.

Aplicaţia 1

În reţeaua de triangulaţie din figura de mai jos au fost măsurate cu aceeaşi precizie direcţiile azimutale $U_1,...,U_{10}$ date în tabelul următor.
Să se determine prin metoda observaţiilor condiţionate valorile probabile ale direcţiilor azimutale şi abaterea standard a unghiului *BDC* compensat.

Tabel 5.5

P.S.	*P.V*	*Nr. vizei*	*Val.măsurate* (U_i^0)	*Corecţii* $(v_i)^{cc}$	*Val.probabile* $(U_i = U_i^0 + v_i)$
A	**B**	1	0.00.00	+1	0.00.01
	C	2	57.15.20	-1	57.15.19
B	*D*	3	0.00.00	-3	399.99.97
	C	4	62.00.10	+4	62.00.14
	A	5	142.18.30	-1	142.18.29
C	*A*	6	0.00.00	+1	0.00.01
	B	7	62.66.72	-4	62.66.68
	D	8	108.95.30	+3	108.95.33
D	*C*	9	0.00.00	-3	399.99.97
	B	10	91.71.12	+3	91.71.15

În fiecare dintre cele 2 triunghiuri s-a măsurat cîte un unghi în plus, deci putem scrie ecuaţiile de condiţie:

$(U_2 – U_1) + (U_5 – U_4) + (U_7 – U_6) – 200^g = 0$
$(U_4 – U_3) + (U_8 – U_7) + (U_{10} – U_9) – 200^g = 0$

Funcţia de pondere, adică relaţia prin care calculăm mărimea unghiului BDC, a cărui precizie s-a cerut, este:

$F = U_{10} – U_9$

Înlocuim în primele relaţii valorile: $U_i = U_i^0 + v_i$

$$\left(U_2^0 + v_2\right) - \left(U_1^0 + v_1\right) + \left(U_5^0 + v_5\right) - \left(U_4^0 + v_4\right) + \left(U_7^0 + v_7\right) - \left(U_6^0 + v_6\right) - 200^g = 0$$

$$\left(U_4^0 + v_4\right) - \left(U_3^0 + v_3\right) + \left(U_8^0 + v_8\right) - \left(U_7^0 + v_7\right) + \left(U_{10}^0 + v_{10}\right) - \left(U_9^0 + v_9\right) - 200 = 0$$

Se fac următoarele notaţii:

$$\left(U_2^0 - U_1^0\right) + \left(U_5^0 - U_4^0\right) + \left(U_7^0 - U_6^0\right) - 200^g = W_1 = 12^{cc}$$
$$\left(U_4^0 - U_3^0\right) + \left(U_8^0 - U_7^0\right) + \left(U_{10}^0 - U_9^0\right) - 200^g = W_2 = -20^{cc}$$

Ecuaţiile de condiţie ale corecţiilor ,,v”, vor fi:

- $v_1 + v_2 - v_4 + v_5 – v_6 + v_7 + w_1 = 0$
- $v_3 + v_4 – v_7 + v_8 – v_9 + v_{10} + w_2 = 0$

Se întocmeşte tabelul ecuaţiilor de condiţie:

Tabel 5.6

Nr.crt.	*Ec. 1 (a_i)*	*Ec. 2 (b_i)*	*Funcţia (f_i)*	*Sume (s_i)*	*Corecţia (v_i)*
1.	-1	0	0	-1	+1
2.	+1	0	0	+1	-1
3.	0	-1	0	-1	-3
4.	-1	+1	0	0	+4
5.	+1	0	0	+1	-1
6.	-1	0	0	-1	+1
7.	+1	-1	0	0	-4
8.	0	+1	0	+1	+3
9.	0	-1	-1	-2	-3
10.	0	+1	+1	+2	+3

Sistemul ecuaţiilor normale ale corelatelor:

Tabel 5.7

k_1	k_2	*(ff)*	*S*	*C*
6	-2	0	+4	+4
	6	+2	+6	+6
		+2	+4	+4

$6k_1 – 2k_2 + 12 = 0$
$-2k_1 + 6k_2 – 20 = 0$

Rezolvarea sistemului normal – Gauss.

Tabel 5.8

k_1	k_2	W	(ff)	S	Control
6	-2	+12	0	+16	--
-1	+0,3333	-2,0000	0,0000	-2,6667	-2,6667
k_1= -1	6	-20	+2	-14	--
	+5,3333	-16,0000	+2,0000	-8,6667	-8,6667
	-1	+3,0000	-0,3750	+1,6250	+1,6250
	K_2= +3		2		
		q(ff) =	+1,2500		

Verificarea soluţiilor:

$[S\text{-}Q_{(ff)} - W)\ K] = -[W]$

+ 8 = + 8

Se calculează corecţiile„v_i” :

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_1 + b_i k_2 + ...\right)$$

Se calculează [pvv] = 72

$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + ...$

p = 1 (aceeaşi precizie)

Abaterea standard a măsurătorilor (eroarea medie pătratică a unităţii de pondere):

$$\mu_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{72}{2}} = \pm 6^{cc}$$

Abaterea standard a necunoscutei:

$$\mu_{(F)} = \mu_0\sqrt{Q_{(ff)}} = 6\sqrt{1{,}2500}$$

Verificarea compensării se efectuează înlocuind valorile compensate ale măsurătorilor în ecuaţiile de condiţie (coloana $U_i = U_i^0 + v_i$).

Aplicaţia 2

Să se compenseze unghiurile unui triunghi plan şi să se deducă precizia lor după compensare, cunoscându-se din măsurători de aceeaşi precizie următoarele valori medii:

$\alpha' = 47^g 15^c 17^{cc}$

$\beta' = 73^g 43^c 50^{cc}$

$\gamma' = 79.41.45^{cc}$

Neînchiderea unghiulară va fi egală cu:

$W = \alpha' + \beta' + \gamma' - 200^g = +12^{cc}$

Ecuaţia de condiţie a figurii este:

$\alpha+\beta+\gamma-200^g = 0$

Dar : $\alpha = \alpha' + v_\alpha$

$\beta = \beta' + v_\beta$

$\gamma = \gamma' + v_\gamma$

Deci, se poate scrie ecuaţia de condiţie finală:

$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + 12^{cc} = 0$

Avînd o singură ecuaţie de condiţie rezultă vom avea o singură corelată *K*, deci sistemul de ecuaţii normale ale corelatelor se va reduce şi el la o singură ecuaţie normală şi anume:

$[aa] \cdot k + w = 0$. adică :

$3k+12^{cc} = 0 \quad k= -4^{cc}$

Aplicînd formulele generale ale corecţiilor în funcţie de corelate avem:

$v_1 = a_1 k$

$v_2 = a_2 k$

$v_3 = a_3 k$

şi obţinem: $v_1 = k = -\frac{w}{3}$

$v_2 = k = -\frac{w}{3}$

$v_3 = k = -\frac{w}{3}$

Deci : $v_1 = v_2 = v_3 = -4^{cc}$

Controlul corecţiilor se face folosind relaţia:

$[vv] = -[kw]$

48 = - (-4.12)

48 = 48

Valorile compensate ale unghirilor triunghiului plan vor fi:

$\alpha = \alpha' + v_\alpha$ = 47.15.13

$\beta = \beta' + v_\beta$ = 73.43.46

$\gamma = \gamma' + v_\gamma$ = 79.41.41

Se îndeplineşte astfel condiţia:

$\alpha+\beta+\gamma$ = 200.00.00

Eroarea medie pătratică pentru fiecare valoare unghiulară măsurată se exprimă prin relaţia:

$$\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{48}{1}} = \pm 6^{cc},9$$

Aplicaţia 3

Compensarea poligonului cu punct central utilizând metoda măsurătorilor condiţionate

Se consideră o reţea de triangulaţie locală, sub forma unui poligon cu punct central, format din 5 triunghiuri.

Cu un teodolit cu precizia de citire unghiulară de $\pm\ 2^{cc}$, se execută măsurători ale direcţiilor unghiulare între punctele ce formează poligonul cu punct central. Pe baza observaţiilor de teren executate, la birou, prin diferenţa direcţiilor, au rezultat valorile unghiurilor orizontale dintre laturile triunghiurilor, valori prezentate în tabelul următor:

Tabel 5.9

Număr unghi	*Valoarea măsurată* α_i^0	*Număr unghi*	*Valoarea măsurată* α_i^0
1	68.21.43	--	--
2	55.92.60	9	62.13.17
3	71.39.20	10	54.21.70
4	53.20.94	11	75.85.76
5	70.31.64	12	75.39.70
6	48.29.90	13	81.38.64
7	65.20.58	14	83.71.97
8	51.07.31	15	83.64.98

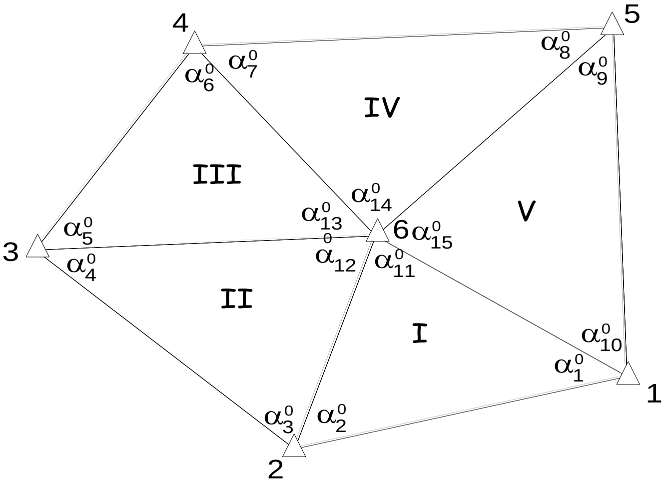

Figura 5.1 – Poligonul cu punct central

Utilizând principiile de compensare ale măsurătorilor condiţionate de aceeaşi precizie, se cere să se compenseze valoarea unghiurilor orizontale măsurate şi să se evalueze precizia de determinare a acestora.

Etapa 1 – Scrierea ecuaţiilor de condiţie

Pentru fiecare triunghi al poligonului se vor scrie următoarele ecuaţii de condiţie:

- ecuaţia de închidere a unghiurilor într-un triunghi ca sumă a unghiurilor orizontale egală cu 200^g;
- ecuaţia de închidere a unghiurilor orizontale la centru, suma unghiurilor egală cu 400^g;
- acordul laturilor sau raportul între sinusurile unghiurilor să fie egal cu 1.

Astfel se vor scrie: 5 ecuaţii de închidere a unghiurilor în triunghi, 1 ecuaţie de condiţie la centru şi 1 ecuaţie privind acordul laturilor.

Ecuaţia 1 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{11} - 200^g = 0$

Ecuaţia 2 $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12} - 200^g = 0$

Ecuaţia 3 $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_{13} - 200^g = 0$

Ecuaţia 4 $\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_{14} - 200^g = 0$

Ecuaţia 5 $\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{15} - 200^g = 0$

Ecuaţia la centru: $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} - 400^g = 0$

Ecuaţia privind acordul laturilor:

$$\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_3 \cdot \sin\alpha_5 \cdot \sin\alpha_7 \cdot \sin\alpha_9}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_4 \cdot \sin\alpha_6 \cdot \sin\alpha_8 \cdot \sin\alpha_{10}} = 1 = \frac{P_2}{P_1}$$

Ecuaţiile sunt scrise pentru cazul unghiurilor definitiv compensate, care trebuie să îndeplinească aceste condiţii impuse.

Etapa 2 – Scrierea ecuaţiilor de condiţie ale corecţiilor

În ecuaţiile de condiţie iniţiale, se înlocuiesc mărimile compensate ale unghiurilor orizontale cu valorile medii, obţinute orin măsurători directe de aceeaşi precizie cu corecţiile respective, conform relaţiei:

$$\alpha_i = \alpha_i^0 + v_i, i = 1...15$$

Cele 7 ecuaţii se vor scrie astfel:

1. $\left(\alpha_1^0 + v_1\right) + \left(\alpha_2^0 + v_2\right) + \left(\alpha_{11}^0 + v_{11}\right) - 200^g = 0$
2. $\left(\alpha_3^0 + v_3\right) + \left(\alpha_4^0 + v_4\right) + \left(\alpha_{12}^0 + v_{12}\right) - 200^g = 0$
3. $\left(\alpha_5^0 + v_5\right) + \left(\alpha_6^0 + v_6\right) + \left(\alpha_{13}^0 + v_{13}\right) - 200^g = 0$
4. $\left(\alpha_7^0 + v_7\right) + \left(\alpha_8^0 + v_8\right) + \left(\alpha_{14}^0 + v_{14}\right) - 200^g = 0$
5. $\left(\alpha_9^0 + v_9\right) + \left(\alpha_{10}^0 + v_{10}\right) + \left(\alpha_{15}^0 + v_{15}\right) - 200^g = 0$
6. $$\left(\alpha_{11}^0 + v_{11}\right) + \left(\alpha_{12}^0 + v_{12}\right) + \left(\alpha_{13}^0 + v_{13}\right) + \left(\alpha_{14}^0 + v_{14}\right) + \left(\alpha_{15}^0 + v_{15}\right) - 400^g = 0$$
7. $$\frac{\sin\left(\alpha_1^0 + v_1\right) \cdot \sin\left(\alpha_3^0 + v_3\right) \cdot \sin\left(\alpha_5^0 + v_5\right) \cdot \sin\left(\alpha_7^0 + v_7\right) \cdot \sin\left(\alpha_9^0 + v_9\right)}{\sin\left(\alpha_2^0 + v_2\right) \cdot \sin\left(\alpha_4^0 + v_4\right) \cdot \sin\left(\alpha_6^6 + v_6\right) \cdot \sin\left(\alpha_8^0 + v_8\right) \cdot \sin\left(\alpha_{10}^0 + v_{10}\right)} = \frac{P_2^0}{P_1^0} = 1$$

Primele 6 ecuaţii de condiţie au o formă liniară, iar cea de-a şaptea este neliniară.Operaţia de liniarizare se realizează printr-o dezvoltare în serie Taylor, în care se reţin doar primele derivate parţiale în raport cu mărimile medii ale măsurătorilor directe de ordinul I ale corecţiilor, obţinându-se ecuaţia de corecţie de pol sub următoarea formă:

$$P_1 - P_2 = P_1^0 + \frac{P_1^0}{\rho^{cc}}\left(ctg\,\alpha_1^0 \cdot v_i\right)_1^9 - P_2^0 + \frac{P_2^0}{\rho^{cc}}\left(ctg\,\alpha_2^0 \cdot v_i\right)_2^{10} = 0$$

Astfel, se pot scrie ecuaţiile de condiţie ale corecţiilor următoare:

1. $v_1 + v_2 + v_{11} + w_1 = 0$
2. $v_3 + v_4 + v_{12} + w_2 = 0$
3. $v_5 + v_6 + v_{13} + w_3 = 0$
4. $v_7 + v_8 + v_{14} + w_4 = 0$
5. $v_9 + v_{10} + v_{15} + w_5 = 0$
6. $v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_6 = 0$
7. $$ctg\alpha_1^0 \cdot v_1 - ctg\alpha_2^0 \cdot v_2 + ctg\alpha_3^0 \cdot v_3 - ctg\alpha_4^0 \cdot v_4 + ctg\alpha_5^0 \cdot v_5 -$$
$$ctg\alpha_6^0 \cdot v_6 + ctg\alpha_7^0 \cdot v_7 - ctg\alpha_8^0 \cdot v_8 + ctg\alpha_9^0 \cdot v_9 - ctg\alpha_{10}^0 \cdot v_{10} + w_7 = 0$$

Etapa 3 – Calculul termenilor liberi

$$w_1 = \left(\alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_{11}^0\right) - 200^g = -21^{cc}$$
$$w_2 = \left(\alpha_3^0 + \alpha_4^0 + \alpha_{12}^0\right) - 200^g = -16^{cc}$$
$$w_3 = \left(\alpha_5^0 + \alpha_6^0 + \alpha_{13}^0\right) - 200^g = +18^{cc}$$
$$w_4 = \left(\alpha_7^0 + \alpha_8^0 + \alpha_{14}^0\right) - 200^g = -14^{cc}$$
$$w_5 = \left(\alpha_9^0 + \alpha_{10}^0 + \alpha_{15}^0\right) - 200^g = -15^{cc}$$
$$w_6 = \left(\alpha_{11}^0 + \alpha_{12}^0 + \alpha_{13}^0 + \alpha_{14}^0 + \alpha_{15}^0\right) - 400^g = +105^{cc}$$
$$w_7 = \rho^{cc}\left(1 - \frac{P_2^0}{P_1^0}\right) = -86^{cc}$$

Etapa 4 – Scrierea ecuaţiilor de corecţii funcţie de corelate

Sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie ale corecţiilor în care numărul ecuaţiilor r = 7, este mai mic decât numărul necunoscutelor v_i egale cu 15, nu se poate rezolva.
Corecţiile v_i având valori mici, comparabile cu erorile de măsurare, li se poate aplica principiul celor mai mici pătrate, adică, suma pătratelor corecţiilor tinde spre un minim.

$$[vv] \rightarrow \min$$

Întrucât corecţiile trebuie să satisfacă simultan atât sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie al corecţiilor, cât şi condiţia de minim, ele se vor putea determina folosind metoda corelatelor.

În acest sens se introduc 7 parametri sub forma corelatelor Gauss $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ sau multiplicatorii lui Lagrange, sub forma funcţiei echivalente Lagrange de forma:

$$\Phi = [vv] = \left[\left(\alpha_i - \alpha_i^0\right)^2\right] - 2k_1\left([av] + w_1\right) - \ldots - 2k_7\left([gv] + w_7\right) \rightarrow \min$$

Minimul funcţiei se obţine prin anularea derivatelor parţiale în raport cu corecţiile (necunoscutele), rezultând exprimarea corecţiilor funcţie de corelate. Această poartî denumirea de sistemul ecuaţiilor de corecţii funcţie de corelate, având forma:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + e_i k_5 + f_i k_6 + g_i k_7$$

Se va forma astfel un sistem cu 15 ecuaţii al corecţiilor $v_1 \ldots v_{15}$.

Etapa 5 – Scrierea sistemului de ecuaţii al corelatelor

Se va scrie un sistem normal format din *r* = 7 ecuaţii cu *n* = 7 necunoscute, corelatele *k* , numit sistemul ecuaţiilor normale ale corelatelor având următoarea formă:

$$[aa]k_1 + [ab]k_2 + \ldots + [ag]k_7 + w_1 = 0$$
$$[ab]k_1 + [bb]k_2 + \ldots + [bg]k_7 + w_2 = 0$$
....
$$[ag]k_1 + [bg]k_2 + \ldots + [gg]k_7 + w_7 = 0$$

Tabel 5.10

Nr.ec.	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	f_i	g_i	**S**
1	1	0	0	0	0	0	0.5453	**1.5453**
2	1	0	0	0	0	0	–0.8292	**0.1708**
3	0	1	0	0	0	0	0.4823	**1.4823**
4	0	1	0	0	0	0	–0.9039	**0.0961**
5	0	0	1	0	0	0	0.5033	**1.5033**
6	0	0	1	0	0	0	–1.0549	**–0.0549**
7	0	0	0	1	0	0	0.6084	**1.6084**
8	0	0	0	1	0	0	–0.9668	**0.0332**
9	0	0	0	0	1	0	0.6765	**1.6765**
10	0	0	0	0	1	0	–0.8756	**0.1244**
11	1	0	0	0	0	1	0	**2**
12	0	1	0	0	0	1	0	**2**
13	0	0	1	0	0	1	0	**2**
14	0	0	0	1	0	1	0	**2**
15	0	0	0	0	1	1	0	**2**
Σ	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**5**	**–1.8146**	**18.1854**
								18.1854

Pentru coloana g_i se va aplica relaţia: $g_i = \pm ctg\,\alpha_i^0$

Tabel 5.11

[aa]	*[ab]*	*[ac]*	*[ad]*	*[ae]*	*[af]*	*[ag]*	*[aS]*
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	*S*
3	0	0	0	0	1	–0.2839	3.7161
	3	0	0	0	1	–0.4216	3.5784
		3	0	0	1	–0.5516	3.4484
			3	0	1	–0.3584	3.6416
				3	1	–0.1991	3.8009
					5	0	10
						5.9298	5.9298

Sistemul normal al corelatelor are următoarea formă:

$$3k_1 + 0k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.2839k_7 - 21 = 0$$
$$3k_2 + 0k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.4216k_7 - 16 = 0$$
$$3k_3 + 0k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.5516k_7 + 18 = 0$$
$$3k_4 + 0k_5 + k_6 - 0.3584k_7 - 14 = 0$$
$$3k_5 + k_6 - 0.1991k_7 - 15 = 0$$
$$5k_6 + 105 = 0$$
$$5.9298k_7 - 86 = 0$$

Etapa 6 – Rezolvarea sistemului normal al corelatelor

Rezolvarea sistemului corelatelor se va face cu ajutorul schemei Gauss-Doolittle, cu efectuarea controalelor obligatorii pe liniile roşii, prin eliminarea succesivă a necunoscutelor.

Tabel 5.12

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	*L*	*S*	*C*
3	0	0	0	0	1	–0.2839	–21	–17.2839	--
–1	**0**	**0**	**0**	**0**	**–0.33**	**0.094633**	**7**	5.7613	5.7613
	3	0	0	0	1	–0.4216	–16	–12.4216	--
	3	0	0	0	1	–0.4216	–16	–12.4216	–12.4216
	–1	**0**	**0**	**0**	**–0.33**	**0.140533**	**5.333333**	4.140533	4.140533
		3	0	0	1	–0.5516	18	21.4484	--

3	0	0	1	–0.5516	18	21.4484	21.4484
–1	**0**	**0**	**–0.33**	**0.183866**	**–6**	–7.149466	–7.14946
	3	0	1	–0.3584	–14	–10.3584	--
	3	0	1	–0.3584	–14	–10.3584	–10.3584
	–1	**0**	**–0.33**	**0.119466**	**4.666666**	3.4528	3.45279
		3	1	–0.1991	–15	–11.1991	--
		3	1	–0.1991	–15	–11.1991	–11.1991
		–1	**–0.33**	**0.066366**	**5**	3.733033	3.733033
			5	0	105	115	--
			3.333	0.604866	120.9999	124.93819	124.9381
			–1	**–0.18145**	**–36.29997**	–37.48143	–37.4814
				5.928	–86	–81.8848	--
				5.576476	–111.5507	–105.9743	–105.974
				–1	**20.003813**	19.003814	19.00381

Observaţii:

- valorile marcate boldite reprezintă pivoţii de calcul aferenţi fiecărei necunoscute.

Etapa 7 – Calculul valorilor corelatelor k_i

Determinarea valorilor corelatelor k_i se va realiza pe liniile cu coeficienţii ecuaţiilor normale, egalând fiecare ecuaţie cu zero.

$-k_7 + 20.003813 = 0 \rightarrow k_7 = 20.003813$

$-k_6 - 0.181459 \cdot 20.003813 - 36.299977 = 0 \rightarrow k_6 = -39.929848$

$-k_5 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.066366 \cdot 20.003813 + 5 = 0 \rightarrow$

$k_5 = 19.637509$

$-k_4 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.119466 \cdot 20.003813 +$

$+ 4.666666 = 0 \rightarrow k_4 = 20.366377$

$-k_3 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) +$

$+ 0.183866 \cdot 20.003813 - 6 = 0 \rightarrow k_3 = 10.987957$

$-k_2 + 0 \cdot 10.987957 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 - 0.333333 \cdot (-39.929848) +$

$+ 0.140533 \cdot 20.003813 + 5.333333 = 0 \rightarrow k_2 = 21.454465$

$-k_1 + 0 \cdot 21.454465 + 0 \cdot 10.987957 + 0 \cdot 20.366377 + 0 \cdot 19.637509 -$

$0.333333 \cdot (-39.929848) + 0.094633 \cdot 20.003813 + 7 = 0 \rightarrow k_1 = 22.202956$

Etapa 8 – Verificarea soluţiilor (corelatelor) obţinute

Pentru verificarea valorilor obţinute se va ţine cont de îndeplinirea următoarei condiţii de egalitate:

$$[(S - L) \cdot k_i] = -[L]$$

în care: *S* – suma coeficienţilor corelatelor pentru fiecare ecuaţie;

L – valoarea termenului liber;

k_i – valoarea corelatei obţinute.

Verificarea egalităţii se va face pe liniile din schema Gauss-Doolittle care conţiene coeficienţii corelatelor.

$$[(S - L) \cdot k_i] = \begin{bmatrix} (-17.2839 + 21) \cdot 22.202956 + (-12.4216 + 16) \cdot 21.454465 + \\ (21.4484 - 18) \cdot 10.987957 + (-10.3584 + 14) \cdot 20.366377 + \\ + (-11.1991 + 15) \cdot 19.637509 + (115 - 105) \cdot (-39.929848) + \\ + (-81.8848 + 86) \cdot 20.003843 = 28.99955 \end{bmatrix}$$

$[L] = -21 - 16 + 18 - 14 - 15 + 105 - 86 = -29$

$\rightarrow 28.99955 \cong 29$ - condiţia de egalitate este îndeplinită.

Etapa 9 – Calculul corecţiilor v_i

Determinarea corecţiilor v_i se va aface prin înlocuirea valorilor numerice ale corelatelor în sistemul ecuaţiilor de corecţii funcţie de corelate, exprimat de ecuaţia:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + d_i k_4 + e_i k_5 + f_i k_6 + g_i k_7$$

Deoarece termenii liberi (neînchiderile unghiulare) w_i sunt exprimaţi în secunde şi valorile corecţiilor v_i se vor obţine în secunde centezimale.

$$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 + e_1 k_5 + f_1 k_6 + g_1 k_7 = 33^{cc},111$$
$$v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 + e_2 k_5 + f_2 k_6 + g_2 k_7 = 5^{cc},615$$
$$v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + d_3 k_4 + e_3 k_5 + f_2 k_6 + g_3 k_7 = 31^{cc},102$$
$$v_4 = a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 + d_4 k_4 + e_4 k_5 + f_4 k_6 + g_4 k_7 = 3^{cc},373$$
$$v_5 = a_5 k_1 + b_5 k_2 + c_5 k_3 + d_5 k_4 + e_5 k_5 + f_5 k_6 + g_4 k_7 = 21^{cc},056$$
$$v_6 = a_6 k_1 + b_6 k_2 + c_6 k_3 + d_6 k_4 + e_6 k_5 + f_6 k_6 + g_6 k_7 = -10^{cc},114$$
$$v_7 = a_7 k_1 + b_7 k_2 + c_7 k_3 + d_7 k_4 + e_7 k_5 + f_7 k_6 + g_7 k_7 = 32^{cc},537$$
$$v_8 = a_8 k_1 + b_8 k_2 + c_8 k_3 + d_8 k_4 + e_8 k_5 + f_8 k_6 + g_8 k_7 = 1^{cc},027$$
$$v_9 = a_9 k_1 + b_9 k_2 + c_9 k_3 + d_9 k_4 + e_9 k_5 + f_9 k_6 + g_9 k_7 = 33^{cc},170$$
$$v_{10} = a_{10} k_1 + b_{10} k_2 + c_{10} k_3 + d_{10} k_4 + e_{10} k_5 + f_{10} k_6 + g_{10} k_7 = 2^{cc},122$$
$$v_{11.12.13.14.15} = a_{11,12,13,14,15} k_1 + b_{11,12,13,14,15} k_2 + c_{11,12,13,14,15} k_3 + d_{11,12,13,14,15} k_4 +$$
$$+ e_{11,12,13,14,15} k_5 + f_{11,12,13,14,15} k_6 + g_{11,12,13,14,15} k_7 = -39^{cc},929$$

Controlul corecţiilor aferente corelatelor calculate se realizează în mod tabelar, după cum urmează:

Tabel 5.13

$a_i k_1$	$b_i k_2$	$c_i k_3$	$d_i k_4$	$e_i k_5$	$f_i k_6$	$g_i k_7$	$\pm v_i^{cc}$
22.202	0	0	0	0	0	10.908	33.111
22.202	0	0	0	0	0	–16.587	5.615
0	21.454	0	0	0	0	9.647	31.102
0	21.454	0	0	0	0	–18.081	3.373
0	0	10.987	0	0	0	10.068	21.056
0	0	10.987	0	0	0	–21.102	–10.1149

0	0	0	20.366	0	0	12.170	32.536
0	0	0	20.366	0	0	–19.339	1.027

Tabel 5.13-continuare

$a_i k_1$	$b_i k_2$	$c_i k_3$	$d_i k_4$	$e_i k_5$	$f_i k_6$	$g_i k_7$	$\pm v_i(^{cc})$
0	0	0	0	19.637	0	13.532	33.170
0	0	0	0	19.637	0	–17.515	2.122
22.202	0	0	0	0	–39.929	0	–17.727
0	21.454	0	0	0	–39.929	0	–18.475
0	0	10.987	0	0	–39.929	0	–28.942
0	0	0	20.366	0	–39.929	0	–19.563
0	0	0	0	19.637	–39.929	0	–20.292
66.606	64.362	32.961	61.098	58.911	–199.645	–36.299	**47.999**
							47.999

Pentru evaluarea preciziei se vor calcula pătratele corecţiilor calculate, v_i^2 şi se exprimă în secunde:

$$v_1^2 = 1096^{cc}.33$$
$$v_2^2 = 31^{cc}.53$$
$$v_3^2 = 967^{cc}.33$$
$$v_4^2 = 11^{cc}.37$$
$$v_5^2 = 443^{cc}.36$$
$$v_6^2 = 102^{cc}.21$$
$$v_7^2 = 1058^{cc}.59$$
$$v_8^2 = 1^{cc}.05$$
$$v_9^2 = 1100^{cc}.25$$
$$v_{10}^2 = 4^{cc}.50$$
$$v_{11}^2 = 314^{cc}.25$$
$$v_{12}^2 = 341^{cc}.32$$
$$v_{13}^2 = 837^{cc}.64$$
$$v_{14}^2 = 382^{cc}.71$$
$$v_{15}^2 = 411^{cc}.76$$
$$\rightarrow [vv] = 7104^{cc}.20$$

Etapa 10 – Efectuarea controlului provizotiu a compensării

Controlul provizoriu al valorilor obţinute şi al compensării executate, se efectuează prin înlocuirea corecţiilor în sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie ale corecţiilor, pentru care suma corecţiilor şi al termenului liber trebuie să fie egală cu zero.

1. $v_1 + v_2 + v_{11} + w_1 = 33.111 + 5.615 - 17.727 - 21 = -0^{cc}.001$
2. $v_3 + v_4 + v_{12} + w_2 = 31.102 + 3.737 - 18.475 - 16 = 0^{cc}$
3. $v_5 + v_6 + v_{13} + w_3 = 21.056 - 10.114 - 28.942 + 18 = 0^{cc}$
4. $v_7 + v_8 + v_{14} + w_4 = 32.536 + 1.027 - 19.563 - 14 = 0^{cc}$
5. $v_9 + v_{10} + v_{15} + w_5 = 33.170 + 2.122 - 20.292 - 15 = 0^{cc}$
6. $v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w_6 = -17.727 - 18.475 - 28.942 - 19.563 - 20.292 + 105 = 0^{cc}.001$
7.

$$ctg\alpha_1^0 \cdot v_1 - ctg\alpha_2^0 \cdot v_2 + ctg\alpha_3^0 \cdot v_3 - ctg\alpha_4^0 \cdot v_4 + ctg\alpha_5^0 \cdot v_5 - ctg\alpha_6^0 \cdot v_6 +$$
$$+ ctg\alpha_7^0 \cdot v_7 - ctg\alpha_8^0 \cdot v_8 + ctg\alpha_9^0 \cdot v_9 - ctg\alpha_{10}^0 \cdot v_{10} + w_7 = 18.058 - 4.656 + 14.999 -$$
$$-3.048 + 10.597 + 10.668 + 19.794 - 0.992 + 22.442 - 1.858 - 86 = 0^{cc}.002$$

Etapa 11 – Calculul mărimilor celor mai probabile (compensate) ale unghiurilor orizontale

Mărimile cele mai probabile ale unghiurilor orizontale ale reţelei, reprezentând unghiurile compensate sau definitive, se obţin din însumarea valorilor măsurate direct pe teren cu aceeaşi precizie cu valorile corecţiilor calculate, adică:

$$\alpha_i + \alpha_i^0 + v_i$$

Tabel 5.14

Nr.unghi	Unghiuri măsurate α_i^0 (cc)	*Corecţia* ±v_i(cc)	*Unghiuri compensate definitive-* α_i (cc)
1	68.21.43	33	68.21.76
2	55.92.60	6	55.92.66

3	71.39.20	31	71.39.51
4	53.20.94	3	53.20.97
5	70.31.64	21	70.31.85
6	48.29.90	–10	48.29.80
7	65.20.58	33	65.20.91

Tabel 5.14-continuare

Nr.unghi	Unghiuri măsurate α_i^0 (^{cc})	*Corecția* $\pm v_i$ (^{cc})	*Unghiuri compensate definitive-* α_i (^{cc})
8	51.07.31	1	51.07.32
9	62.13.17	33	62.13.50
10	54.21.70	2	54.21.72
11	75.85.76	–18	75.85.58
12	75.39.70	–18	75.39.52
13	81.38.64	–29	81.38.35
14	83.71.97	–20	83.71.77
15	83.64.98	–20	83.64.78
	$[\alpha_i^0]$	$[v_i]$	$[\alpha_i]$
$\sum$	*999.99.65*	*48^{cc}*	*1000.00.00*

Etapa 12 – Evaluarea preciziei determinărilor

- Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{7104.20}{7}} = \pm\sqrt{1014.88} = \pm 31^{cc}.85$$

în care: *r* – numărul corelatelor

- Eroarea medie pătratică a mediei:

$$\sigma_M = \pm\frac{\mu}{\sqrt{r}} = \pm\frac{31^{cc}.85}{\sqrt{7}} = \pm\frac{31^{cc}.85}{2.645} = \pm 12^{cc}.02$$