TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE ŞI METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

Introducere

Informaţiile, care constituie baza concretă de date necesară rezolvării problemelor geodezice, fotogrametrice şi topografice, provin din observaţiile efectuate asupra unor mărimi cu care se lucrează frecvent şi care, în principal, sunt reprezentate de măsurătorile de unghiuri şi distanţe. **Calitatea** informaţiilor obţinute din aceste măsurători este funcţie directă de **volumul** observaţiilor şi de **precizia** instrumentelor de măsurat.

Se impune aşadar, ca pornind de la scopul pentru care sunt efectuate măsurătorile să se stabilească valorile corespunzătoare ca mărime şi precizie, luând în considerare aspectul economic referitor la volumul strict necesar şi suficient al observaţiilor care se impun.

Teoria erorilor de măsurare sau teoria prelucrării măsurătorilor geodezice intervine cu succes şi rezolvă favorabil aceste aspecte.

Instrumentul principal de cunoaştere a lumii materiale îl constituie observarea şi în cadrul acesteia, măsurarea. Operaţia de măsurare reprezintă un proces experimental de obţinere a informaţiei sub forma unui raport numeric, între valoarea mărimii fizice măsurate şi valoarea unei alte mărimi de acelaşi gen considerată drept unitate de măsură.

Scopul unei cercetări ştiinţifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a fi puse în slujba activităţii umane. Pentru aceasta, este necesară îmbinarea cercetării ştiinţifice cu aplicaţia tehnică – practică, fără de care orice speculaţie abstractă devine sterilă.

Pentru realizarea acestui deziderat, prima condiţie în alegerea mărimilor fizice, înţelegând prin aceasta şi mărimile care intervin în tehnică şi în practică, este ca ele să fie măsurabile.

Teoria erorilor de măsurare prezintă o importanţă deosebită pentru practica măsurătorilor terestre, datorită volumului impresionant de observaţii ce trebuie executate, prelucrate şi compensate în vederea obţinerii valorilor lor celor mai probabile, ca şi pentru evaluarea cât mai corectă şi mai completă a preciziei.

Cunoscându-se cât mai exact mărimile erorilor medii ale fiecărui argument măsurabil în parte, se poate determina eroarea medie a unei funcţii de aceste argumente. În acest fel, se poate rezolva problema inversă a erorilor de măsurare, în cadrul căreia, faţă de o eroare maximă impusă apriori unei funcţii ce urmează a se determina, se va stabili încă din faza de proiect, care trebuie să fie erorile maxime cu care se vor măsura pe teren argumentele componente. Aceasta dă posibilitatea stabilirii preciziei optime de măsurare, cu avantaje economice importante. Astfel, la realizarea unei reţele de triangulaţie, necesară ridicărilor topografice, a unei reţele de microtriangulaţie necesară pentru urmărirea comportării unei construcţii etc., studiul preciziei de determinare a poziţiei punctelor reţelei se face încă din faza de proiectare, funcţie de configuraţia reţelei şi de precizia cu care se vor executa măsurătorile pe teren. Acest studiu va urmări ca erorile în poziţia punctelor să se încadreze în toleranţele impuse anticipat. La sfârşit, prin compararea erorilor post-compensate cu erorile stabilite anticipat, se va putea aprecia corectitudinea studiului făcut.

Studiul erorilor de măsurare prezintă o importanţă cu totul deosebită în acele domenii ale măsurătorilor terestre (Geodezie, Fotogrametrie, Geodezie şi Topografie aplicată în construcţii), în care exigenţele impuse în privinţa preciziei sunt deosebit de ridicate.

SCURT ISTORIC AL TEORIEI ERORILOR DE MĂSURARE ŞI A METODEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

Problema prelucrării observaţiilor a apărut întâi în domeniul astronomiei, în special după descoperirea lunetei de către Galileo-Galilei (1564–1642) şi perfecţionarea continuă a instrumentelor şi aparatelor de măsură. După ce teoria greşită a sistemului geocentric, elaborată şi prezentată de Claudiu Ptolemeu (90–168) în lucrarea sa ”Megale Byntaxis”, a dominat cunoaşterea ştiinţifică circa 12 secole, ea este infirmată de către Nicolaus Copernic (1473–1543), care elaborează teoria sistemului heliocentric şi pe care o fundamentează în lucrarea ”Despre mişcările de revoluţie ale corpurilor cereşti”.
Marele astronom Johannes Keppler (1571–1630), discipolul şi continuatorul lui Tycho Brahe (1546–1601), pe baza măsurătorilor înaintaşului său, dar şi din determinări personale, confirmă definitiv teoria heliocentrică a lui Copernic, descoperă forma eliptică a orbitelor planetelor şi formulează cele trei legi pe baza cărora are loc mişcarea planetelor în jurul Soarelui.
A devenit clar că pentru justa înţelegere a sistemului de alcătuire a Universului, este nevoie de executarea unui număr mare de măsurători, cu o precizie cât mai bună şi a căror prelucrare să se facă după criterii cât mai corecte. Însăşi confirmarea legii atracţiei universale, descoperită de Isaac Newton (1642–1727), s-a putut face 18 ani mai târziu, după ce în Franţa s-a determinat destul de precis, valoarea razei Pământului. De multe ori, precizia insuficientă a măsurătorilor efectuate a condus la contradicţii între teorie şi practică. A fost nevoie să se construiască instrumente şi aparate de măsură cu caracteristici superioare şi în acelaşi timp, să se elaboreze şi o teorie adecvată a măsurătorilor şi a erorilor de măsurare. O dezvoltare remarcabilă a teoriei erorilor şi a metodei celor mai mici pătrate, a avut loc la sfârşitul secolului al XVIII–lea şi începutul secolului al XIX-lea, fiind legată de numele lui A.M.Legendre, K.F. Gauss şi P.S.Laplace. Adrien Maria Legendre (1752-1833) fundamentează pentru prima dată teoria prelucrării observaţiilor făcând studii asupra erorilor şi aplicându-le ulterior la prelucrarea măsurătorilor astronomice. Aceste studii, împreună cu dezvoltarea principiilor metodei celor mai mici pătrate sunt cuprinse în lucrarea sa ”Noi metode pentru determinarea orbitelor cometelor” apărută în anul 1806. Independent de A.M.Legendre, matematicianul Karl Friederich Gauss (1777-1855) descoperă metoda celor mai mici pătrate, pe care o aplică tot la prelucrarea măsurătorilor astronomice. Teoria sa este cuprinsă în lucrarea ”Teoria mişcării corpurilor cereşti ce se rotesc în jurul Soarelui după secţiuni conice”, publicată în 1809. Pe lângă multe alte probleme teoretice, K.F.Gauss propune şi formula care pune în evidenţă repartiţia normală a erorilor aleatoare. În lucrările sale ulterioare, K.F.Gauss aprofundează latura algebrică a metodei celor mai mici pătrate, deducând o serie de formule necesare evaluării preciziei măsurătorilor. Pierre Simon Laplace (1749–1827), în tratatul său de bază ”Teoria analitică a probabilităţilor”, dă o nouă fundamentare teoretică metodei celor mai mici pătrate, care constituie de fapt premiza dezvoltării teoretice ulterioare. El are meritul de a fi făcut şi legătura strânsă dintre erori şi probabilitate, prin definirea corectă a formulei probabilităţii unei erori. Măsurarea arcelor de meridian şi a latitudinilor, ca şi prelucrarea acestora, a permis determinarea formei şi dimensiunilor Pământului pe baza cărora s-a elaborat sistemul metric, sistem practic de măsuri ”bun pentru toate timpurile şi pentru toate popoarele”.De asemenea, întocmirea hărţilor şi planurilor topografice ale ţărilor, a impus mai întâi, crearea reţelelor de triangulaţie geodezică de sprijin. Calculele de compensare a marilor reţele de triangulaţie au necesitat dezvoltarea corespunzătoare şi a teoriei erorilor. Aplicarea teoriei erorilor de măsurare şi a metodei celor mai mici pătrate în domeniul măsurătorilor terestre, în special al geodeziei şi topografiei, a fost făcută de reputaţii specialişti români Ştefan Paraschivescu, Theodor Pompei, Ioan Virgiliu, Constantin Motaş, Ioan Plăcinţeanu, Mihai P.Botez, unii dintre ei fiind şi cadre universitare cu lucrări ştiinţifice teoretice şi practice de prestigiu.

Capitolul 1

Obiectul teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice

În general, orice proces de măsurare este însoţit de erori, a căror surse principale pot fi sintetizate după cum urmează:

- calităţile operatorului (pregătirea profesională, starea sa de moment etc.);
- performanţele şi starea de întreţinere ale aparaturii utilizate;
- mediul înconjurător (climă, vegetaţie, vizibilitate etc.).

Asupra fiecărei surse de erori se va reveni în cadrul manualului în mai multe rânduri.

Pentru micşorarea influenţelor dăunătoare ale erorilor de măsurare, în geodezie în general, dar şi în oricare componentă a acesteia (topografie, cadastru, fotogrammetrie ş.a.m.d.) se execută un număr mult mai mare de determinări decât cel strict necesar şi suficient, în funcţie de precizia pe care acestea trebuie să o aibă la sfârşit (dată de instrucţiuni sau stabilită prin tema lucrării).

Un prim scop principal al prelucrărilor măsurătorilor geodezice constă în determinarea celor mai bune (sau a celor mai probabile) valori pentru fiecare dintre mărimile măsurate.

Un alt scop principal al oricărei prelucrări de măsurători geodezice constă în determinarea unor estimatori ai *preciziei de măsurare*, care partajează măsurătorile efectuate din punctul de vedere al exactităţii cu care acestea au fost executate. În această categorie de preocupări se poate include şi determinarea *preciziei rezultatelor finale* obţinute prin prelucrare.

Calculul preciziei este necesar în diferite etape ale prelucrării, dintre care cele mai semnificative sunt:

- *prelucrări locale*, când se are în vedere, separat, câte un set de măsurători dintr-o lucrare mai mare (de exemplu, determinarea preciziei de măsurare a direcţiilor sau unghiurilor efectuată într-o singură staţie dintr-o reţea geodezică de triangulaţie);
- *prelucrări în reţea*, când se determină anumiţi estimatori de precizie nu numai pentru mărimile măsurate ci şi pentru rezultatele finale ale lucrării (de exemplu, calculul preciziei coordonatelor punctelor în care s-au efectuat măsurătorile).

Prelucrările măsurătorilor geodezice au un caracter complex, fiind bazate pe principii teoretice care au fost enunţate aproape în aceeaşi perioadă de timp, de către **Legendre** (1806) şi **Gauss** (1809).

Aceste principii au fost preluate, dezvoltate şi completate, rezultând metoda de calcul cunoscută sub denumirea de *Metoda celor mai mici pătrate* sau *Metoda pătratelor minime*.

Prin aplicarea acestei metode, se realizează obţinera unor *corecţii* pentru mărimile măsurate direct (care primesc atributul final de *mărimi compensate*). Corecţiile măsurătorilor care se determină în diferite etape ale prelucrării, satisfac un deziderat esenţial şi anume: *suma pătratelor lor tinde către un minim*, ceea ce reprezintă, în sens larg, o condiţie într-un proces de optimizare. Prin respectarea acestui principiu fundamental, la care se mai adaugă şi altele, metoda la care ne referim a primit denumirea menţionată mai înainte.

Dintre principiile generale de bază, pe care le respectă orice prelucrare a măsurătorilor geodezice trebuie menţionate chiar la începutul capitolului, principiul care poate fi apreciat ca fundamental: *precizia finală a unei mărimi considerate sau a lucrării în ansamblul ei, este determinată în procesul de măsurare şi nu în cel de calcul*. Cu alte cuvinte, din măsurători imprecise nu pot rezulta mărimi în care utilizatorul să poată avea încredere deplină.

Pentru clarificarea didactică a celorlate principii care stau la baza metodei celor mai mici pătrate, sunt necesare definiţii şi clasificări ale măsurătorilor geodezice precum şi ale erorilor care le însoţesc.

1.1. Criterii principale de clasificare a erorilor de măsurare

Mărimea sau *valoarea* unei anumite entităţi fizice măsurabile poate fi cunoscută de către cercetătorul care execută măsurarea, doar în anumite limite, oricât de dezvoltate ar fi tehnologiile folosite la determinarea acesteia. În funcţie de parametrii menţionaţi la începutul capitolului, care declanşează apariţia erorilor de măsurare, rezultatul final este mai mult sau mai puţin precis, dar *întotdeauna* afectat de erori. De aceea, una dintre definiţiile simple, dar sugestivă şi corectă în acelaşi timp, care se poate da pentru eroarea de măsurare este următoarea:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Eroarea}\\ \textit{de}\\ \textit{măsurare}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{Valoarea măsurată}\\ \textit{a}\\ \textit{mărimii considerate}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\textit{Valoarea de referinţă}\\ \textit{a}\\ \textit{mărimii considerate}\end{array}} \qquad \textit{(1.1)}$$

În mod asemănător, pentru noţiunea de *corecţie* a măsurătorii se poate da următoarea definiţe:

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Corecţia}\\ \textit{unei}\\ \textit{măsurători}\end{array}} = - \boxed{\begin{array}{c}\textit{Eroarea}\\ \textit{unei}\\ \textit{măsurători}\end{array}} \qquad \textit{(1.2)}$$

Definiţiile de mai sus conţin noţiunea de *valoare de referinţă* a mărimii considerate, în raport de care se pot face multe particularizări şi clasificări a erorilor de măsurare, dintre care se vor prezenta în continuare cele mai des utilizate.

1.1.1. Clasificarea erorilor în raport de mărimea lor

În raport de criteriul menţionat se pot deosebi două tipuri principale de erori.

1.1.1.1. Erori evitabile, categorie în care se pot cuprinde, de exemplu, erorile de dimensiuni neobişnuit de mari, datorate neatenţiilor operatorului care execută măsurarea, sau defecţiunilor grave ale aparaturii, înregistrarea greşită în carnetele de teren (de exemplu cu un număr de grade a unei lecturi pe cercurile teodolitelor) sau lecturi greşite (de ordinul metrilor) pe mirele de nivelment ş.a. Astfel de erori se pot denumi *greşeli* şi *nu caracterizează măsurătorile geodezice* şi, de aceea, nu vor intra în preocupările capitolelor manualului.

1.1.1.2. Erori inevitabile. Acestea sunt erori care intervin în toate măsurătorile geodezice, indiferent de pregătirea sau îndemnarea operatorului, de performanţele aparaturii sau de starea mediului în care se efectuează. Desigur, mărimea lor este diferită, în funcţie de aceşti parametri, de tehnologiile de măsurare şi de prelucrare locală. Practica a arătat că semnele + sau – ale erorilor inevitabile sunt repartizate aproximativ egal.

1.1.2. Clasificarea erorilor în raport de modul lor de acţiune

Erorile inevitabile pot avea următoarele modalităţi de acţionare, care determină şi denumirea acestora.

1.1.2.1 Erori sistematice. Erorile sistematice sunt influenţate (atât ca mărime cât şi ca semn) de un anumit parametru. Acest gen de erori poate fi declanşat de oricare dintre sursele menţionate la începutul capitolului, fiind tipice pentru orice procedeu de măsurare folosit în geodezie. Ca

exemplu, se poate reaminti aici eroarea sistematică de măsurare a unei distanţe cu o panglică de oţel (cunoscută de la cursul de *Topografie*), în funcţie de diferenţa care există între temperatura de măsurare şi cea de etalonare.

După cum se vede, chiar din acest exemplu simplu, erorile sistematice îşi pot schimba semnul pe parcursul unei zile de lucru (dimineţa temperatura la care se face măsurarea poate fi mai mică decât temperatura de etalonare şi atunci eroarea are un anumit semn, iar pe măsură ce temperatura exterioară se măreşte, erorile sistematice respective pot căpăta un semn diferit).

Prin urmare, se poate emite ipoteza că influenţa erorilor sistematice asupra măsurătorilor se cunoaşte, iar efectul acestora trebuie eliminat, total sau parţial, prin tehnologiile adecvate folosite la executarea măsurătorilor propriu-zise, sau prin anumite corecţii (obţinute prin calcul) care se adaugă ulterior:

- verificarea şi rectificarea aparatelor de măsură, de erorile provenite din dereglarea anumitor părţi componente. De exemplu, rectificarea teodolitului datorată erorii de colimaţie, a erorii de index, rectificarea instrumentelor de nivelment datorată erorii de neparalelism dintre directricea nivelei torice şi axa de vizare etc;
- aplicarea unei metode corespunzătoare de măsurare. Deoarece după rectificarea aparatului, pot rămâne dereglări reziduale, în general mici, se poate diminua influenţa erorilor sistematice remanente prin modul de lucru, adoptând o metodă de măsurare adecvată. De exemplu, erorile reziduale de colimaţie, se pot practic îndepărta prin măsurarea direcţiilor orizontale în ambele poziţii ale lunetei. Analog, influenţa erorii de neparalelism dintre directricea nivelei torice şi axa de vizare a lunetei instrumentului de nivelment, la măsurarea diferenţei de nivel dintre două puncte, se poate practic elimina prin nivelment geometric de mijloc;
- aplicarea ulterioară, după masurare, a unor corecţii specifice fiecărui tip de măsurători. De exemplu, la măsurarea precisă a distanţelor cu panglica de oţel, se calculează şi se aplică corecţiile de etalonare, de temperatură, de săgeată etc. Analog, diferenţele de nivel, măsurate prin nivelment trigonometric – geodezic, la distanţe de 1…3 km, se vor corecta cu corecţiile de curbură a Pământului şi de refracţie atmosferică.

1.1.2.2. Erori întâmplătoare (aleatoare). Datorită factorilor menţionaţi la începutul capitolului, cu toate măsurile de precauţie care se iau în orice categorie de măsurători geodezice, *erorile întâmplătoare (aleatoare)* nu pot fi evitate. Dacă se acceptă ca *valoare de referinţă*, de

exemplu, *media aritmetică* a unui număr oarecare de măsurători repetate efectuate asupra unei mărimi, atunci diferenţele de forma (1.1) au, în general, un caracter întâmplător (aleator), care este specific pentru orice proces de măsurare. Asupra acestei problematici se va reveni în **2.4,** deoarece studiul erorilor aleatoare (întâmplătoare) reprezintă un obiectiv principal al *Teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice.*

Deşi din punct de vedere didactic, modul de clasificare a erorilor de măsurare folosit în acest paragraf este necesar, în activitatea practică nu se poate face o delimitare precisă între aceste categorii de erori. Astfel, dacă se schimbă condiţiile de măsurare, anumite ereori aleatoare pot deveni erori sistematice şi invers.

În încheiere la acest paragraf se vor defini anumiţi termeni care sunt folosiţi frecvent în prelucrarea măsurătorilor geodezice.

Ecartul este diferenţa dintre două valori oarecare, dintr-un şir de măsurători repetate, efectuate asupra aceleiaşi mărimi.

Ecartul maxim este reprezentat de diferenţa dintre valoarea maximă şi valoarea minimă (considerate în *valoare absolută*), obţinute dintr-un şir de măsurători repetate efectuate asupra aceleiaşi mărimi.

Toleranţa este limita admisă (de instrucţiuni, regulamente sau caiete de sarcini) pe care o poate lua ecartul maxim. Diferenţa dintre ecartul maxim şi toleranţa admisibilă este un indicator deosebit în ceea ce priveşte calitatea măsurătorilor: cu cât această diferenţă este mai mare, se spune că măsurătoarea este mai precisă, şi invers.

1.1.3. Clasificarea erorilor în raport de modalitatea de exprimare a acestora

1.1.3.1. Erori exprimate numeric. În raport de definiţia (1.1.) şi de diferite *mărimi de referinţă*, rezultă diferite valori pentru erorile corespondente.

1.1.3.2. Erori relative. Eroarea relativă e_r a unei măsurători reprezintă raportul dintre valoarea numerică a erorii e şi mărimea măsurătorii propriu – zise m^0:

$$e_r = \frac{e}{m^0} \ . \qquad (1.3)$$

De regulă, erorile relative au un caracter informativ şi de aceea se exprimă sub formă rotunjită, ca de exemplu: 1:200 000, 1:5 000 ş.a.m.d. şi intervin în geodezie în mod deosebit la măsurătorile de distanţe.

1.1.4. Clasificarea erorilor în raport de sursă

La acest gen de clasificare ne-am referit chiar la începutul capitolului. Revenim, în continuare, cu unele detalieri.

1.1.4.1 Erori personale. Acestea se datorează calificării profesionale a operatorului sau sunt cauzate de deficienţe de vedere sau de concentrare ale acestuia. De exemplu, deficienţele de vedere au o anumită influenţă asupra aprecierii cititorilor pe cercurile gradate ale teodolitului.

1.1.4.2. Erori instrumentale. Datorită unor imperfecţiuni de construcţie sau de dereglare în timp a anumitor părţi componente ale instrumentelor şi aparatelor de măsură, rezultatul măsurătorilor devine mai imprecis. Exemplificările pot fi foarte numeroase şi au mai fost amintite anterior: eroarea de neparalelism dintre directricea nivelei de precizie şi axa de vizare la un aparat de nivelment, eroarea de colimaţie la un teodolit, modificarea lungimii unei panglici de oţel de 50 m după reparare şi în situaţia că nu s-a făcut o reetalonare etc.

1.1.4.3. Erori de mediu. Astfel de erori sunt datorate variaţiilor în condiţiile de mediu înconjurător (exterior) în care se execută măsurătoarea. De exemplu, variaţiile de temperatură, presiune, umiditate, luminozitate, etc, produc modificări ale aparatelor de măsură, care au fost etalonate pentru anumite condiţii standard (de laborator).

1.2. Clasificarea măsurătorilor geodezice

După enunţarea principalelor tipuri+ de erori, este utilă şi prezentarea unor criterii principale de clasificare a măsurătorilor geodezice, pentru a se putea prezenta în continuare mai uşor unele consideraţii teoretice.

1.2.1. Clasificarea măsurătorilor în raport de condiţiile de efectuare

1.2.1.1. Măsurători directe pot fi considerate acele măsurători în care mărimea fizică considerată se compară cu unitatea de măsură. Exemplul clasic este reprezentat de măsurarea unei distanţe cu ajutorul panglicii de oţel de 50 m.

Tot ca măsurători directe pot fi considerate şi funcţiile simple de mărimile măsurate direct. Astfel, de exemplu, determinarea unei diferenţe de nivel prin nivelment geometric este considerată măsurătoare directă, deşi în mod strict riguros, ca măsurare directă sunt fiecare dintre cele două citiri efectuate pe fiecare miră.

1.2.1.2. Măsurători indirecte sunt considerate acele măsurători care contribuie la determinarea altor mărimi care nu se pot măsura direct; aceste ultime mărimi sunt legate de cele măsurate direct prin relaţii matematice de dependenţă. De exemplu, determinarea altitudinilor reperilor dintr-o reţea de nivelment geometric (care nu pot fi determinate direct, cu precizia adecvată), utilizând diferenţele de nivel între reperii reţelei care sunt *considerate* măsurători directe.

1.2.1.3. Măsurători condiţionate. Acest tip de măsurători poate fi considerat ca un caz particular al măsurătorilor directe şi anume atunci când acestea sunt legate *între ele* prin anumite relaţii de condiţie geometrice sau analitice. De exemplu, dacă într-un triunghi plan au fost măsurate direct toate unghiurile, atunci suma lor trebuie să fie egală cu 200^g (în gradaţia cenezimală).

1.2.2. Clasificarea măsurătorilor în raport de precizia acestora

1.2.2.1. Măsurători de aceeaşi precizie, atunci când, de exemplu, măsurătorile sunt efectuate riguros în aceleaşi condiţii, astfel încât măsurătorilor li se poate acorda acelaşi grad de încredere. Asemenea situaţii intervin relativ rar în activitatea curentă.

1.2.2.2. Măsurători ponderate sau măsurători de precizie diferită, intervin atunci când unul dintre factorii declanşatori de erori diferă de la o măsurătoare la alta. În acest fel, unele dintre măsurători sunt mai precise decât altele, ceea ce corespunde situaţiilor reale din activitatea curentă. Caracteristic pentru astfel de măsurători sunt *ponderile* care se ataşează acestora în scopul partajării lor, şi la care ne vom referi de mai multe ori în cadrul manualului.

1.2.3. Clasificarea măsurătorilor în raport de gradul de dependenţă statistică

1.2.3.1. Măsurători corelate sau dependente statistc, intervin în situaţiile în care ansamblul de condiţii în care se efectuează o măsurătoare influenţează total sau parţial rezultatul alteia (sau altora) dintre măsurători. *Corelaţia sau dependenţa statistică* existentă între măsurătorile iniţiale (originare), se exprimă cu ajutorul unui coeficient de corelaţie, la care ne vom referi în **capitolul 2.**

1.2.3.2. Măsurători independente intervin în prelucrările în care se consideră că modalitatea de realizare a unei măsurători nu influenţează rezultatul celorlalte. De exemplu, la măsurarea diferenţelor de nivel prin utilizarea unor niveleuri de lungime convenabilă, are ca rezultat efectuarea rapidă şi uniformă a lucrărilor, precum şi la păstrarea condiţiilor de lucru, ceea ce are ca efect final obţinerea unor mărimi care pot fi acceptate ca *independente*.

Analizându-se strict riguros procesele de măsurare, cerectările efectuate în ultimele decenii au condus la concluzia că de fapt nu există măsurători independente, deoarece erorile instrumentale remanente, ca şi condiţiile exterioare de lucru, determină calitatea rezultatelor obţinute, grupându-le din acest punct de vedere. Aceasta reprezintă, de fapt, o legătură de natură stochastică între observaţiile cuprinse într-un anumit grup. Totuşi foarte multe prelucrări efectuate în geodezie neglijează aceste corelaţii, deoarece acestea sunt greu de determinat şi încarcă semnificativ atât volumul de lucrări cât şi costul acestora.

Capitolul 2

Noţiuni elementare de teoria probabilităţii şi statistică

Măsurătorile geodezice au un pronunţat caracter aleator (întâmplător). Studiul fenomenelor sau evenimentelor aleatoare este abordat în mod deosebit în *Teoria probabilităţii* şi respectiv în *Statistică.*

2.1. Câmp de evenimente

Evenimentul este rezultatul *unui experiment* şi este o noţiune fundamentală în teoria probabilităţii. Exemplul clasic este reprezentat de evenimentul care se poate produce la un experiment foarte simplu şi anume la aruncarea unui zar cu şase feţe. Se pot formula diferite evenimente *posibile:*

- apariţia unei anumite feţe, care se notează: (1), (2), …,(6);
- producerea unui eveniment mai complex, definit, de exemplu, prin posibilitatea de a apărea ori faţa 4 ori faţa 6 a zarului, este notată (4,6). Analog posibilitatea de a apărea una dintre feţele 1,3 sau 5, este notată (1,3,5) ş.a.m.d.;
- la evenimentele de mai sus se adaugă *evenimentul sigur,* notat (1,2,3,4,5,6), definit prin certitudinea că la fiecare aruncare a zarului va apărea o anumită faţă a sa, caracterizată de unul dintre cele 6 numere. La aceasta se adaugă *evenimentul imposibil,* definit prin desemnarea faptului de a nu apărea nici una dintre feţele zarului la oricare dintre aruncări, sau de a apărea o cifră diferită de cele 6 specifice pentru oricare zar obişnuit.

Evenimentul sigur se va nota cu ***S*** iar evenimentul imposibil cu **Ø .**

Activitatea umană poate fi descrisă ca un şir de astfel de evenimente, care au un anumit specific pentru fiecare sector de activitate. Mai pot fi menţionate, în aceste noţiuni introductive, *evenimentele compatibile,* care sunt acele evenimente care au proprietatea de a se putea realiza *simultan* şi respectiv *evenimentele incompatibile*, care nu au această proprietate.

Rezultatul experimentului, luat spre exemplificare, poate fi exprimat printr-o cifră, care a primit denumirea de *variabilă întâmplătoare* sau *variabilă aleatoare* *).

În situaţiile examinate mai înainte se mai spune că variabila aleatoare are un *caracter discret,* deoarece numărul de evenimente posibile la aruncarea cu zarul are un *caracter finit.*

Totalitatea evenimentelor care pot avea loc într-un experiment este denumită *populaţie*.

În exemplul considerat populaţia este constituită din următoarele evenimente:

(1), (2), (3), (4), (5), (6)

(1,2), (1,3), ... , (1,6) ,..., (2,6),..., (5,6)

(1,2,3), (1,2,4), ..., (4,5,6)

(1,2,3,4), (1,2,3,5), ..., (3,4,5,6)

(1,2,3,4,5), (1,2,3,4,6), ..., (2,3,4,5,6)

(1,2,3,4,5,6)

combinările de n elemente, luate câte k se determină cu formula:

$$C_n^{\,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad . \tag{2.1}$$

Rezultă că în exemplificarea avută în vedere vor exista numai următoarele situaţii posibile*:*

$$C_6^{\,1} = \frac{6!}{5!\cdot 1!} = 6\,;$$

$$C_6^{\,2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15\,;$$

$$C_6^{\,3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20\,;$$

$$C_6^{\,4} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15\,;$$

$$C_6^{\,5} = \frac{6!}{1!\cdot 5!} = 6\,;$$

$$C_6^{\,6} = \frac{6!}{0!\cdot 6!} = 1.$$

---

*) Expresia provine de la cuvântul latin *alea*, care înseamnă zar

Prin urmare, totalitatea evenimentelor posibile care pot avea loc în acest experiment este:

$$C_6^{\,1} + C_6^{\,2} + C_6^{\,3} + C_6^{\,4} + C_6^{\,5} + C_6^{\,6} = 64,$$

ceea ce conferă experimentului un *caracter finit*.

În tehnică, inclusiv în domeniul geodeziei, evenimentele sau variabilele aleatoare au un *caracter continuu,* mai ales când experimentul este realizat cu aparatură de rezoluţie superioară. Astfel, la măsurarea repetată a unei distanţe, ca rezultat se poate obţine, în principiu orice valoare. În plus, numărul evenimentelor posibile într-un asemenea experiment poate fi considerat ca *infinit* sau *continuu,* deoarece distanţa poate fi remăsurată de un număr oricât de mare.

Teoria prelucrării masurătorilor geodezice are în vedere, aproape fără excepţie, variabile aleatoare cu caracter continuu.

Un sistem sau *un câmp de evenimente* sau *o populaţie* notat(ă) ***C*** este reprezentat(ă) de mulţimea evenimentelor care pot apărea într-un anumit experiment. De cele mai multe ori, cel care execută experimentul respectiv se mulţumeşte doar cu o anumită *parte oarecare a sa*, denumită *eşantion de sondaj* sau mai simplu *eşantion.* În acest caz experimentul posedă un *caracter finit* (ceea ce este specific pentru experimentele curente din activităţile de natură tehnică).

Rezultatele finale ale unor asemenea experimente se numesc *estimaţii*, deoarece se referă doar la studierea (măsurarea) unui eşantion din întreaga populaţie. De aceea se spune că estimaţia are o valoare cantitativă *statistică,* adică *nu absolut exactă sau absolut sigură* ci *numai (foarte) probabilă*. Estimaţia poate fi considerată *corectă*, atunci când selecţia este *reprezentativă*. Pentru aceasta este necesar ca elementele care compun selecţia să fie suficient de numeroase şi astfel alese încât să aibă caracter aleator, probabilistic, ceea ce va permite descrierea cât mai fidelă a populaţiei.

Principalele proprietăţi ale evenimentelor

- *Implicarea*: se consideră două evenimente A şi B din acelaşi experiment. Dacă odată cu evenimentul A este realizat şi evenimentul B se spune că evenimentul A este implicat de evenimentul B sau că evenimentul A este o parte a evenimentului B şi se scrie $A \subset B$ sau $B \supset A$. În exemplul aruncării zarului se pot exemplifica:

$$(1) \subset (1,5);\ \ (2,3) \subset (1,2,3,5) \text{ ş.a.m.d.} \tag{2.2}$$

- *Tranzitivitatea:* consderând evenimentele A, B, D care aparţin unui aceluiaşi experiment, în care: $A \subset B$; $B \subset D$, atunci $A \subset D$. Pentru exemplificare, revenim la experienţa aruncării cu zarul:

$$(2) \subset (2,3);\ \ (2,3) \subset (1,2,3,4)\ \Rightarrow (2) \subset (1,2,3,4)\ . \tag{2.3}$$

- *Contrarul* evenimentului A este reprezentat de evenimentul care constă în nerealizarea acestuia şi se notează cu $\bar{A}$. Ca exemplificare, în experimentul avut în vedere până acum, se poate scrie:

$$\text{dacă A este } (2,6) \text{ atunci } \bar{A} \text{ este } (1,3,4,5). \tag{2.4}$$

Contrarul evenimentului sigur ***S*** este evenimentul imposibil **Ø .**

- *Reuniunea:* dacă A şi B sunt două evenimente din acelaşi experiment, producerea *fie a* evenimentului A, *fie a* evenimentului B se notează $A \cup B$ fiind pronunţat A sau B şi se numeşte *reuniunea celor două evenimente*.

Evident:

$$A \cup \varnothing = A, \tag{2.5}$$

pentru oricare eveniment A. Se pot da şi alte exemple de reuniuni:

$$(3) \cup (5) = (3,5); \quad (2,6) \cup (3,4,6) = (2,3,4,6)\ . \tag{2.6}$$

Reuniunea tuturor evenimentelor elementare (a se vedea definiţia acestora puţin mai jos) *dintr-un câmp de evenimente este evenimentul sigur* $\mathcal{S}$. În experienţa aruncării zarului cu şase feţe, evenimentele elementare fiind (1), (2), (3), (4), (5), (6), rezultă:

$$(1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) \cup (5) \cup (6) = (1,2,3,4,5,6), \tag{2.7}$$

ceea ce reprezintă evenimentul sigur $\mathcal{S}$.

- *Intersecţia*: dacă se au în vedere aceleaşi evenimente A, B din experimentele anterioare, evenimentul care constă în producerea lor simultană se notează $A \cap B$, fiind pronunţat A şi B şi se numeşte *intersecţia* acestora. Ca exemplificare, din experimentul aruncării zarului cu 6 feţe se poate scrie:

$$(4) \cap (1,4,6) = (4); \quad (2,5) \cap (2,3,4) = (2)\ . \tag{2.8}$$

Dacă $A \cap B = \varnothing$, evenimentele se numesc *disjuncte* sau *incompatibile*. Ca exemplificare:

$$(1,4) \cap (2,3,6) = \varnothing\ . \tag{2.9}$$

- *Evenimentul elementar*: un eveniment $A \in \mathcal{C}$, $A \neq \varnothing$ se numeşte *eveniment elementar* dacă faţă de oricare alt eveniment $B \in C$, $B \neq A$ îndeplineşte una din situaţiile:

$$A \cap B = \varnothing; \quad A \subset B\ . \tag{2.10}$$

Definiţia de mai sus este valabilă şi pentru câmpurile *infinite de evenimente*. Se constată cu uşurinţă că evenimentele (1), (2), (3), (4), (5), (6) sunt evenimente elementare deoarece satisfac prima condiţie din (2.10). Prin urmare, evenimentele elementare sunt evenimente disjuncte (incompatibile).

2.2. Frecvenţă

Să presupunem că se continuă experimentul aruncării zarului cu 6 feţe, în sensul că se repetă aruncarea sa de un număr finit de ori (de exemplu de 100 ori). Se va constata, de exemplu, că într-o astfel de serie de 100 de aruncări cifra 2 apare de 15 ori. Repetând experimentul anterior, în aceleaşi condiţii (100 aruncări), este posibil să se obţină un număr diferit de apariţii ale cifrei 2, care însă, vor oscila în jurul valorii 15: de exemplu de 14 ori, de 12 ori, de 16 ori ş.a.m.d.. Numărul de apariţii ale cifrei 2 din cele 100 de aruncări repetate ale zarului este denumit *frecvenţă absolută* a apariţiei cifrei 2. Raportul dintre fiecare dintre aceste numere de apariţii şi numărul total de aruncări (de exemplu 15 / 100 = 0.15; 14 / 100 = 0.14; 12 / 100 = 0.12; 16 / 100 = 0.16 ş.a.m.d.) se numeşte *frecvenţă relativă* sau, mai simplu, *frecvenţă*.

Raţionamentul şi definiţiile de mai sus se pot aplica şi în cazul *variabilelor aleatoare continuie*, cum ar fi, de exemplu, măsurarea repetată de un număr exagerat de ori a unei mărimi X, pentru care rezultatele obţinute se ordonează în ordine crescătoare:

$$X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0, \qquad (2.11)$$

unde n este un număr finit. Acesta acoperă un anumit *interval* pe scara numerelor reale (raportate, de exemplu, pe axa absciselor X, ca în Fig. 1). Intervalul are limita $a \equiv X_1^0$ (*minimă*) şi respectiv $b \equiv X_n^0$ (*maximă*).

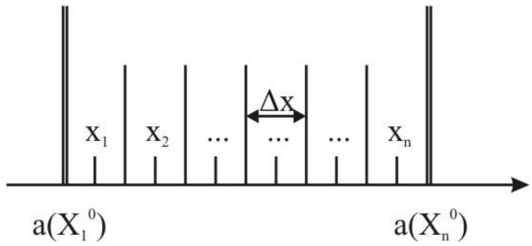

Fig. 1. Rezultatele unei măsurători repetate

Măsurătorile avute în vedere sunt cuprinse în intervalul menţionat:

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{X}_i^0 \leq \mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.12)$$

Deseori este util ca intervalul considerat să fie împărţit într-un număr m oarecare de *clase* sau de *intervale*, de lăţime ΔX, cu centrele în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

În fiecare dintre aceste subintervale se vor afla un număr diferit $k_1, k_2, \ldots, k_m$ de măsurători.

Considerentele de mai sus se pot formula sintetic sub forma:

$$0 \leq k_i \leq n; \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Numărul de clase m se poate stabili cu diferite formule, deci are un caracter arbitrar. În (**Fotescu & De ex. Săvulescu,** 1988, pg. 1.2) se recomandă:

$$m = 1 + 3.322 \ln(n). \qquad (2.14)$$

Se notează cu $h(x_i, \Delta X)$ *funcţia frecvenţelor (relative)* ale claselor astfel constituite, care se va determina analog cum s-a procedat şi în experimentul cu caracter discret:

$$h(x_i, \Delta X) = \frac{k_i}{n} < 1 \ , \tag{2.15}$$

rezultând evident:

$$0 \le h(x_i, \Delta X) \le 1 \ , \tag{2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} h(x_i, \Delta X) \ = \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} k_i \ = \ 1 \ . \tag{2.17}$$

Aşa cum rezultă chiar din relaţia de definiţie, funcţia frecvenţelor relative depinde nu numai de centrul clasei considerate x_I ci şi de mărimea ΔX a intervalului dintre clase, care a fost ales arbitrar. Dacă se ordonează într-un tablou rezultatele obţinute pentru variabila aleatoare continuă avută în vedere şi anume *centrele claselor* considerate şi *frecvenţele* acestora:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ h(x_1, \Delta X) & h(x_2, \Delta X) & \dots & h(x_m, \Delta X) \end{matrix} \ , \tag{2.18}$$

se spune că s-a obţinut *repartiţia variabilei aleatoare continuie* X.

Reprezentarea grafică a *repartiţiilor empirice* (rezultate din măsurători) se poate realiza în mai multe moduri, dintre care *curba frecvenţelor* (numită şi *histogramă* - Fig. 2a) precum şi *poligonul frecvenţelor* (Fig. 2b) sunt cele mai sugestive.

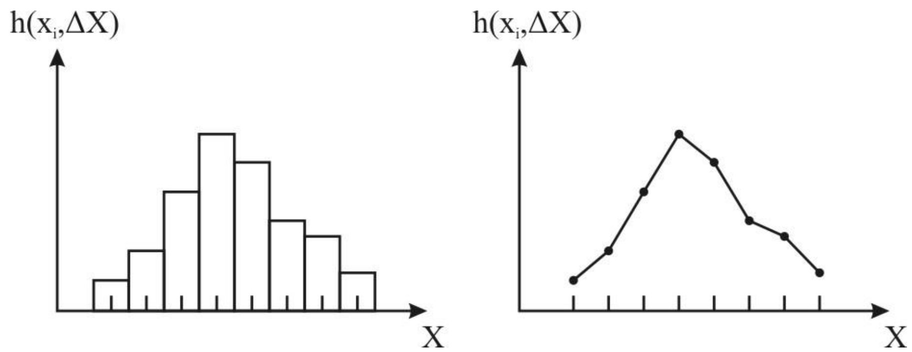

Fig. 2. Reprezentarea grafică a funcţiei frecvenţelor unei variabile aleatoare continuie:
a) – histograma ; b) – poligonul frecvenţelor

Reprezentarea din Fig. 2 are un caracter didactic – demonstrativ, nefiind rezultatul unor măsurători concrete, însă majoritatea experimentelor practice sunt caracterizate de configuraţii asemănătoare.

Histograma se construieşte astfel:

- se înscriu pe abscisă limitele claselor;
- pentru fiecare clasă se construieşte un dreptunghi, care are ca bază (pe abscisă) intervalul clasei şi ca înălţime frecvenţa clasei.

Asemănător cu histograma se reprezintă grafic şi *poligonul frecvenţelor* (Fig. 2b) care rezultă din unirea punctelor definite pe abscisă prin centrul clasei iar în ordonată prin frecvenţa clasei.

2.3. Probabilitate

2.3.1. Probabilitatea teoretică

Atunci cînd numărul n este suficient de mare, deci atunci când *eşantionul* tinde să ia dimensiunile întregii *populaţii* din care provine, *funcţia frecvenţelor relative* tinde către *funcţia de probabilitate* (care reprezintă, pe rînd, probabilitatea clasei la care ne referim):

$$\lim_{n\to\infty}\left\{h\left(x_i,\Delta X\right)=\frac{k_i}{n}\right\} = \boldsymbol{P}(x_i\,,\,\Delta X)\,. \qquad (2.19)$$

Se constată astfel că *funcţia de probabilitate* $\boldsymbol{P}(x_i\,,\,\Delta X)$, la fel ca şi *funcţia de frecvenţă*

$h(x_i\,,\Delta X)$ depinde nu numai de poziţia centrului clasei de care aceasta aparţine (x_i) ci şi de mărimea intervalului (ΔX) care, aşa cum s-a stabilit, este ales arbitrar. Pentru a elimina acest neajuns, se împarte funcţia de probabilitate cu o constantă oarecare, de exemplu cu lăţimea intervalului Δx . Rezultă la limită o altă funcţie $f(x_i)$, care este denumită *densitate de probabilitate* sau *densitate de repartiţie*:

$$f\left(x_i\right)=\lim_{\Delta x\to dx}\left\{\frac{\boldsymbol{P}\left(x_i,\Delta X\right)}{\Delta X}\right\}, \qquad (2.20)$$

care, ca şi probabilitatea $\boldsymbol{P}(x_i\,,\,\Delta X)$, este o funcţie continuă, integrabilă.

În continuare se poate pune întrebarea: care este probabilitatea ca o măsurătoare m^0 oarecare să se afle situată sub o limită x dată. Răspunsul este obţinut prin integrarea corespunzătoare a *densităţii* *de probabilitate / de repartiţie* f(x). Funcţia F(x) obţinută este denumită *funcţie de distribuţie a variabilei aleatoare* avută în vedere **Pelzer**, 1980, pg. 36:

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{m^0 \le x\} = \boldsymbol{P}\{-\infty < m^0 \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx\ . \qquad (2.21)$$

Prin particularizarea relaţiei de mai sus se pot obţine răspunsuri la unele întrebări care intervin deseori în activitatea curentă:

- care este *probabilitatea teoretică infinitezimală* d$\boldsymbol{P}$, ca o anumită măsurătoare m^0 (în cazul concret examinat aici o distanţă d^0 oarecare) să se situeze între limitele x şi x + dx:

$$d\boldsymbol{P}\left\{x \le m^0\left(d^0\right) < x + dx\right\} = f(x)dx\ ; \qquad (2.22)$$

- *probabilitatea teoretică* pentru ca o măsurătoare oarecare m^0 să se afle între două limite a şi b:

$$\boldsymbol{P}\left\{a \le m^0 \le b\right\} = P\left\{m^0 \le b\right\} - P\left\{m^0 \le a\right\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx\ . \qquad (2.23)$$

2.3.2. Probabilitatea simplă

Pentru cazurile care intervin frecvent în activitatea practică curentă, unde n este un număr foarte mare dar finit, se acceptă, de cele mai multe ori, *că probabilitatea este media aritmetică a frecvenţelor relative ale evenimentelor elementare considerate*.

Consideraţiile de mai sus sunt valabile când se îndeplinesc anumite condiţii. De exemplu, în cazul experimentului constituit din aruncarea simplă, repetată, a unui zar, trebuie respectate următoarele condiţii minimale şi obligatorii:

- zarul trebuie să fie simetric (ca formă) şi omogen (ca structură);
- numărul de experimente trebuie să fie cât mai mare.

Experimentele reale nu satisfac complet cele două condiţii esenţiale menţionate mai sus, şi ca urmare, derularea şi observarea acestora nu pot fi considerate complete.

Probabilitatea simplă este reprezentată de raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile, în ipoteza că toate cazurile sunt egal posibile. Din acest motiv s-a presupus mai înainte că probabilitatea (frecvenţa medie) de apariţie a cifrei 2 la aruncarea unui zar cât mai corect construit (simetric şi omogen) este de 1/6 ≈ 0,15.

Se pot da şi alte exemple de calcul al probabilităţii simple de producere a unor evenimente din anumite experimente:

- probabilitatea de a apărea o cifră pară (sau impară) la aruncarea zarului este 3/6 ≈ 0,5;

- într-o urnă se află a bile albe şi b bile negre. Probabilităţile de extragere a unei bile albe $\boldsymbol{P}$(a) sau a unei bile negre $\boldsymbol{P}$ (b) se determină cu relaţiile:

$$\boldsymbol{P}(a) = \frac{a}{a+b}; \boldsymbol{P}(b) = \frac{b}{a+b} \quad , \qquad (2.24)$$

şi depind de numerele de bile albe, respectiv negre, care se află în urnă.

Definiţia clasică a probabilităţii simple, prezentate anterior, oferă posibilitatea calculării sale în marea majoritate a cazurilor întâlnite în practică. Totuşi, pentru unele situaţii, aceasta nu poate da răspunsuri exacte şi satisfăcătoare. Astfel, de exemplu, cu definiţia menţionată mai înainte nu se poate determina probabilitatea obţinerii *unei anumite valori probabile* atunci când o anumită distanţă este măsurată în mod repetat.

De o importanţă deosebită pentru ceea ce se va prezenta în continuare în manual este următoarea

Definiţie

Două evenimente A şi B ale unui câmp $\boldsymbol{C}$ se numesc *independente* dacă are loc egalitatea:

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) * \boldsymbol{P}(B). \qquad (2.25)$$

Recapitulând, se pot defini următoarele proprietăţi ale probabilităţii simple $\boldsymbol{P}$ pe un cîmp de evenimente $\boldsymbol{C}$ (**Mihoc**, 1954, **Mihoc** şi **Urseanu**, 1962, **Şabac**, 1965 ş. a.):

$$\boldsymbol{P}(\varnothing) = 0; \qquad (2.26)$$

$$\boldsymbol{P}(\bar{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A) \;;\; A \in \boldsymbol{C}; \qquad (2.27)$$

$$0 \le \boldsymbol{P}(A) \le 1 \;;\; A \in \boldsymbol{C}; \qquad (2.28)$$

$$\boldsymbol{P}(A) \le \boldsymbol{P}(B) \text{ dacă } A \subset B \;; A \in \boldsymbol{C};\; B \in \boldsymbol{C}. \qquad (2.29)$$

2.4. Erori întâmplătoare (aleatoare)

Aşa cum s-a arătat în *1.1.2.2.*, în ipotezele utilizate în analizele care se vor efectua în *Teoria prelucrării măsurătoilor geodezice* se va *presupune* că măsurătorile sunt corectate de influenţele erorilor sistematice.

Fiecare *variabilă întâmplătoare*, în cazul nostru - fiecare măsurătoare geodezică, este însoţită de o *eroare întâmplătoare (aleatoare)*, care are surse multiple şi complexe de producere, dependente de specificul măsurătorii, în primul rînd, precum şi de modalitatea în care aceasta este obţinută şi pe care le-am menţionat în **cap. 1.** *Prin definiţie* o variabilă aleatoare **X** este denumită *n - dimensională* atunci când fiecare dintre componentele sale X_i^0 (i = 1, 2, … , n) este o *variabilă aleatoare unidimensională*. Pentru fiecare dintre acestea se poate determina probabilitatea $\boldsymbol{P}(X_i^0)$.

Proprietatea menţionată poate fi interpretată şi în următorul sens: rezultatele măsurătorilor repetate asupra unei anumite mărimi variază între ele, dar sunt limitate în interiorul distribuţiei de probabilitate aferente.

În mod uzual, erorile aleatoare posedă următoarele caracteristici sau proprietăţi comune:

a.- erorile aleatoare mici, în valoare absolută, sunt mult mai frecvente sau mult mai probabile decît erorile mari (principiul *cauzalist*);

b. - erorile aleatoare sunt mai mici decît o anumită limită (principiul *limitativ*);

c. - în cazul unui număr mare de determinări, efectuate asupra unei anumite mărimi, numărul erorilor aleatoare pozitive este egal cu numărul erorilor aleatoare negative (principiul *distributiv*);

d. - probabilitatea de a se produce o anumită eroare aleatoare este funcţie numai de mărimea erorii respective (principiul *probabilistic*).

În mod normal, erorile mari se produc mai rar (sunt mai puţin probabile) în comparaţie cu erorile mici (care au o probabilitate mai mare).

Funcţia care exprimă optimal proprietăţile menţionate mai sus ale erorilor aleatoare este reprezentată în Fig. 3 fiind cunoscută sub denumirea de *curba clopot Gauss* (**Gauss**, 1809) şi are ecuaţia:

$$y = Ce^{-h^2x^2}, \qquad (2.30)$$

în care:

- pe axa x sunt reprezentate mărimile erorilor aleatoare;
- pe axa y sunt reprezentate numărul acestora;
- C şi h sunt constante, asupra cărora se vor prezenta unele semnificaţii în cele ce urmează;
- e reprezintă baza logaritmilor naturali; e = 2.712821828 … Consecinţă: ln e = 1. A se vedea şi **Anexa 4.**

Reprezentarea grafică a curbei clopot **Gauss** este dată în figura de mai jos, din care se poate constata cu uşurinţă verificarea celor patru proprietăţi principale ale erorilor aleatoare.

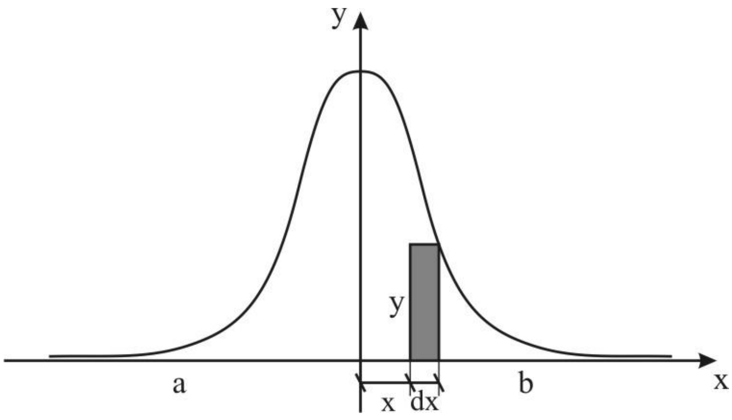

Fig. 3. Gurba clopot **Gauss**

Dacă se compară *curba clopot* **Gauss** cu reprezentarea grafică a repartiţiei *frecvenţelor relative* ale unei variabile aleatoare continuie (Fig. 2) se constată asemănări evidente. Aceasta confirmă afirmaţia că situaţiile care intervin în practică urmează legităţi probabilistice, mai ales când *volumul experimentului* este suficient de mare (astfel încât relaţia (2.19) poate fi interpretată şi prin semnificaţiile sale grafice) .

2.4.1. Probabilitatea infinitezimală a unei erori aleatoare

Probabilitatea infinitezimală a unei erori aleatoare reprezintă probabilitatea d$\boldsymbol{P}$ ca o eroare să aibă mărimea cuprinsă în intervalul x şi respectiv x +dx din Fig.3 . Aceasta se poate determina cu regula de calcul a probabilităţii simple dată puţin mai sus, raportând suprafaţa dreptunghiului haşurat din Fig. 3 (care reprezintă numărul de erori aleatoare cuprinse în intervalul infinitezimal menţionat) şi suprafaţa S a întregului domeniu din interiorul curbei **Gauss** (care reprezintă totalitatea erorilor aleatoare din întregul experiment):

$$d\boldsymbol{P} = \frac{y\,dx}{S}. \tag{2.31}$$

Considerând S = 1 , rezultă :

$$d\boldsymbol{P} = C\, e^{-h^2 x^2}\, dx\ . \tag{2.32}$$

2.4.2. Probabilitatea finită a unei erori aleatoare

Probabilitatea finită ca o eroare să fie cuprinsă între limitele a şi b (Fig. 3) se poate obţine prin integrarea, în ambii membri, a relaţiei de mai sus:

$$\boldsymbol{P}(a, b) = C\int_a^b e^{-h^2 x^2}\, dx\ . \tag{2.33}$$

2.4.3. Certitudinea producerii unei erori aleatoare

Producerea unei erori aleatoare cu certitudine are probabilitatea $\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{S}) = 1$:

$$\boldsymbol{P}(-\infty, +\infty) = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = 1. \tag{2.34}$$

2.4.4. Dependenţa dintre constantele C şi h

Se presupune cunoscut de la cursul de *Analiză matematică* (a se vedea şi **Anexa 3**) rezultatul integralei **Euler - Poisson**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\ . \tag{2.35}$$

Dacă se efectuează schimbarea de variabilă:

$$h\,x = t; \tag{2.36}$$

$$h\,dx = dt, \tag{2.37}$$

relaţia (2.34) devine:

$$\boldsymbol{P}(-\infty, +\infty) = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{h} = 1\ , \tag{2.38}$$

şi prin utilizarea soluţiilor (2.36) şi (2.37) se obţine:

$$C = \frac{h}{\sqrt{p}}\ . \tag{2.39}$$

Relaţia de mai sus evidenţiază dependenţa dintre constantele C şi h.

Prin urmare, probabilitatea finită a unei erori aleatoare se poate scrie şi sub forma:

$$\boldsymbol{P}(a, b) = \frac{h}{\sqrt{p}}\int_a^b e^{-h^2x^2}\,dx\ , \tag{2.40}$$

în care intervine numai un singur parametru şi anume h. Acesta este denumit *indice de precizie*, deoarece caracterizează precizia unei măsurători, aşa cum se va arăta puţin mai departe.

Probabilitatea producerii unei erori aleatoare în intervalul - x şi respectiv + x (deci în valoare absolută eroarea $|x|$) se poate obţine din relaţiile (2.31) şi (2.37).

$$\boldsymbol{P}\,|x| = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2h}{\pi}\int_0^x e^{-h^2x^2}\,dx. \tag{2.41}$$

Deoarece erorile aleatoare au valori mici, expresia din interiorul integralei anterioare se poate dezvolta în serie (a se vedea şi **Anexa 4**):

$$e^{-h^2x^2} = 1 - h^2x^2 + \ldots\ , \tag{2.42}$$

rezultînd prin integrare şi ordonarea termenilor:

$$\boldsymbol{P}|x| = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{(hx) - \frac{(hx)^3}{3} + \ldots\right\}\ . \tag{2.43}$$

2.4.4. Eroarea medie probabilă E_s a unei singure măsurători.

Ponderi teoretice

Eroarea medie probabilă E_s a unei singure măsurători este acea eroare pentru care numărul erorilor mai mici, respectiv mai mari, decît aceasta sunt egale. Prin urmare, în interiorul domeniului definit de curba clopot **Gauss**, eroarea medie probabilă E_s a unei singure măsurători împarte cele două suprafeţe în cîte două părţi egale ($S_1 = S_1^{'}$ şi respectiv $S_2 = S_2^{'}$ - în Fig. 4). Rezultă că probabilitatea de producere a erorii E_s, în ambele situaţii, făcând *abstracţie de semn*, este egală cu 1/2.

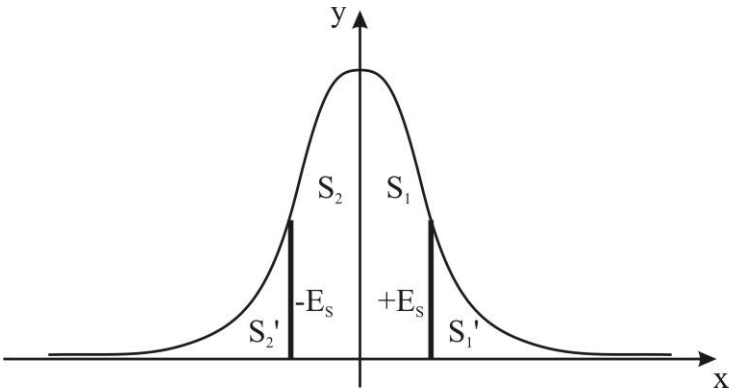

Fig. 4. Eroarea medie probabilă a unei singure măsurători.

Marimea erorii probabile a unei singure măsurători se poate deduce din rezolvarea ecuaţiei de gradul III (2.43), considerîndu-se probabilitatea $\boldsymbol{P}\left(\left|E_s\right|\right) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{(hx) - \frac{(hx)^3}{3}\right\} = \frac{1}{2} . \qquad (2.44)$$

Soluţia ecuaţiei de mai sus este xh = 0.4769, sau într-o aproximaţie suficientă:

$$\left|E_s\right| \equiv \left|x_p\right| = \frac{0,48}{h} . \qquad (2.45)$$

Din relaţia de mai sus rezultă că pentru erori probabile E_s din ce în ce mai mici, factorul h devine din ce în ce mai mare. Aceasta este motivaţia pentru care, aşa cum s-a mai menţionat anterior, acesta a primit denumirea de *indice de precizie.*

Dacă se introduce notaţia $p = h^2$, se obţine din formula anterioară:

$$p = \frac{c}{E_s^2} = h^2 , \qquad (2.46)$$

unde p este întodeauna un număr pozitiv.

Numărul $p = h^2$ se numeşte *ponderea teoretică a măsurătorii* considerate, fiind invers proporţional cu pătratul erorii medii probabile E_s^2 a unei singure măsurători. Despre ponderi se va mai trata şi în alte părţi ale manualului.

Dacă se reprezintă grafic rezultatele obţinute pentru două experimente diferite (de exemplu 2 serii de măsurători efectuate asupra unei anumite mărimi), acel rezultat care are ordonata la origine mai mare (dacă x = 0 atunci din relaţiile (2.30) şi (2.39) rezultă $y = C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$) este mai precis (experimentul (2) în Fig. 5., în care $h_2 > h_1$).

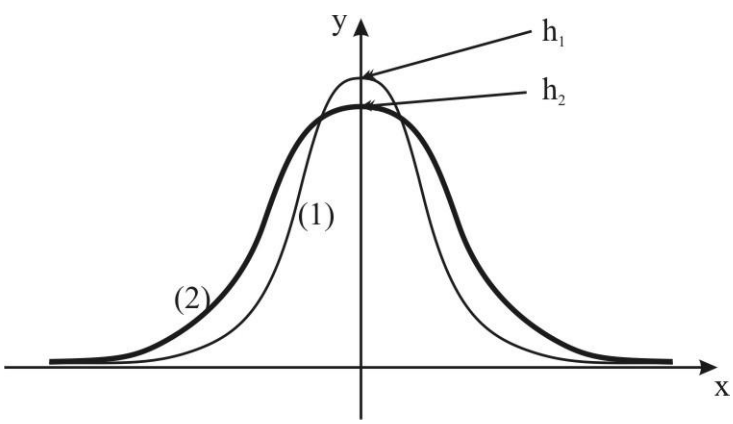

Fig. 5. Reprezentarea grafică a erorilor obţinute în două serii de măsurători efectuate asupra unei anumite mărimi

2.5. Parametri (estimatori) statistici

Variabilele aleatoare care descriu *populaţiile* (în dezvoltările de natură teoretică) sau *selecţiile / sondajele* (în analizele exeprimentale concrete) se caracterizează printr-o serie de *parametri (estimatori) statistici,* care şi-au găsit o mai mare sau o mai mică aplicabilitate în diversele ramuri ale tehnicii. În continuare se vor examina acei parametri statistici care sunt mai des utilizaţi la *prelucrarea măsurătorilor geodezice.*

2.5.1. Parametrii tendinţei centrale

Pentru determinarea celei *mai bune valori* a unei variabile aleatoare (întâmplătoare) atunci când se dispune de măsurători repetate ale unei anumite mărimi, se folosesc diverşi estimatori, chiar dacă aceştia posedă, în unele situaţii, şi anumite incoveniente.

2.5.1.1. *Media aritmetică sau media empirică*. Se consideră un număr finit n de mărimi aleatoare (întâmplătoare) rezultate din măsurători repetate, efectuate asupra unei mărimi:

$$\mathbf{x}^{o} = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^T. \qquad (2.47)$$

Observaţii

În manual se vor utiliza următoarele convenţii de scriere:

- vectorii şi matricile se vor scrie cu caractere (mici, respectiv mari) *de* **tip bold** (de exemplu: **a**, **B**). Acestea nu trebuie confundate cu anumite litere ***P, S, C, E,*** ş.a. folosite pentru a desemna anumite simboluri sau anumiţi operatori;
- indicele superior T la vectori sau matrici indică *transpusa* acestora (de exemplu: $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$);
- matricea inversă va fi notată cu $\mathbf{B}^{-1}$, iar matricea inversă generalizată cu $\mathbf{B}^{-}$

Aşa cum s-a menţionat în introducerea la acest capitol, fiecare componentă din vectorul (2.47) rezultă dintr-un proces mai mult sau mai puţin complex de măsurare, în care intervin un *număr oarecare de observaţii elementare*, fiecare dintre acestea fiind însoţită de o *eroare elementară* specifică. Acestea rămân, în general, inaccesibile cunoaşterii umane, dar, evident, influenţează rezultatul măsurării.

O *valoare de referinţă* posibilă în relaţia (1.1), numită în acest capitol parametru al tendinţei centrale, este constituit de *media aritmetică* denumită şi *medie empirică,* notată $\bar{x}^0$ a eşantionului examinat:

$$\bar{x}^0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^0 = \frac{\left[x^0\right]}{n} = \frac{1}{n} * \mathbf{i}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{0}}. \qquad (2.48)$$

În relaţia de mai sus s-a folosit simbolul $[\ ]$, introdus de către **Gauss,** care se citeşte *sumă* şi este folosit frecvent în *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice.*

Cu $\mathbf{i}$ s-a notat vectorul unitate:

$$\mathbf{i} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ \ldots\ \ 1]^T. \qquad (2.49)$$

Deoarece media aritmetică se calculează cu uşurinţă, a rămas şi în prezent cel mai folosit parametru al tendinţei centrale. În ipoteza că măsurătorile repetate considerate nu sunt afectate de influenţe sistematice, media aritmetică este considerată un *estimator optim* (**Niemeier,** 2002).

Aplicaţia 1

Se consideră următoarele măsurători repetate: 143.255 m, 143.257 m, 143.259 m, 143.255 m, 143.250 m, 143.260 m, 143.265 m, efectuate asupra unei distanţe. Se cere calculul *mediei aritmetice.*

Soluţia rezultă din aplicarea formulei (2.48) şi este: 143.2573 m.

Din aplicaţia simplă de mai sus, se pot deduce unele reguli utile şi în alte situaţii mai complexe:

- atunci când *toate* mărimile avute în vedere la calculul mediei aritmetice au o *parte comună* (în aplicaţia considerată: 143 m), media aritmetică se realizează numai pentru cifrele variabile (de după virgulă);
- dacă la împărţirea necesară la calculul mediei aritmetice nu rezultă exact acelaşi număr de zecimale cu cel pe care le-au avut datele iniţiale, este indicat ca rezultatul să fie luat cu o zecimală în plus.

2.5.1.2. Mediana este acea valoare x_m^0 a unei serii statistice, ca de exemplu cea reprezentată de distanţele cuprinse în (2.47), cu termeni aşezaţi în ordine crescătoare, care împarte seria respectivă în două grupe egale ca număr de valori (**Ceauşescu,** 1981). Se disting două situaţii:

- *numărul n este impar* şi atunci :

$$x_m^0 = x_{(n+1)/2}^0 \; ; \qquad (2.50)$$

- *numărul n este par* şi atunci :

$$x_m^0 = \frac{1}{2}\left(x_{n/2}^0 + x_{(n+2)/2}^0\right) \; . \qquad (2.51)$$

Aplicaţia 2

Să se calculeze *mediana* pentru datele avute în vedere la ***Aplicaţia 1.***

Pentru început se vor ordona datele în ordine crescătoare: 143.250 m, 143.255 m, 143.255 m, 143.257 m, 143.259 m, 143.260 m, 143.265 m.

Mediana se va determina, în această aplicaţie, cu formula (2.50) fiind : 143.257 m.

Mediana are o proprietate remarcabilă care constă în faptul că nu este influenţată de *valorile extreme* ale variabilelor considerate, proprietate pe care nu o are media aritmetică. *Valorile extreme* pot provoca (abstracţie făcând de semn) apariţia unor *erori mari* (numite uneori şi *erori grosolane*) în calcularea preciziei măsurătorilor, aspect care va fi tratat în paragraful următor.

Datorită proprietăţii menţionate, mediana este considerată un *parametru robust* (**Niemeier,** 2002).

2.5.1.3. Media minimax sau *media intervalului,* notată x_I^0 , se determină, de asemenea, după ce variabilele aleatoare au fost aşezate în ordine crescătoare. Media minimax sau media intervalului se determină ca medie aritmetică a valorilor extreme:

$$x_I^o = \frac{1}{2}\left(x_{min}^0 + x_{max}^0\right) . \tag{2.52}$$

Aplicaţia 3

Să se calculeze *media minimax (media intervalului)* pentru datele avute în vedere la ***Aplicaţia 1.***

Rezultatul este : 143.2575 m

Comentarii

- Cei 3 parametri de estimare ai tendinţei centrale oferă răspunsuri diferite la o primă întrebare esenţială care se pune în *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice,* şi anume cea referitoare la determinarea *celei mai bune valori* dintr-un şir de variabile aleatoare (întâmplătoare).

În exemplul concret examinat, rezultatele nu diferă mult între ele, ceea ce se petrece, în principiu, în majoritatea cazurilor întâlnite în practică.

- Deşi media aritmetică nu îndeplineşte calitatea remarcabilă a medianei, aceasta rămâne cel mai folosit parametru de estimare a tendinţei centrale în cadrul *Teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice.*

2.5.1.4 Media teoretică $\boldsymbol{E}(x^0)$. Să admitem că cele n măsurători considerate până acum acoperă *întreaga populaţie* $(n \to \infty)$. Pentru dezvoltările ulterioare se vor avea în vedere un număr oarecare n_x de variabile aleatoare situate într-un interval infinitezimal dx. Din definiţia probabilităţii simple se poate scrie:

$$d\boldsymbol{P}_X = \frac{n_X}{n}, \tag{2.53}$$

de unde rezultă, prin utilizarea relaţiei (2.22):

$$n_x = d\boldsymbol{P}_x * n = n \ f(x^0)\, dx . \tag{2.54}$$

Evident, *pentru întreaga populaţie, reprezentată prin întregul segment* x^0, există un număr de $\left(x^0 * n_x\right)$ măsurători. Media acestora în cazul ideal presupus aici $(n \to \infty)$ este denumită în moduri diferite în limba română: *valoarea aşteptată / scontată, speranţă matematică* ş.a. **Bjerhammar** (1973) utilizează termenul de *medie teoretică* pe care îl vom prelua şi în acest manual, folosind pentru acesta notaţia $\tilde{x}^0$. Analog cu (2 - 48) se poate scrie prin urmare:

$$\tilde{x}^0 = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{x=-\infty}^{+\infty} n_x * x^0\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^0 \; n \; f\left(x^0\right)\, dx\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \, f\left(x^0\right) dx \;= \boldsymbol{E}(x^0), \qquad (2.55)$$

unde ***E*** *reprezintă operatorul mediei teoretice* în convenţia menţionată mai sus.

În cazul unei variabile aleatoare discrete, media teoretică este:

$$\tilde{x}^0 = \boldsymbol{E}\,(x^0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 \; f\left(x_i^0\right). \qquad (2.56)$$

Observaţie

În numeroase cazuri *media teoretică* $\tilde{x}^0$ este denumită şi *valoare reală* sau *valoare adevărată* a mărimii măsurate x^0 şi care va fi notată simplu cu x. Condiţia de egalitate menţionată nu se îndeplineşte însă întodeauna. Intre cele două mărimi există deseori un *factor de excentricitate* δ (denumit *bias* în limba engleză) - **Pelzer**, 1980 pg. 32:

$$\tilde{x}^0 = x + \delta. \qquad (2.57)$$

Atunci când *valoarea adevărată* şi *media teoretică* ale unei variabile aleatoare coincid, aceasta din urmă se numeşte *nedeformată*. *In Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice* se consideră, aproape fără excepţie, că variabilele aleatoare posedă această proprietate, deoarece, în caz contrar, calculele s-ar complica extrem de mult.In continuare se prezintă, fără demonstraţii (care necesită spaţii corespunzătoare şi pot fi urmărite în *manualele de statistică*) *unele reguli elementare de acţionare cu mediile teoretice*.

Se au în vedere variabilele aleatoare de forma x^0 cu densitatea de probabilitate $f(x^0)$ şi media teoretică a acestora $\tilde{x}^0$ definită de (2.55). Fie o altă variabilă aleatoare de forma y^0 dependentă de prima variabilă printr-o relaţie liniară oarecare:

$$y^0 = \varphi\;(x^0)\;. \qquad (2.58)$$

Atunci:

- densitatea de probabilitate $f\,(y^0)$ a variabilei aleatoare y^0 se calculează cu relaţia:

$$f\left(\boldsymbol{y^0}\right) = f\left(x^0\right)\frac{1}{\left(y^0\right)'} = f\left(x^0\right)\frac{dx}{dy}; \qquad (2.59)$$

- media teoretică $\tilde{y}^0$ se determină cu formula:

$$\tilde{y}^0 \;=\; \boldsymbol{E}\left(y^0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,\left(\boldsymbol{x^0}\right)\, f\left(x^0\right)\, \boldsymbol{dx}\;. \qquad (2.60)$$

Formula de mai sus este valabilă pentru orice situaţie în general. Pentru multe situaţii particulare, când funcţiile avute în vedere sunt oarecari, aplicarea formulei (2.52) este dificil de realizat. De

aceea în *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice* funcţiile care intervin sunt aduse, în prealabil, la o formă liniară (a se vedea şi **Anexa 4**), ceea ce aduce simplificări remarcabile în calcule.
Astfel, dacă se are în vedere o relaţie de forma:

$$y^0 = a + b\,x^0 \;, \tag{2.61}$$

unde variabilele x^0 şi y^0 au întodeauna valori mici, iar constantele a şi b sunt cunoscute sau uşor de determinat, formula generală (2.60) este înlocuită de o relaţie mult mai simplu de aplicat:

$$\tilde{y}^0 = \boldsymbol{E}\,(y^0) = a + b\;\tilde{x}^0. \tag{2.62}$$

Particularizare:

- Fie variabila aleatoare y^0 rezultatul unei sume de variabile aleatoare x_i^0 :

$$y^0 = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i^0 \;. \tag{2.63}$$

Media teoretică $\tilde{y}^0$ se obţine însumând mediile teoretice ale variabilelor aleatoare $\tilde{x}_i^0$:

$$\tilde{y}^0 = \boldsymbol{E}\left(y^0\right) = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{E}\left(x^0\right) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^0 \;. \tag{2.64}$$

- În situaţia în care variabila alearoare y^0 provine din produsul unor variabile aleatoare x_i^0 :

$$y^0 = \prod_{i=1}^{k} x_i^0 \;, \tag{2.65}$$

media teoretică $\tilde{y}^0$ se obţine prin multiplicarea, între ele, a mediilor teoretice ale variabilelor aleatoare $\tilde{x}_i^0$:

$$\tilde{y}^0 = \boldsymbol{E}\;\left(y^0\right) = \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{E}\left(x_i^0\right) = \prod_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^0 \;. \tag{2.66}$$

Observaţii

- Simbolul de multiplicare $\prod_{i=1}^{k} x_i^0$ are semnificaţia $x_1^0 * x_2^0 * \ldots * x_k^0$.
- O aplicaţie a relaţiilor deduse anterior va pune în evidenţă o proprietate remarcabilă a mediei aritmetice. Dacă se acceptă ipoteza ca *nici una* dintre variabilele aleatoare avute în vedere în relaţia (2.47) nu este afectată de erori sistematice, atunci toate acestea sunt caracterizate de aceeaşi medie teoretică:

$$\tilde{x}_1^0 = \tilde{x}_2^0 = \ldots \; \tilde{x}_n^0 = \tilde{x}^0. \tag{2.67}$$

Ca urmare, valoarea de aşteptare a mediei aritmetice (2.48) se va putea determina astfel:

$$\boldsymbol{E}\left(\overline{x}^0\right)=\boldsymbol{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^0\right\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}\left(x_j^0\right)=\frac{1}{n}*n*\tilde{x}^0=\tilde{x}^0. \qquad (2.68)$$

Cu alte cuvinte, atunci când în variabilele aleatoare x^0 nu există influenţe sistematice, media aritmetică $\overline{x}^0$ este o *estimare nedeformată* a mediei teoretice $\tilde{x}^0$ (a se vedea şi **3.1.1.**).

2.5.2 Parametrii împrăştierii

Aşa cum s-a specificat încă din primele paragrafe ale manualului, determinarea *tendinţei centrale* sau a *valorii mijlocii* sau a *celei mai bune valori* pentru o *serie* de variabile avută spre analiză (la limită pentru întreaga *populaţie*) nu constituie singurul obiectiv al *teoriei prelucrărilor măsurătorilor geodezice*. Este necesară, în aceeaşi măsură, cunoaşterea *împrăştierii* sau a *variabilităţii* mărimilor care compun seria considerată, în raport de tendinţa centrală. În limbajul utilizat în mod obişnuit în *teoria erorilor*, acest obiectiv este echivalent cu determinarea unor parametri care pot face estimări asupra *preciziei pe care o au fiecare dintre variabilele aleatoare* avute în vedere, precum şi *asupra preciziei lor în ansamblu*.

În acest paragraf se vor prezenta pentru început noţiunile şi definiţiile folosite frecvent în statistică, după care se vor face particularizări şi completări cu ceea ce s-a folosit şi se foloseşte încă, de o perioadă mare de timp, în *teoria erorilor.*

2.5.2.1. Amplitudinea. Dacă ne referim, în continuare, la şirul de variabile (2.47), *amplitudinea a* este definită de relaţia:

$$a = x^0_{max} - x^0_{min}. \qquad (2.69)$$

Dacă ne referim concret la măsurătorile avute în vedere în cele 3 aplicaţii anterioare, amplitudinea a = 0.015 .

Noţiunii de *amplitudine* din statistică îi corespunde noţiunea de *ecart* die teoria erorilor, la care ne-am referit în *1.1.2.2.*

2.5.2.2. Dispersia (varianţa). Abaterea standard. Aşa cum media aritmetică este parametrul principal folosit pentru estimarea tendinţei centrale, dispersia este parametrul cel mai utilizat pentru estimarea împrăştierii.

Dispersia sau varianţa empirică a unei selecţii, $\boldsymbol{D}(x^0)$, notată s_0^2 , este reprezentată de media pătratelor abaterilor acestora faţă de media lor teoretică. Considerând aceeaşi selecţie (2.47) rezultă prin definiţie:

$$s_o^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^0-\tilde{x}\right)^2}{n}. \qquad (2.70)$$

Abaterea standard empirică, notată s_0 , a aceleaşi selecţii este reprezentată de rădăcina pătrată a dispersiei:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^0 - \tilde{x}\right)^2}{n}} \quad . \tag{2.71}$$

Prin definiţie, atât dispersia cât şi abaterea standard empirice au numai semnul pozitiv.

Atunci când $n \Rightarrow \infty$, deci atunci când se analizează *întreaga populaţie*, se obţin *varianţa (dispersia) teoretică* şi respectiv *abaterea standard teoretică:*

$$\begin{aligned} s_0^2 &\Rightarrow \sigma_0^2 \quad ; \\ s_0 &\Rightarrow \sigma_o \quad . \end{aligned} \tag{2.72}$$

În multe domenii este suficientă numai determinarea propriu-zisă a parametrilor globali (2.70) şi (2.71). În teoria prelucrării măsurătorilor geodezice este necesară o analiză de amănunt a componentelor acestora. Pentru a se da, în continuare, expunerii un caracter mai apropiat de activitatea practică din geodezie, se va înlocui vectorul teoretic (2.47) cu un vector al măsurătorilor, notat $\mathbf{m}^0$:

$$\mathbf{m}^0 = \left[m_1^0, m_2^0, ..., m_n^0\right]^T \quad . \tag{2.73}$$

Raportând măsurătorile m_i^0 (i = 1, 2, … , n) la media teoretică $\tilde{m}^0$ (care îndeplineşte aici rolul valorii de referinţă din formula (1.1)) se obţin *erorile adevărate* sau *erorile teoretice*, pe care le vom nota ε_i :

$$\varepsilon_i = m_i^0 - \tilde{m}^0 \; ; \quad i = 1, 2, \dots , n \; . \tag{2.74}$$

Aceste mărimi au un caracter teoretic, abstract, deoarece valoarea de referinţă $\tilde{m}^0$ rămâne necunoscută din punct de vedere practic. Scriem relaţii (2.74) mai dezvoltat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= m_1^0 - \tilde{m}^0; \\ \varepsilon_2 &= m_2^0 - \tilde{m}^0; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \varepsilon_n &= m_n^0 - \tilde{m}^0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Însumând relaţiile (2.74) rezultă:

$$[\varepsilon] = \left[m^0\right] - n\tilde{m}^0. \tag{2.76}$$

Din definiţia mediei aritmetice (2.48) se poate scrie :

$$\left[m^0\right] = n\overline{m}^0 , \tag{2.77}$$

astfel încât relaţia (2.76) devine:

$$[\varepsilon] = n\left(\overline{m}^0 - \tilde{m}^0\right). \tag{2.78}$$

Expresia din ultima paranteză este *eroarea teoretică a mediei aritmetice*, având formă similară cu oricare dintre relaţiile (2.74). Rezultă:

$$[\varepsilon] = n\varepsilon_{\overline{m}^0}. \tag{2.79}$$

Prin definiţie, care are originile în lucrările lui **Gauss**, *varianţa empirică* obţinută din utilizarea *erorilor teoretice* se deduce din (2.70) fiind *media pătratelor erorilor teoretice*:

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{1}{n}\ \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}\ . \tag{2.80}$$

Aşa cum s-a mai menţionat, atunci când $n \to \infty$ (deci când se analizează întreaga *populaţie*), *varianţa empirică* s_0^2 este înlocuită de *varianţa teoretică* notată σ_0^2 , care mai este denumită şi *dispersia* variabilei aleatoare m^0 şi se notează $\boldsymbol{D}^2(m^0)$:

$$\boldsymbol{D}^2(m^0) = \sigma_0^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\varepsilon^T\varepsilon\right). \tag{2.81}$$

Pentru *varianţa teoretică* sau *dispersia* este util să se mai reţină şi următoarele posibilităţi de exprimare, care se pot verifica cu uşurinţă din relaţiile expuse anterior:

$$\sigma_0^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{E}((m_i^0 - \tilde{m}^0)^2) = \boldsymbol{E}(m^0) - (\tilde{m}^0)^2\ . \tag{2.82}$$

Este necesară sublinierea unei proprietăţi a erorilor reale. Plecând de la relaţia de definiţie (2.70) rezultă pentru oricare dintre erorile reale:

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon_i) = \boldsymbol{E}(m_i^0) - \boldsymbol{E}(\tilde{m}^0) = \tilde{m}^0 - \tilde{m}^0 = 0\ , \tag{2.83}$$

sau :

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon_i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\varepsilon_i = 0. \tag{2.84}$$

Ecuaţia de mai sus pune în evidenţă faptul că $\boldsymbol{E}(\varepsilon_i)$ nu depinde de mărimea propriu – zisă a erorii adevărate ε_i , adică de precizia de măsurare. Prin urmare $\boldsymbol{E}(\varepsilon_i)$ nu poate fi folosit ca estimator de precizie.

Relaţia (2.79) ridicată la pătrat poate fi scrisă detaliat sub forma:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)^2 = n^2\varepsilon_{\overline{m}^0}^2. \tag{2.85}$$

Termenul din partea stângă a relaţiei de mai sus are rezultatul exact:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n)^2 &= \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+...+\varepsilon_n^2+\\ &+2(\varepsilon_1\varepsilon_2+...+\varepsilon_1\varepsilon_n+\varepsilon_2\varepsilon_3+...+\varepsilon_2\varepsilon_n+...+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)\ .\end{aligned} \tag{2.86}$$

Deoarece erorile teoretice au caracter aleator, acestea îndeplinesc criteriile din **2.4.,** astfel încât paranteza din membru drept al relaţiei (2.86 tinde către zero. De această proprietate a erorilor teoretice se va face uz în mai multe rânduri în manual.

În aceste condiţii, din ultimile relaţii se obţine:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[\varepsilon^2]=n^2\varepsilon^2_{\overline{m}^0}\ . \qquad (2.87$$

Rezultă următoarele relaţii între *varianţa mediei aritmetice* şi *varianţa empirică*, notată cu s_0^2 în relaţiile (2.70 şi 2.80):

$$\varepsilon^2_{\overline{m}^0}=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}=\frac{s_0^2}{n}\ . \tag{2.88}$$

Abaterea standard empirică, notată cu s_0 în relaţia (2.71) este denumită în Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice *eroarea medie a unei singure măsurători*, fiind reprezentată de radicalul de ordinul doi din varianţa empirică corespondentă:

$$s_0=\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\ . \tag{2.89}$$

Deoarece *erorile teoretice* ε nu sunt determinabile, formulele (2.80) şi (2.89) au un caracter teoretic, abstract. De aceea, pentru aplicaţii practice este necesară deducerea, în continuare, a unor formule în care să se opereze cu alte tipuri de erori, care pot fi calculate.

Diferenţele dintre măsurătorile individuale m_j^o, (j = 1, 2, … , n) şi media aritmetică $\overline{m}^0$ se numesc *erori aparente :*

$$\mathbf{e}=\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ .\\ .\\ .\\ e_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1^0-\overline{m}^0\\ m_2^0-\overline{m}^0\\ ...\\ m_n^0-\overline{m}^0 \end{bmatrix}=\mathbf{i}\ \mathbf{m}^0-\overline{m}^0. \tag{2.90}$$

Observaţii

- Trecerea de la erorile aparente e_i, la corecţiile aparente v_i se realizează doar prin schimbarea semnelor: $e_i = -\ v_i$.

• In *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice* corecţiile aparente intervin în diverse stadii ale prelucrărilor, cum ar fi:

* în aşa numitele *prelucrări locale*, care au loc, de exemplu, la compensarea în staţie a observaţiilor unghiulare, sau la prelucrarea măsurătorilor efectuate repetat asupra unei mărimi (distanţe, diferenţe de nivel ş. a. m. d.);
* la *prelucrarea măsurătorilor efectuate în reţelele geodezice,* în care pot interveni mai multe tipuri de măsurători.

In lucrări mai dezvoltate (**Pelzer,** 1980, **Ghiţău**, 1983 ş.a.) pentru cele douã tipuri de corecţii aparente se folosesc notaţii diferite v' şi respectiv v, pentru a puncta deosebirile esenţiale între aceste două categorii de corecţii aparente. Pentru a nu încărca în mod suplimentar manualul de faţã cu notaţii prea diverse, *corecţiile aparente* vor fi notate întotdeauna cu v, lăsând cititorul să facă adaptările care se impun.

Erorile aparente definite prin relaţiile (2.90) îndeplinesc proprietatea general valabilă pentru mărimile care se calculează ca abateri faţă de media aritmetică. Insumând pe rând mărimile din aceste relaţii rezultă:

$$[e]=[m^0]-n*\overline{m}_0=[m^0]-[m^0]=0. \qquad (2.91)$$

Desigur, relaţia de mai sus este îndeplinită şi de suma corecţiilor aparente: $[v]=0$.

Diferenţa dintre *eroarea teoretică* ε_j , definită cu relaţia (2.74) şi *eroarea aparentă* e_j , definită cu relaţia (2.90) este:

$$\varepsilon_j-e_j=m_j^0-\tilde{m}^0-m_j^0+\overline{m}^0=\overline{m}^0-\tilde{m}^0=e_{\overline{m}^0}, \qquad (2.92)$$

sau în detaliu:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1-e_1=\varepsilon_{\overline{m}^0}\,; && \varepsilon_1=\varepsilon_{\overline{m}^0}+e_1\,;\\
&\varepsilon_2-e_2=\varepsilon_{\overline{m}^0}\,; && \varepsilon_2=\varepsilon_{\overline{m}^0}+e_2\,;\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots && \Rightarrow\ \dots\ \dots\ \dots\\
&\varepsilon_n-e_n=\varepsilon_{\overline{m}^0}\,; && \varepsilon_n=\varepsilon_{\overline{m}^0}+e_n\,.
\end{aligned} \qquad (2.83)$$

Prin ridicarea la pătrat a ultimelor relaţii şi însumarea corespondentă a rezultatelor se obţine:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[ee]+2\varepsilon_{\overline{m}0}[e]+n\varepsilon^2_{\overline{m}0}\,. \qquad (2.94$$

Deoarece erorile aparente îndeplinesc proprietatea (2.91) ultima formulă devine:

$$[\varepsilon\varepsilon]=[ee]+n\varepsilon^2_{\overline{m}0}\,. \qquad (2.95)$$

Dacă se au în vedere, succesiv, formulele (2.87) şi (2.88), relaţia de mai sus se poate scrie şi sub forma:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [ee] + s_0^2. \tag{2.96}$$

Introducând acest rezultat în relaţia (2.89) se obţine după ridicarea la pătrat:

$$s_0^2 = \frac{[ee]}{n} + \frac{s_0^2}{n}, \tag{2.97}$$

de unde se obţine:

$$s_0^2 = \frac{[ee]}{n-1}. \tag{2.98}$$

Din relaţiile (2.98) şi (2.89) şi împreună cu observaţia $(e_i = -v_i)$ se pot scrie următoarele egalităţi:

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[ee]}{n-1} = \frac{[vv]}{n-1}. \tag{2.99}$$

Relaţiile de mai sus au o relevanţă specifică în calculele practice, unde se folosesc curent corecţiile aparente v sau v', după caz, şi nu erorile e.

Prin urmare, relaţiile folosite în *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice* sunt:

- *varianţa empirică*:

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{1}{n-1}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\,; \tag{2.100}$$

- *abaterea standard empirică* numită în mod curent *eroarea medie (pătratică) a unei singure măsurători:*

$$s_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{2.101}$$

În lucrări mai dezvoltate de *Teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate* (**Botez**, 1961, pg. 44) se arată că raportul dintre eroarea medie a unei singure măsurători s_0 şi eroarea medie probabilă E_s este:

$$\frac{s_0}{E_s} = \frac{3}{2}. \tag{2.102}$$

Prin urmare, estimarea prin eroarea medie s_0 a preciziei de măsurare este mai acoperitoare decât prin eroarea medie probabilă E_s.

Ecartul maxim Δ_{max} definit în *1.1.2.2.* specific unui anumit şir de măsurători trebuie să fie mai mic decât toleranţa. În lucrările mai vechi (**Botez**, 1961, **Wolf**, 1968 ş.a..) s-a utilizat în acest scop relaţia:

$$\Delta_{max} \leq \text{toleranţa} = 3s_0 \ , \tag{2.103}$$

care deşi are un caracter empiric, a avut şi mai are încă o aplicabilitate remarcabilă.

Eroarea medie a mediei aritmetice

Folosind formula unei funcţii de mărimi măsurate direct (a se vedea şi paragraful 3.1.1), rezultă formula de determinare a *erorii medii a mediei aritmetice*:

$$s_{\bar{m}_0} = \frac{s_0}{\sqrt{n}} \tag{2.104}$$

sau mai în detaliu:

$$s_{\bar{m}_0} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \ . \tag{2.105}$$

Prin urmare, raportul r dintre $s_{\bar{m}_0}$ şi s_0 este :

$$r = \frac{s_{\bar{m}_0}}{s_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} \ , \tag{2.106}$$

ceea ce ne oferă unele concluzii de ordin practic, ce pot fi urmărite şi în Fig. 6.

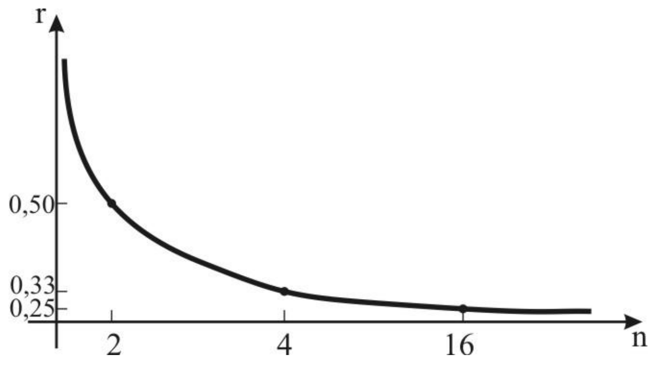

Fig. 6. Reprezentarea grafică a raportului r

Descreşterea abaterii standard empirice a mediei aritmetice $s_{\bar{m}_0}$ în raport de cea a unei singure măsurători s_0 este evident funcţie de numărul de măsurători n. Dar, această descreştere este foarte pronunţată doar pentru situaţia când n este mic, devenind din ce în ce mai puţin semnificativă pe măsură ce numărul de măsurători n creşte. Din această observaţie se desprinde concluzia că creşterea numărului de măsurători peste anumite limite nu mai aduce îmbunătăţiri relevante în valoarea mediei aritmetice.

Pentru realizarea acestui deziderat este mult mai eficientă creşterea preciziei de măsurare propriu-zisă (o eroare s_0 cât mai mică) ceea ce se realizează prin utilizarea unei aparaturi mai performante sau / şi a unui personal mai bine pregătit ş.a.m.d.

Aplicaţia 4

Se consideră măsurătorile repetate asupra unui distanţe, cu care s-a efectuat ***Aplicaţia 1.*** Acestea sunt trecute în tabelul 1 (coloana 2). Se cere să se determine media lor aritmetică şi principalii indicatori de precizie examinaţi în acest capitol

Tabelul 1. Calculul mediei aritmetice şi al indicatorilor de precizie uzuali

Nr. crt.	Măsurători m_i^0 [m]	Corecţii aparente v_i [mm]	Indicatori de precizie
1	2	3	4
1.	143.255	2.3	Abaterea standard empirică (eroarea medie (pătratică)) a unei singure măsurători (2.101): $s_0 = 4.7$ mm
2.	143.257	0.3	Eroarea medie probabilă a unei singure măsurători (2.102): $E_s = 3.1$ mm
3.	143.259	-1.7	Eroarea medie a mediei aritmetice (2.105) $s_{\overline{m}^0} = 1.8$ mm
4.	143.255	2.3	Raportul r (2.106): $r = 0.4$
5.	143.250	7.3	Toleranţa (2.103): $3s_0 = 14.1$ mm
6.	143.260	-2.7	Ecartul maxim din şirul de măsurători: $\Delta_{max} = 15$ mm
7.	143.265	-7.7	*Concluzie: măsurătoarea se încadrează în toleranţa specifică (2.103):* $\Delta_{max} < 3s_0$
	$\overline{m_0} = 143.2573$	$[v] = 0.1$ mm	

2.6. Momentele unei repartiţii

În continuare se va avea în vedere o serie statistică asemănătoare cu seria (2.47), care conţine n componente, a căror frecvenţe relative sunt notate cu: $h_i = \dfrac{n_i}{n}$. Se numeşte *moment de ordinul* k în raport cu o valoare de referinţă x_0^0 , media aritmetică a puterilor k a abaterilor valorilor seriei statistice considerate faţă de o valoare de referinţă x_0^0 (**Ceauşescu,** 1981) . Exponentul k se numeşte ordinul momentului.

Atunci cînd valoarea de referinţă este $x_0^0 = 0$, momentul va fi notat m_k şi nu va fi însoţit de niciun atribut suplimentar . Dacă valoarea de referinţă este $x_0^0 = \bar{x}^0$ (media aritmetică) momentul va fi notat M_k şi se va numi *moment centrat*. Se prezintă în continuare câteva exemple:

$$m_1 = \sum_{i=1}^{n} h_i\, x_i^0 = \bar{x}^0 \quad (2.107) \quad ; \qquad M_1 = \sum_{i=1}^{n} h_i\, (x_i^0 - \bar{x}^0) = 0 \quad ; \qquad (2.108)$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^{n} h_i\, (x_i^0)^2 \quad (2.109) \quad ; \qquad M_2 = \sum_{i=1}^{n} h_i\, (x_i^0 - \bar{x}^0)^2 = s_0^2 \quad . \qquad (2.110)$$

Se constată că *momentul de ordinul 1 este media aritmetică* a seriei statistice. *Momentul centrat de ordinul 1 este nul* (suma abaterilor valorilor unui şir faţă de media aritmetică). *Momentul centrat de ordinul 2 este dispersia seriei*. Se prezintă demonstrarea uneia dintre afirmaţiile de mai sus:

$$M_1 = \frac{n_1}{n}\left(x_1^0 - \bar{x}^0\right) + \frac{n_2}{n}\left(x_2^0 - \bar{x}^0\right) + \ldots + \frac{n_n}{n}\left(x_n^0 - \bar{x}^0\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(n_1 x_1^0 + n_2 x_2^0 + \ldots + n_n x_n^0\right) - \frac{\bar{x}^0}{n}\left(n_1 + n_2 + \ldots n_n\right) = \bar{x}^0 - \bar{x}^0 = 0 \ .$$

2. 7. Vector de mărimi întîmplătoare (aleatoare)

În acest capitol s-au avut în vedere, până acum, măsurători repetate asupra *unei singure mărimi*. În activitatea practică intervin, de regulă, măsurători repetate, corespunzător, asupra unui *număr oarecare* de mărimi, repetare care se poate face *simultan* (de către mai mulţi operatori) sau *succesiv* de către acelaşi operator. *Rezultă astfel un vector de mărimi întâmplătoare (aleatoare) care este însoţit de vectorul erorilor aleatoare corespondente.*

Proprietăţile, noţiunile de bază şi consecinţele care s-au dedus în paragrafele anterioare se vor generaliza şi completa, după caz, în continuare , în această nouă ipoteză.

2.7.1. Principiul metodei celor mai mici pătrate

Se presupune că s-au măsurat n mărimi (de exemplu distanţe) de un număr oarecare de ori.

Fiecare mărime măsurată are o anumită probabilitate infinitesimală de producere de forma (2.32). Este util ca în continuare să se introducă totuşi unele modificări şi particularizări faţă de situaţia teoretică avută în vedere în **2.4.1.** :

- trecerea de la elemente infinit mici $d\boldsymbol{P}$ la elemente finite $\Delta\boldsymbol{P}$;
- operarea cu *corecţii aparente* v în locul erorilor x $\left(v^2 = x^2\right)$;

- acceptarea, într-un stadiu iniţial, că măsurătorile sunt de aceeaşi precizie $(h_1 = h_2 = ... = h_n = h)$.

În aceste ipoteze, relaţia (2.16) se poate generaliza pentru oricare dintre cele n măsurători avute în vedere, rezultînd:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{P}_1 &= C\, e^{-h^2 v_1^2} \Delta v_1 \ ; \\ \Delta \boldsymbol{P}_2 &= C\, e^{-h^2 v_1^2} \Delta v_2 \ ; \\ \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\ \Delta \boldsymbol{P}_n &= C\, e^{-h^2 v_n^2} \Delta v_n \ . \end{aligned} \tag{2.111}$$

Probabilitatea intersecţiei evenimentelor elementare, considerate independente, se poate determina prin generalizarea relaţiei (2.25), introducând şi ipoteza :

$$\Delta v_1 = \Delta v_2 = \ldots \Delta v_n = \Delta v \ , \tag{2.112}$$

astfel încât rezultă :

$$\Delta \boldsymbol{P} = \Delta \boldsymbol{P}_1 * \Delta \boldsymbol{P}_2 * \ldots * \Delta \boldsymbol{P}_n = C^n e^{-h^2 \left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right)} \Delta v \, , \tag{2.113}$$

sau:

$$\Delta \boldsymbol{P} = \frac{C^n \Delta v}{e^{h\left(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2\right)}} \ . \tag{2.114}$$

Probabilitatea intersecţiei evenimentelor $\Delta \boldsymbol{P}$ prezintă un maxim atunci când:

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = [vv] \rightarrow \min im \, , \tag{2.115}$$

adică atunci când *suma pătratelor corecţiilor / erorilor este minimă.*

Acesta este principiul de bază utilizat în *Teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate* şi care a fost preluat şi în *Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice*.

Dacă se are în vedere şi relaţia (2.46) prin care parametrului h^2 i s-a atribuit rolul de pondere p, relaţia (2.115) se poate generaliza sub forma :

$$[pvv] \rightarrow \min im \, . \tag{2.116}$$

Consecinţă

Deoarece corecţiile aparente v se determină în raport de media aritmetică, se poate afirma că *în cazul măsurătorilor directe repetate asupra unor mărimi, mediile aritmetice corespondente, reprezintă valorile cele mai probabile ale acestora.*

2.7.2. Covarianţă. Corelaţii

Pentru simplificarea expunerii se vor examina în continuare situaţia măsurării repetate (de un acelaşi număr de ori, notat cu n) dar simultane, în puncte geodezice diferite, de către operatori diferiţi şi desigur cu instrumente diferite numai a două mărimi aleatoare, notate m_1 şi respectiv m_2 care pot fi scrise concentrat în vectorul **m** :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} . \qquad (2.117)$$

Rezultatul măsurătorilor poate fi concentrat, de asemenea, într-un vector :

$$\mathbf{m}^{0^T} = \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_1^0)^T \\ (\mathbf{m}_2^0)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^0, m_{12}^0, ..., m_{1n}^0 \\ m_{21}^0, m_{22}^0, ..., m_{2n}^0 \end{bmatrix} . \qquad (2.118)$$

Vectorul mediilor teretice se poate forma ţinând seama de definiţiile şi notaţiile anterioare:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{m}^0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}(\mathbf{m}_1^0) \\ \boldsymbol{E}(\mathbf{m}_2^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{2j}^0 \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{2j}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_1^0 \\ \\ \tilde{m}_2^0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{m}}^0 . \qquad (2.119)$$

- În ipoteza existenţei mediilor şi erorilor teoretice, notate $\tilde{\mathbf{m}}$ şi respectiv $\boldsymbol{\varepsilon}$, se poate scrie în continuare:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \\ \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^0 - \tilde{m}_1^0 & m_{12}^0 - \tilde{m}_1^0 & ... & m_{1n}^0 - \tilde{m}_1^0 \\ ... & & ... & ... \\ m_{21}^0 - \tilde{m}_2^0 & m_{22}^0 - \tilde{m}_2^0 & ... & m_{2n}^0 - \tilde{m}_2^0 \end{bmatrix} . \qquad (2.120)$$

Generalizând noţiunea de *varianţă* sau *dispersie a unei singure măsurători* (2.82) la noţiunea de *varianţă a vectorului* $\mathbf{m}^0$, numită matricea de covarianţă, şi notată $\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0}$, care are în acest caz particular simplu numai două componente, şi ţinând seama în continuare şi de definiţiile (2.75) rezultă în cazul examinat:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0} = \boldsymbol{E}((\mathbf{m}^0 - \tilde{\mathbf{m}}^0)(\mathbf{m}^0 - \tilde{\mathbf{m}}^0)^T) = \boldsymbol{E}((\mathbf{m}^0 - \boldsymbol{E}(\mathbf{m}^0))(\mathbf{m}^0 - \boldsymbol{E}(\mathbf{m}^0)^T = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}). \qquad (2.121)$$

Dacă s au în vedere ultimele două serii de relaţii, se obţine :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0} = \boldsymbol{E}\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \\ \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \right\} = \boldsymbol{E}\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} \right\} . \qquad (2.122)$$

Analog ca în relaţiile (2.82) , în formula de mai sus se poate scrie:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^2) = \sigma_{01}^2 ;$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^2) = \sigma_{02}^2 , \qquad (2.123)$$

ceea ce înseamnă că *elementele de pe diagonala matricii* $\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0}$ *sunt varianţele* celor doi vectori de măsrimi aleatoare. *Ceilalţi termeni* ai matricii $\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0}$ sunt mărimi noi introduse şi au primit denumirea de *covarianţe* şi se referă întotdeauna la două marimi aleatoare (în cazul nostru: $\mathbf{m}_1^0$ şi respectiv $\mathbf{m}_2^0$). Analog ca în (2.123) vom scrie:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \sigma_{12}^2 . \qquad (2.124)$$

Importanţa covarianţei se poate observa cu mai multă claritate, dacă se introduce noţiunea de *coeficient de corelaţie* ρ_{12} :

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{01} * \sigma_{02}} . \qquad (2.125)$$

Datorită inegalităţii **Cauchy – Schwarz** (**Niemeier**, 2002, pg. 21) :

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\boldsymbol{\varepsilon}_2))^2 = (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_1))^2 = \boldsymbol{E}(\varepsilon_1^2) * \boldsymbol{E}(\varepsilon_1^2) , \qquad (2.126)$$

rezultă pentru covarianţă :

$$(\sigma_{12})^2 = (\rho_{12} * \sigma_1 * \sigma_2)^2 \leq \sigma_1^2 * \sigma_2^2 . \qquad (2.127)$$

Ultima relaţie este îndeplinită numai atunci când $\rho_{12} \leq 1$, astfel încât se poate defini domeniul de variabilitate *coeficientului de corelaţie* :

$$-1 \leq \rho_{12} \leq +1. \qquad (2.128)$$

Cu aceste noi notaţii, matricea $\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0}$ se poate scrie, atunci când se au în vedere numai doi vectori de mărimi aleatoare, şi sub forma:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m}^0\mathbf{m}^0} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} . \qquad (2.129)$$

- Coeficientul de corelaţie ρ_{12} evidenţiază *dependenţa statistică* (numită şi *dependenţă stochastică*) între cele 2 mărimi avute în vedere. Corelaţiile sau dependenţele între mărimile originare trebuie cunoscute de executantul prelucrării măsurătorilor geodezice. Acestea au însă uneori un aspect complex (de natură fizică sau matematică) şi determinarea riguroasă a acestora (cu relaţii de forma (2.125) – în care intervin numai *mărimi teoretice*) este practic imposibilă. Asupra *corelaţilori stochastice* se va reveni şi în paragraful următor, precum şi la cursul de *Geodezie* (**Ghiţău**, 1983).

Din acest motiv, în practic toate situaţiile care intervin în activitatea curentă este suficientă determinarea *coeficientului de corelaţie empiric*:

$$\rho_{12} \approx r_{12} = \frac{s_{12}}{s_{01} * s_{02}} \quad , \qquad (2.130)$$

în care se operează cu mărimi *medii empirice* $\overline{m}$ şi respectiv *erori aparente* v .

- Dacă mărimile aleatoare sunt considerate *independente statistic (stochastic),* relaţia (2.124) devine :

$$\sigma_{12}^2 = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^T) * \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) , \qquad (2.131)$$

şi luând în consideraţie şi formula (2.83) rezultă :

$$\sigma_{12}^2 = 0 \;\; ; \;\; \rho_{12} = 0 \;\; . \qquad (2.132)$$

Covarianţa empirică necesară în relaţia (2.130) se calculează cu o relaţie asemănătoare cu (2.100) :

$$\mathbf{s}_{12} = \frac{1}{\mathbf{n} - 1} \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \;\; . \qquad (2.133)$$

Aplicaţia 5

Se consideră o altă distanţă $\mathbf{m}_2^0$, măsurată simultan cu distanţa $\mathbf{m}_1^0$ (şi într-o zonă apropiată) utilizată la aplicaţiile anterioare. Rezultatele măsurătorilor sunt prezentate în *Tabelul 2* . Se cere determinarea coeficientului de corelaţie empiric r_{12} .

Tabelul 2. Calculul coeficientului de corelaţie empiric

Nr. crt.	Măsurătoarea $\mathbf{m}_1^0$ [m]	Măsurătoarea $\mathbf{m}_2^0$ [m]	Corecţii aparente $\mathbf{v}_1$ [mm]	Corecţii aparente $\mathbf{v}_2$ [mm]	Calcule. Rezultate
1	143.255	230.175	2.3	4.4	• *Abaterile standard empirice* (2.101): s_{01} = 4.7 mm s_{02} = 3.6 mm • *Covarianţa empirică* (2.133): s_{12} = 7.9 mm^2 • *Coeficientul de corelaţie empiric* (2.130) : r_{12} = 0.46
2	143.257	230.173	0.3	2.4	
3	143.259	230.169	- 1.7	- 1.6	
4	143.255	230.165	2.3	-5.6	
5	143.250	230.174	7.3	3.4	
6	143.260	230.170	- 2.7	- 0.6	
7	143.265	230.168	- 7.7	- 2.6	
	$\overline{m}_1^0$ =143.2573	$\overline{m}_2^0$ =230.1706	$[v_1]$=0.1	$[v_2]$=0.0	

Observaţii

- Deoarece covarianţa s_{12} se calculează în funcţie de ordinea în care au fost înregistrate măsurătorile efectuate $\mathbf{m}_1^0$ şi respectiv $\mathbf{m}_2^0$, orice modificare în această ordine conduce la determinarea unui alt coeficient de corelaţie empiric. Este de presupus că ipoteza simultaneităţii măsurătorilor elementare este păstrată prin această ordine de înregistrare.
- Coeficientul de corelaţie obţinut indică, printre altele, o dependenţă a măsurătorilor efectuate de condiţiile meteorologice existente în momentul măsurării, şi care sunt aceleaşi pentru cele 2 măsurători, atunci când zona nu este prea extinsă

2.7.3 Modelul stochastic al prelucrării măsurătorilor geodezice

2.7.3.1. Modelul stochastic al măsurătorilor dependente statistic (stochastic). Se consideră vectorul de mărimi întîmplătoare (aleatoare) oarecari:

$$\mathbf{m}^0 = \left[\mathbf{m}_1^0, \mathbf{m}_2^0, ..., \mathbf{m}_k^0\right]^T \quad , \tag{2.134}$$

în care sunt cuprinşi k vectori de forma (2.119), care conţin, fiecare, măsurători presupuse pentru început dependente statistic (stochastic).

Mediile teoretice ale acestor mărimi se deduc cu relaţii asemănătoare cu (2.55) şi pot fi prezentate, de asemenea, sub formă vectorială:

$$\tilde{\mathbf{m}}^0 = \boldsymbol{E}(\mathbf{m}^0) = \left[\tilde{\mathbf{m}}_1^0, \tilde{\mathbf{m}}_2^0, \ldots, \tilde{\mathbf{m}}_{\mathbf{k}}^0\right]^{\mathbf{T}}, \qquad (2.135)$$

unde:

$$\tilde{m}_j^0 = \boldsymbol{E}(\mathbf{m}_j^0), \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2.136)$$

De asemenea, *vectorul erorilor teoretice* are în acest caz forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathbf{T}}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}\right]^{\mathbf{T}}, \qquad (2.137)$$

reprezentând totalitatea acestor erori, care se determină cu relaţii de forma (2.74). *Matricea de varianţă - covarianţă teoretică* $\mathbf{C}_{\mathbf{m^0 m^0}}$ a măsurătorilor m^0 conţinute în vectorul (2.134) este definită analog cu (2.121), (2.122) şi în final cu (2.129):

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m^0 m^0}} = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \ldots & \rho_{1k}\sigma_1\sigma_k \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \ldots & \rho_{2k}\sigma_2\sigma_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{k1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{k2}\sigma_k\sigma_2 & \ldots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}, \qquad (2.138)$$

unde:

$\boldsymbol{\sigma}_i^2$ - *varianţa teoretică* sau *dispersia* măsurătorii $\mathbf{m}_{\mathbf{i}}^0$, care reprezintă, aşa cum s-a arătat măsura împrăştierii variabilei aleatoare $\mathbf{m}_{\mathbf{i}}^0$:

Deoarece mărimile teoretice nu pot fi determinate practic, acestea sunt înlocuite cu *estimatori empirici* (**Pelzer**, 1980, pg. 38) :

$$\sigma_{\mathbf{i}}^2 = \boldsymbol{E}\ (\varepsilon_{\mathbf{i}}^2) = \boldsymbol{E}\ (s_i^2)\ , \qquad (2.139)$$

prin care se arată că *varianţa teoretică* poate fi estimată prin *varianţa empirică* a măsurătorii considerate ;

ρ_{ij} - *coeficient de corelaţie* (sau *de dependenţă stochastică*) *teoretic* între măsurătorile m_i^0 şi m_j^0 la care ne-am referit în amănunt în paragraful anterior:

σ_{ij} - *covarianţa teoretică* dintre măsurătorile m_i^0 şi m_j^0 , care ,de asemenea, a fost examinată anterior:

σ_i - *abaterea standard teoretică* a măsurătorii m_i^0.

Deoarece $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, matricea $\mathbf{C}_{\mathbf{m^0 m^0}}$ este simetrică faţă de diagonală.

Dacă se înlocuieşte coeficientul de corelaţie, exprimat prin relaţia (2.125) în matricea (2.138) rezultă o altă expresie a *matricii de varianţă-covarianţă* sau *dispersia măsurătorilor considerate* :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m^0m^0}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \dots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}, \tag{2.140}$$

Aşa cum s-a menţionat în paragraful anterior, coeficientul de corelaţie :

$$-1 \le \rho_{ij} \le 1, \tag{2.128}$$

are valorile limită ± 1 , care sunt specifice situaţiilor în care între variabile aleatoare ε_i şi ε_j există o dependenţă liniară (ca de exemplu $\varepsilon_i = \pm$ a ε_j, unde a este o constantă oarecare).

Asamblul coeficienţilor ρ_{ij} poate fi grupat în *matricea de corelaţie* $\mathbf{R}_{\mathbf{m^0m^0}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{m^0m^0}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.141}$$

În numeroase situaţii se operează cu matricea *cofactorilor măsurătorilor* $\mathbf{Q}_{\mathbf{m^0m^0}}$ care se deduce din matricea de varianţă - covarianţă a acestora prin împărţire cu o constantă σ_0^2:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{m^0m^0}} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{C}_{\mathbf{m^0m^0}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \dots & \mathbf{Q}_{1k} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \dots & \mathbf{Q}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Q}_{k1} & \mathbf{Q}_{k2} & \dots & \mathbf{Q}_{kk} \end{bmatrix}. \tag{2.142}$$

Constanta σ_0^2 este denumită uzual *varianţa teoretică a unităţii de pondere*, din motive care se vor expune imediat.

Coeficienţii de corelaţie teoretică, definiţi de (2.128) se pot calcula şi cu relaţia:

$$\rho_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}, Q_{jj}}}; \quad \begin{cases} i,j = 1, 2, \dots, n \\ i \ne j \end{cases}. \tag{2.143}$$

Matricea ponderilor $\mathbf{P}_{\mathbf{m^0m^0}} \equiv \mathbf{P}$ este matricea inversă a matricii cofactorilor măsurătorilor:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{m^0m^0}}^{-1}. \tag{2.144}$$

Se poate demonstra că toate cele trei matrici menţionate mai înainte:

$\mathbf{C}_{\mathbf{m^0 m^0}}, \mathbf{Q}_{\mathbf{m^0 m^0}}, \mathbf{P}$ sunt pozitiv definite, astfel încât matricea inversă (2.144) se poate calcula întodeauna.

Cele trei matrici menţionate mai sus formează o componentă principală a *modelului stochastic al prelucrării măsurătorilor geodezice.*

Cealaltă componentă a modelului stachastic este reprezentată de o condiţie de forma (2.116) care dirijează întreaga prelucrare. In cazul măsurătorilor geodezice *dependente stochastic*, care au fost examinate în cele de mai sus, această condiţie are forma:

$$\mathbf{v^T P v} \rightarrow \min\mathbf{im}. \tag{2.145}$$

2.7.3.2. Modelul stochastic al prelucrării măsurătorilor geodezice independente şi de precizii diferite. Corelaţiile sau dependenţele de natură stochastică dintre măsurătorile geodezice care urmează a fi prelucrate se pot clasifica în:

- corelaţii de natură fizică;
- corelaţii de natură matematică.

Analizând strict riguros procesele de măsurare, se poate afirma că nu există măsurători strict independente, deoarece erorile instrumentale remanente, precum şi condiţiile atmosferice de lucru, determină legături inevitabile între rezultatele care se obţin prin măsurare.

Determinarea unor asemente corelaţii, de natură fizică, ar necesita fonduri suplimentare pentru studierea lor şi de aceea, până în prezent au fost aproape întodeauna ignorate.

Suplimentar, modelul funcţional folosit la prelucrare poate introduce şi anumite corelaţii de natură matematică între mărimi, ceea ce poate deforma rezultatele compensării, în cazul în care aceste corelaţii sunt neglijate.

Prin urmare, sub condiţiile:

$$\rho_{i,j} = 0; \qquad \begin{cases} i, j = 1, 2, \dots, k \\ i \neq j \end{cases}, \tag{2.146}$$

primele matrici au un aspect mult mai simplificat:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{m^0 m^0}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \tag{2.147}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{m^0m^0}} = \frac{1}{\sigma_0^2}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix}. \tag{2.148}$$

Dacă se notează:

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} = p_i, \tag{2.149}$$

rezultă :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{m^0m^0}}^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & p_n \end{bmatrix}. \tag{2.150}$$

Mărimile (pozitive) p_i sunt denumite *ponderi* iar matricea (2.150) reprezintă matricea ponderilor în cazul *măsutătorilor independente de precizii inegale.*

Pentru o măsurătoare m_t^0, care ar avea ponderea $p_t = 1$ s-ar putea scrie:

$$p_t = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} = 1, \tag{2.151}$$

de unde ar rezulta:

$$\sigma_0^2 = \sigma_t^2. \tag{2.152}$$

Aceasta este motivaţia pentru care σ_0 a fost denumită *abaterea standard a unităţii de pondere.*

Condiţia (2.145) sub care se desfăşoară prelucrarea măsurătorilor geodezice independente şi de precizi inegale capătă forma cunoscută din **2.7.1.**:

$$[pvv] \rightarrow \min im. \tag{2.116}$$

Măsurători omogenizate

Raportul ponderilor p_k şi p_t pentru două măsurători oarecari m_k^0 şi m_t^0, de precizii inegale, este invers proporţional cu pătratul varianţelor acestora:

$$\frac{p_k}{p_t} = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_k}\right)^2. \tag{2.153}$$

Relaţia anterioară se obţine cu uşurinţă prin aplicarea consecutivă a formulei (2.151) pentru cele două măsurători m_k^0 şi m_t^0 avute în vedere. Considerând relaţiile (2.151) şi (2.153) se poate scrie în continuare:

$$\sqrt{p_k}\sigma_k = \sqrt{p_t}\sigma_t = \sigma_0. \tag{2.154}$$

Abaterea standard a unităţii de pondere σ_0 are ponderea 1. Rezultă următoarea regulă importantă: *erorile medii (abaterile standard) multiplicate cu radicalul de ordinul doi din ponderea aferentă, au ponderea egală cu unitatea.*

Măsurătorile corespondente se numesc *măsurători omogene* sau *măsurător sandardizate,* având fiecare dintre ele ponderea egală cu 1.

2.7.3.3. *Modelul stochastic al prelucrării măsurătorilor geodezice independente şi de egală precizie.* Dacă ipoteza independenţei stochatice a măsurătorilor m^0 este însoţită şi de ipoteza egalităţii preciziilor de măsurare:

$$p_1 = p_2 = ... = p_k = \text{constant}, \tag{2.155}$$

se obţine evident:

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & ... & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.156}$$

unde cu **I** s-a notat matricea unitate. Condiţia (2.116) se simplifică în continuare, devenind:

$$[vv] \rightarrow \text{minim}, \tag{2.157}$$

care corespunde identic cu relaţia (2.115) care a fost dedusă prin acceptarea aceloraşi ipoteze cu cele de mai sus.

Pentru stadiul actual de dezvoltare a tehnicii de calcul şi nu în ultimul rînd, a cunoştinţelor din domeniul prelucrării măsurătorilor geodezice, modelul descris în *2.7.3.3* este depăşit şi are, ca urmare, o aplicabilitate din ce în ce mai restrânsă, pentru cazuri cu totul particulare.

2.8. Variabile aleatoare cu repartiţie normală

C. F. Gauss a constatat, în urma analizelor intreprinse pentru prelucrarea şi interpretarea măsurătorilor astronomice efectuate, că abaterile aleatoare, în cazul unui număr suficient de mare de mărimi, respectă o anumită *distribuţie statistică*, pe care el a numit-o *distribuţie normală* şi care astăzi îi poartă numele fiind denumită *distribuţia Gauss* sau mai complet *distribuţia normală* **Gauss**.

O variabilă aleatoare x^0 cu media sa teoretică $\tilde{x}^0$:

$$\tilde{x}^0 = \boldsymbol{E}(x^0), \tag{2.55}$$

poate fi descrisă optimal prin funcţia numită *densitate de probabilitate sau densitate de repartiţie* $f(x^0)$ - **2.3.1.**

Dacă densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare are forma:

$$f\left(x^0\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\left(\sigma - \tilde{x}^0\right)^2 / 2\sigma^2}, \tag{2.158}$$

fiind prin urmare definită complet de *media teoretică* $\tilde{x}^0$ şi de *abaterea standard teoretică* σ, se spune că variabila aleatoare considerată are o *repartiţie / distibuţie normală,* ceea ce se notează simbolic prin :

$$x^0 \sim \boldsymbol{N}(\tilde{x}^0, \sigma). \tag{2.159}$$

Reprezentarea grafică a *densităţii de repartiţie a distribuţiei normale* $f(x^0)$ în Fig. 7, arată că aceasta atinge un maxim pentru *media teoretică* $\tilde{x}^0$. Punctele de inflexiune ale curbei sunt situate la distanţa $\tilde{x}^0 - \sigma$ şi respectiv $\tilde{x}^0 + \sigma$, unde σ este *abaterea standard teoretică* .

Având în vedere relaţia:

$$\boldsymbol{E}(\varepsilon) = 0, \tag{2.84}$$

rezultă că pentru erorile adevărate ε repartiţia normală are forma $\boldsymbol{N}(0, \sigma)$.

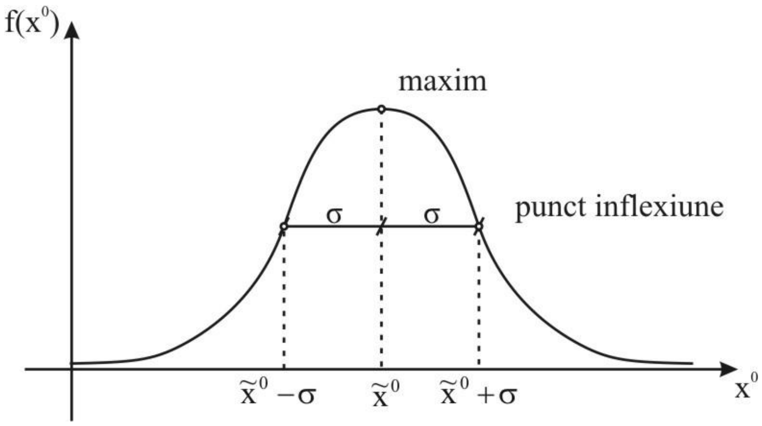

Fig. 7. Reprezentarea grafică a *densităţii de repartiţie a distribuţiei normale* şi a parametrilor de definiţie**.**

În figura următoare s-a reprezentat (după **Niemeier,** 2000, pg. 34) *densitatea de repartiţie a distribuţiei normale* pentru diferite abateri standard $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$, dar aceeaşi medie teoretică $\tilde{x}^0$.

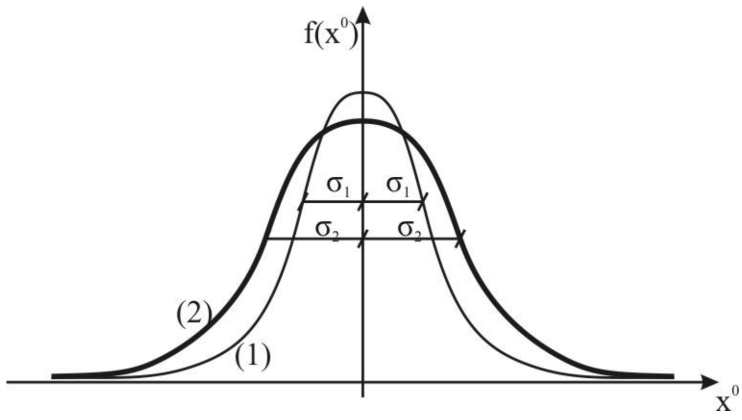

Fig. 8. Reprezentarea grafică a *densităţii de repartiţie a distribuţiei normale* prin considerarea unor diverşi parametri σ.

Din această reprezentare se reconfirmă anumite consideraţii teoretice şi formule din paragrafele anterioare:

- repartiţia normală este simetrică. Conform cu (2.55) media teoretică $\boldsymbol{E}(x^o)$ a unei variabile aleatoare oarecari x^o se poate exprima prin:

$$\boldsymbol{E}(x^o) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x^0) dx \quad ;$$

- *media teoretică* a distribuţiei normale este $\tilde{x}^0$;
- *densitatea de repartiţie* este definită teoretic în intervalul cuprins între $-\infty$ şi $+\infty$. În tot acest interval *densitatea de repartiţie* $f(x^0)$ este pozitivă: $f(x^0) > 0$; din graficele de mai sus, se constată însă că în afara unui domeniu situat în jurul erorii teoretice $\tilde{x}^0$, *densitatea de repartiţie* $f(x^0)$ tinde către zero ;
- parametrul decisiv al curbei care reprezintă *densitatea de repartiţie a distribuţiei normale* este *abaterea standard teoretică* σ, în raport de care curba este mai mult sau mai puţin aplatizată;
- suprafaţa cuprinsă între axa x şi curba $f(x^0)$ este întotdeauna, pentru toate valorile luate de parametrul σ, egală cu 1. Afirmaţia se bazează pe definiţia *funcţiei de distribuţie*

$F(x^0)$ din **2.2.3.,** care reprezintă probabilitatea ca mărimea măsurată m^0 să fie mai mică decât x^0 :

$$F(x^0) = \boldsymbol{P}(m^0 \le x^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^0)dx \quad . \qquad (2.21)$$

- Deoarece probabilitatea nu poate depăşi valoarea 1 , rezultă :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^0)dx = 1 .$$

În aplicaţiile practice care intervin în geodezie o importanţă deosebită o are repartiţia normală $\boldsymbol{N}(0, 1)$ care poartă numele de *repartiţie normală standard* sau *repartiţie normală normată*, în care intervin:

- *media teoretică* $\boldsymbol{E}(y^0) = \tilde{y}^0 = 0$;
- *varianţa* $\sigma_y^2 = 1$.

Transformarea dintr-o *repartiţie normală oarecare* într-o *repartiţie normală normată* se realizeză cu următoarele schimbări de variabile :

variabila aleatoare $x \rightarrow y$

$$\text{mărimea măsurată } y^0 = \frac{\overline{x}^0 - \tilde{x}^0}{\sigma} \quad . \qquad (2.160)$$

În asemenea situaţie, *densitatea de repartiţie* $\varphi(y^0)$ şi respectiv *funcţia de repartiţie* $\Phi(y^0)$ au următoarele expresii mai simplificate:

$$\varphi(y^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y^0)^2} \quad ;$$
$$F(y^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\xi^2/2} d\xi \qquad (2.161)$$

Valorile concrete pe care le iau funcţiile de mai sus sunt prezentate în manualele de statistică (**Mihoc**, 1954, **Kreyszig**, 1975 ş.a.). Ca exemplificare se prezintă în **Anexa 6.1** unele valori necesare în aplicaţiile care vor fi abordate în continuare.

Erorile reale ε_i, caracteristice unei anumite măsurători repetate m_i^0 (i = 1, …, n) au fost definite cu relaţia (2.74) în raport de media teoretică $\tilde{m}$. Probabilitatea ca acestea să se afle situate între anumite limite, exprimate în raport de abaterea standard σ, se determină cu o relaţie de forma (2. 23):

$$\boldsymbol{P}\{-k\sigma < \varepsilon \le k\sigma\} = F(k\sigma) - F(-k\sigma). \qquad (2.162)$$

Valorile numerice ale funcţiilor de repartiţie care intervin în membrul drept al relaţiei de mai sus se găsesc în manualele de statistică menţionate anterior, în raport de valorile pe care le ia parametrul k (unele exemplificări se prezintă în **Anexa 6.1**.)

O aplicaţie importantă prin consecinţele sale este realizată de **Pelzer**, 1980, pg. 44 şi exemplificată în tabelul următor.

Tabelul 3. Probabilitatea de producere a erorilor reale ε

k	$\boldsymbol{P}\{\lvert\varepsilon\rvert < k\sigma\}$
0,5	0,383
1,0	0,683
1,5	0,866
2,0	0,955
2,5	0,988
3,0	0,997

Rezultatele din tabelul 3 confirmă următoarele situaţii care intervin în practica prelucrării măsurătorilor geodezice, pentru *care se consideră* că au o repartiţie normală (*ipoteză care trebuie însă verificată*):

- cca 2/3 (mai exact 68,3 %) din totalitatea erorilor adevărate sunt mai mici decît abaterea standard σ ;
- probabilitatea ca erorile adevărate să depăşească mărimea egală cu 3σ este foarte mică (cca 3 %).

2. 8.2 Alte repartiţii dependente de repartiţia normală

2.8.2.1. Repartiţia χ^2 (hi pătrat). Fie un număr oarecare k de variabile aleatoare x_j, provenite fiecare din distribuţii normale standardizate:

$$x_j \sim \boldsymbol{N}(0,1)\,; \quad j = 1,2,\ldots,k\,. \tag{2.163}$$

Dacă se formează suma pătratelor acestor mărimi:

$$\chi_j^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2\,, \tag{2.164}$$

se obţine o nouă variabilă aleatoare, notată χ^2 (hi pătrat), a cărei distribuţie a fost cercetată de către renumitul geodez şi astronom **F. R. Helmert** (în anul 1876) şi ulterior de către matematicianul **Pearson** (în anul 1900). *Densitatea de probabilitate / de repartiţie* a variabilei χ_k^2 este:

$$\Psi(x) = \left(2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right)^{-1} x^{k/2-1} * e^{-k/2}, \tag{2.165}$$

unde:

- k reprezintă numărul termenilor care intervin în relaţia (2.164) fiind cunoscut şi sub denumirea de *numărul gradelor de libertate;*
- e reprezintă *baza logaritmilor naturali* (e ≅ 2.718 2818);
- **Γ**(x) este o funcţie des întâlnită în statistică:

$$\boldsymbol{\Gamma}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} * t^{x-1} dt. \tag{2.166}$$

Funcţia **Γ** (x) se poate calcula cu următoarele relaţii:

$$\boldsymbol{\Gamma}(x/2) = (x/2 - 1)\ !, \tag{2.167}$$

atunci când x este număr par şi cu:

$$\boldsymbol{\Gamma}(x/2) = (x/2 - 1) * (x/2 - 2) * \ldots * (1/2) * \boldsymbol{\Gamma}(1/2), \tag{2.168}$$

dacă x este număr impar. Prin convenţie:

$$\boldsymbol{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{2.169}$$

Pentru un număr mare de grade de libertate, repartiţia χ^2 se apropie de repartiţia normală:

$$\chi_k^2 \approx N\left(k, \sqrt{2k}\right); \quad k > 30. \tag{2.170}$$

2.8. 2. 2. Repartiţia t sau repartiţia **Student .** *Repartiţia t* sau aşa numita *repartiţie* **Student** are o aplicabilitate deosebită în geodezie. Repartiţia t a unei variabile aleatoare a fost introdusă în anul 1908 de către matematicianul **W. G. Gosset**, sub pseudonumele **Student**, putând fi exprimată sub următoarea formă generală (**Kreyszig**, 1975, pg. 161):

$$t = \frac{x}{\sqrt{y/k}}, \tag{2.171}$$

în care trebuie îndeplinite următoarele condiţii:

- k este un număr pozitiv şi reprezintă gradele de libertate ale repartiţiei variabilei aleatoare t;
- x şi y sunt variabile aleatoare independente.

Variabila aleatoare x are *distribuţia normală standard* ***N*** (0,1) iar variabila aleatoare y este distribuită χ^2 cu k grade de libertate.

Densitatea de probabilitate / repartiţie şi respectiv *funcţia de distribuţie a repartiţiei* **Student** sunt date de următoarele expresii:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} * \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} * \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{(k+1)/2}} \; ; \qquad (2.172)$$

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} * \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} * \int_{-\infty}^{x} \frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{k}\right)^{(k+1)/2}} \; . \qquad (2.173)$$

2.8.2.3. Repartiţia ***F*** *(repartiţia* **Fischer**). In practica lucrărilor din *statistică* precum şi în cadrul *prelucrării observaţiilor geodezice* intervine des raportul a două variabile aleatoare distribuite χ^2 , cu diferite grade de libertate k_1 şi respectiv k_2:

$$\boldsymbol{F}_{k_1,k_2} = \frac{\chi^2_{k_1}}{k_1} / \frac{\chi^2_{k_2}}{k_2} \; . \qquad (2.174)$$

Repartiţia raportului de mai sus a fost studiată de **R. A. Fischer** în anul 1924.

Datorită complexităţii lor, nu considerăm absolut necesară prezentarea în acest manual a *densităţii de repartiţie* şi respectiv a *funcţiei de repartiţie* specifice distribuţiei **Fischer**, care pot fi preluate din manualele de specialitate menţionate la începutul capitolului.

2.9. Interval de încredere

Aşa cum s-a menţionat în paragrafele anterioare, parametrii principali, caracteristici, pentru o *variabilă aleatoare* x^0 (definită prin (2.47)) sunt : *media teoretică* $\tilde{x}^0$ (2.56) şi *abaterea standard teoretică* σ (2.72). Aceşti parametri sunt raportaţi la întreaga *populaţie* şi de aceea rămân inaccesibili pentru rezolvările practice. În activităţile curente se operează cu *eşantioane* din *populaţia* corespondentă, care pot fi mai mult sau mai puţin extinse, în funcţie de solicitări şi de doleanţele executantului lucrării. Aceste eşantioane sunt caracterizate prin alţi parametri principali, respectiv prin *media aritmetică (empirică)* $\overline{x}^0$ (2.48) şi prin *abaterea standard empirică* s (2.101) care sunt *estimatori* ai mărimilor teoretice corespondente. Desigur fiecare dintre perechile de mărimi avute în vedere (de exemplu $\overline{x}^0$ comparativ cu $\tilde{x}^0$) diferă între ele, cu valori oarecari, practic imposibil de determinat cu exactitate, ci doar *estimate*. Pentru a se găsi un răspuns la modalitatea de rezolvare a acestei probleme, care intervine frecvent în lucrările de specialitate, continuăm acest ultim exemplu, şi raportăm pe axa numerelor reale cele două mărimi avute în vedere (Fig. 9) .

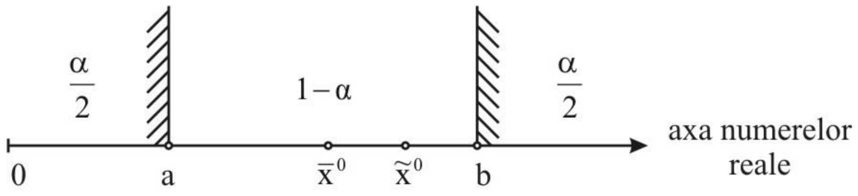

Fig. 9. Definirea intervalului de încredere (după **Pelzer**, 1980, pg. 49).

Este posibilă *estimarea* unui *interval de încredere (interval de confidenţă)*, pe axa numerelor considerată, definit prin numerele a şi respectiv b, egal depărtate de mărimea centrală calculabilă $\overline{x}^0$, în care se află situată *media teoretică* $\tilde{x}^0$, cu o anumită *probabilitate de siguranţă statistică* (sau mai simplu cu *siguranţa statistică*) notată $S = 1 - \alpha$.

În definiţia de mai sus au intervenit noi noţiuni statistice:

- a şi b *limitele intervalului de încredere*;
- α - *prag de semnificaţie statistică* sau *prag de încredere*.

În acest scop folosim relaţia (2.23):

$$\boldsymbol{P}\left\{a \le m^0 \le b\right\} = 1 - \alpha \ . \tag{2.175}$$

Deoarece s-a presupus prin desen că :

$$\boldsymbol{P}\left\{\tilde{x}^0 < a\right\} = \boldsymbol{P}\left\{\tilde{x}^0 > b\right\} = \frac{\alpha}{2} \ , \tag{2.176}$$

intervalul de încredere [a, b] poate fi *estimat* cu *siguranţa statistică* S.

2.10. Verificarea ipotezelor statistice

O *ipoteză statistică* este reprezentată de o presupunere asupra repartiţiei care caracterizează o anumită populaţie sau asupra unor anumiţi parametri din populaţia considerată. Desigur oricare ipoteză statistică poate fi adevărată sau falsă, afirmaţia corespondentă fiind rezultatul unui *test statistic,* care se desfăşoară în următoarele etape:

- se calculează o *statistică* sau un *parametru statistic* (media, varianţa, raportul a două varianţe etc.) în funcţie de rezultatele unui experiment;
- se alege un *prag de semnificaţie* α . In mod obişnuit, în prelucrările geodezice pentru α se alege valoarea 0,05 şi mai rar 0,01;
- se stabileşte *ipoteza nulă*, notată obişnuit H_o, care urmează să fie confirmată sau nu, din punct de vedere statistic;
- se determină *valoarea critică* ce trebuie verificată statistic, în funcţie de rezultatele experimentale (*volumul selecţiei*) şi de pragul de semnificaţie ales;
- se acceptă sau se respinge ipoteza nulă, în funcţie de faptul dacă statistica ce a fost calculată se află în regiunea critică sau nu. Din acest punct de vedere se pot distinge două categorii de erori posibile:
    - eroarea de *ordinul unu,* care constă în respingerea ipotezei zero deşi acesta este în realitate adevărată. Probabilitatea acestei erori este egală cu pragul de semnificaţie α ;
    - eroarea de *ordinul doi*, atunci când se confirmă ipoteza nulă deşi aceasta nu este adevărată în realitate.

Din cele de mai sus se pun în evidenţă multiplele posibilităţi pe care le posedă statistica în aprecierea unui experiment, în ansamblul său, sau în anumite părţi componente. In acelaşi timp trebuie accentuat şi *caracterul relativ* al răspunsurilor obţinute prin analizele statistice, care sunt puternic influenţate de mai mulţi parametri, în primul rând de pragul de semnificaţie α ales sau impus.

Capitolul 3

Prelucrarea măsurătorilor directe

În sens larg, noţiunea de *măsurare* poate fi apreciată ca una dintre componentele *cunoaşterii umane*, fiind o comparaţie pe cale experimentală a unei mărimi ce trebuie *măsurată,* cu valoarea unei alte mărimi, care se acceptă drept *unitate de măsură* sau *etalon* (**Nistor** 1996, pg. 9). În procesele de măsurare intervin fie etaloane propriu-zise, fie, în mod curent, *aparate / instrumente de măsurat,* presupuse etalonate în prealabil. Etaloanele propriu-zise se folosesc, de regulă, în laboratoare specializate şi au ca scop păstrarea *unităţii de măsură corespondente* de către toate aparatele / instrumentele de măsurat din clasa respectivă. Astfel, de exemplu, noţiunea de *metru etalon* este utilizată în *serviciile metrologice naţionale*, respectiv internaţionale, pentru verificarea şi etalonarea tuturor instrumentelor de măsurat distanţe.

În ipoteza că etalonările s-au executat cu precizie ridicată, măsurătorile care se execută ulterior cu aceste aparate, de exemplu asupra unei anumite lungimi, ar trebui să difere puţin între ele. Această condiţie poate fi respectată numai atunci când aparatele la care ne-am referit fac parte din aceeaşi *clasă de precizie*.

Asemenea măsurători repetate, efectuate asupra unei singure mărimi, în scopul deducerii unei valori cât mai precise pentru aceasta se numesc *măsurători directe.* In fond, aproape întregul capitol 2 al manualului a avut în vedere numai măsurători directe . Prin convenţie, în aceeaşi noţiune de *măsurătoare directă* se includ şi *funcţiile simple* de măsurători directe (exprimate, de regulă, sub formă implicită). In practica inginerului specialist în cadastru funciar intervin numeroase asemenea situaţii, astfel încât considerentele de natură teoretică ce se vor expune în continuare, vor fi însoţite şi de exemplificări practice.

3.1. Abaterea standard (eroarea medie) a unei funcţiuni de mărimi independente măsurate direct

Se consideră următoarea funcţie:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{m}_1^0, \mathbf{m}_2^0, ..., \mathbf{m}_k^0\right), \tag{3.1}$$

în care mărimile $\mathbf{m}_j = (1, 2, \dots , k)$ provin din măsurători directe (de forma (2.73)), fiind rezultatul unei prelucrări preliminarii, de genul celei exemplificate în **Aplicaţia 4**. Mărimile avute 9în vedere sunt determinate cu *erorile teoretice* ε_j (j = 1, 2, … , k). Se cere determinarea *abaterii standard* (sau a *erorii medii*) a funcţiei F considerate. Având în vedere relaţia de definiţie (2.74) se poate scrie:

$$\varepsilon_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{m}_1^0 + \varepsilon_1, \mathbf{m}_2^0 + \varepsilon_2, \dots, \mathbf{m}_\mathbf{k}^0 + \varepsilon_\mathbf{k}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{m}_1^0, \mathbf{m}_2^0, \dots, \mathbf{m}_\mathbf{k}^0\right). \tag{3.2}$$

Având în vedere proprietăţile principale ale *erorilor teoretice* ε (analizate în **2.4.**), primul termen din partea dreaptă a funcţiei (3.2) poate fi dezvoltat în *serie* **Taylor** (a se vedea **Anexa 3**) numai până la termenii de ordinul 1. Termenii de ordinul 2 şi superiori pot fi neglijaţi datorită proprietăţilor menţionate, operaţie care se numeşte curent *liniarizarea funcţiei* respective, şi care intervine frecvent în cadrul calculelor de prelucrare a măsurătorilor geodezice.

Se obţine prin urmare:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\left(\mathbf{m}_1^0, \mathbf{m}_2^0, \dots, \mathbf{m}_\mathbf{k}^0\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_1}\right)_* \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_2}\right)_* \varepsilon_2 + \\ + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_\mathbf{k}}\right)_* \varepsilon_\mathbf{k} - \mathbf{F}\left(\mathbf{m}_1^0, \mathbf{m}_2^0, \dots, \mathbf{m}_\mathbf{k}^0\right)\end{aligned}, \tag{3.3}$$

sau:

$$\varepsilon_{\mathbf{F}} = + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_1}\right)_* \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_2}\right)_* \varepsilon_2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_\mathbf{k}}\right)_* \varepsilon_\mathbf{k} \quad . \tag{3.4}$$

Indicele inferior $*$ la derivatele parţiale din relaţiile anterioare indică faptul că valorile numerice ale acestora se vor determina prin utilizarea unor *mărimi provizorii (aproximative)* ale parametrilor pe care acestea le conţin.

Dacă se ridică la pătrat relaţia anterioară şi se neglijează produsele erorilor teoretice din rezultatul din partea dreaptă (aşa cum s-a explicat în amănunt în *2.5.2.2.*, după relaţia (2.86)) rezultă:

$$\varepsilon_{\mathbf{F}}^2 = + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_1}\right)_*^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_2}\right)_*^2 \varepsilon_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{m}_\mathbf{k}}\right)_*^2 \varepsilon_\mathbf{k}^2 \quad . \tag{3.5}$$

Deoarece *erorile teoretice* rămân inaccesibile cunoaşterii umane, ele vor fi înlocuite cu *estimatori determinabili*, aşa cum s-a procedat în *2.5.2.2.*, astfel încât din (3.5) se obţine următoarea expresie *de estimare a varianţei empirice* a funcţiei F considerate :

$$s_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial m_1}\right)_*^2 s_{\overline{m}_1^0}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial m_2}\right)_*^2 s_{\overline{m}_2^0}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial m_k}\right)_*^2 s_{\overline{m}_k^0}^2 , \tag{3.6}$$

în care *varianţele teoretice* ε_i^2 *sunt estimate de erorile medii (varianţele empirice)* ale mediilor aritmetice $s^2_{\overline{m}_j^0}$ (j = 1, 2, … , k). Justificarea acestei proceduri este dată deoarece s-a presupus că fiecare dintre mărimile $\mathbf{m}_j^0$ (j = 1, 2, … , k) provin din prelucrări separate ale unor şiruri de măsurători directe de forma (2.73).

Expresia de mai sus se poate scrie şi sub formă simplificată, prin utilizarea simbolului *sumei Gauss*:

$$s_F^2 = \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_* s_{\overline{m}^0}\right)^2\right]. \tag{3.7}$$

Abaterea standard empirică (*eroarea medie*) a funcţiei considerate se calculează cu relaţia:

$$s_F = \sqrt{\left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_* s_{\overline{m}^o}\right)^2\right]}. \tag{3.8}$$

Varianţele empirice $s^2_{\overline{m}_j^0}$ ale mărimilor $\overline{m}_j^0$, care intervin în membrul drept al relaţiilor (3.6) – (3.8) se pot determina cu formule de forma (2.105).

Deoarece în relaţiile de mai sus s-a presupus că măsurătorile avute în vedere sunt de precizii diferite, acestea pot fi transformate prin considerarea ponderilor aferente p_j (j = 1, 2, … , k). Definirea *ponderilor teoretice* a fost dată de formula (2.151), în care intervin însă *varianţe teoretice*, care *nu pot fi determinate prin calcul*. De aceea, în diverse etape ale prelucrării măsurătorilor geodezice se utilizează *estimatori* care se apropie mai mult sau mai puţin de valorile teoretice.

In această *etapă preliminară* a prelucrării măsurătorilor geodezice se utilizează, relativ frecvent, următoarea posibilitate practică de determinare a *poderilor empirice:*

$$p_j = \left(\frac{\bar{s}_0}{s_{\overline{m}_j^0}}\right)^2, \tag{3.9}$$

în care s-a introdus o nouă notaţie $\bar{s}_0$. Aceasta reprezintă *abaterea standard empirică medie a* *unităţii de pondere*, fiind determinată ca o medie a abaterilor standard empirice a unităţilor de pondere $s_{\overline{m}_j^0}$, pentru componentele din relaţia (3.9):

$$\bar{s}_0 = \boldsymbol{M}(s^2_{\overline{m}_j^0}). \tag{3.10}$$

În relaţia de mai sus cu $\boldsymbol{M}$ s-a notat *operatorul mediei aritmetice.*

Se cunosc şi alte metode pentru determinarea empirică a ponderilor, la care ne vom mai referi în **capitolul 4.**

Introducând relaţiile (3.9) în formulele (3.7) şi respectiv (3.8) se obţin următoarele soluţii pentru aplicaţiile practice :

- *Varianţa empirică a unei funcţiuni de mărimi măsurate direct, dar de precizii diferite:*

$$s_F^2 = \bar{s}_0^2 \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_* \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^2 \right]; \tag{3.11}$$

- *Abaterea standard empirică (eroarea medie) a unei funcţiuni de mărimi măsurate direct, dar de precizii diferite:*

$$s_F = s_0 \sqrt{\left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_* \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^2 \right]} \ . \tag{3.12}$$

3.1.1. Abaterea standard empirică a mediei aritmetice

Revenim la şirul de măsurători directe, repetate de un acelaşi număr de ori (2.73), efectuate asupra unei singure mărimi. În baza principiilor enunţate pînă în prezent, asemenea măsurători pot fi considerate de *precizii egale*, astfel încât varianţa empirică s_0^2 a unei singure măsurători se poate determina cu formula (2.78).

Se cere determinarea abaterii standard a mediei aritmetice $\overline{m}^0$:

$$\overline{m}^0 = \frac{1}{n}\left(m_1^0 + m_2^0 + \ldots + m_n^0\right). \tag{3.13}$$

Deoarece s-a emis ipoteza că toate măsurătorile care intervin în formula de mai sus au aceaşi precizie:

$$s_1^2 = s_2^2 = \ldots = s_n^2 = s_0^2 = \frac{[vv]}{n-1}, \tag{3.14}$$

rezultă din utilizarea relaţiei (3.6):

$$s^2_{\overline{m}^0} = \frac{1}{n^2} * ns^2_0 = \frac{s^2_0}{n}, \tag{3.15}$$

de unde se obţine relaţia căutată şi care s-a folosit anticipat la sfârşitul paragrafului *2.5.2.2.*, (formulele (2.104) şi (2.105)).

Notă

Aşa cum s-a menţionat la sfârşitul paragrafului **2.5.1.** , (după relaţiile (2.68)), atunci când măsurătorile m_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nu sunt afectate de erori sistematice, *media aritmetică* $\overline{m}^0$ *este o estimare nedeformată a mediei teoretice* $\tilde{m}^0$. În cazul în care măsurătorile conţin o anumită *eroare sistematică* e (presupusă oricât de mare), deci când sunt practic greşite, abaterea standard empirică a mediei aritmetice este fals determinată, în sensul că aceasta nu conţine influenţa erorii sistematice care caracterizează măsurătorile respective.

Pentru demonstrarea afirmaţiei se consideră un astfel de şir de măsurători, afectat în totalitatea sa de eroarea sistematică, notată e :

$$\mathbf{m}^0 = \begin{bmatrix} m_1^0 + e \\ m_2^0 + e \\ \ldots \\ m_n^0 + e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^e \\ m_2^e \\ \ldots \\ m_n^e \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Media lor aritmetică, notată $\left(\overline{m}^0\right)^e$:

$$\left(\overline{m}^0\right)^e = \frac{1}{n}\left(m_1^0 + m_1^0 + ,\ldots, m_n^0\right) + \frac{1}{n} ne = \overline{m}^0 + e, \tag{3.17}$$

va fi afectată de aceeaşi eroare sistematică e.

Corecţiile aparente corespondente :

$$\begin{aligned} v_1^e &= \left(\overline{m}^0\right)^e - m_1^e = \left(\overline{m}^0 + e\right) - \left(m_1^0 + e\right) = \overline{m}^0 - m_1^0 \equiv v_1 ; \\ v_2^e &\equiv v_2 ; \\ &\ldots \\ v_n^e &\equiv v_n , \end{aligned} \tag{3.18}$$

nu mai sunt însă afectată de eroarea sistematică e (pe care am presupus-o oricât de mare) şi în consecinţă indicatorii de precizie determinaţi cu formulele (3.15 şi (2.105)) au valori nefireşti de mici, care nu corespund realităţii – măsurători greşite.

3.1.2. Abaterea standard empirică a mediei ponderate

Presupunem că vectorul dat de relaţia (2.73):

$$\mathbf{m^0} = \left[m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0 \right]^T , \tag{2.73}$$

conţine măsurători directe de precizii diferite:

$$\mathbf{p} = [\ p_1, p_2, \ldots, p_n\ ]^T , \tag{3.19}$$

în care ponderile au fost determinate cu relaţiile (3.10). Se va demonstra în **3.5.2.** că *mărimea compensată* a măsurătorilor astfel efectuate este reprezentată de media ponderată a acestora:

$$\overline{m}_p^0 = \frac{\left[p m^0 \right]}{[p]} . \tag{3.20}$$

Abaterea standard empirică (eroarea medie) a mediei ponderate, în cazul măsurătorilor directe de precizii diferite se poate determina prin aplicarea formulelor (3.6) - (3.8) la calculul erorii funcţiei reprezentată de formula (3.20). Se prezintă calculele fără comentarii, deoarece sunt uşor de urmărit:

$$s_{\overline{m}_p^0}^2 = \frac{1}{[p]^2} \left(p_1^2 s_1^2 + \ldots + p_n^2 s_n^2 \right);$$

$$s_i^2 = \frac{s_0^2}{p_i}; \tag{3.21}$$

$$s_{\overline{m}^0} = \frac{s_0^2}{[p]^2} [p] = \frac{s_0^2}{[p]} ,$$

de unde rezultă:

$$s_{\overline{m}^0} = \frac{s_0}{\sqrt{[p]}} . \tag{3.22}$$

Aplicaţia 6

Să presupunem că distanţa avută în vedere în cadrul ***Aplicaţiilor 1 – 4*** a fost remăsurată şi în alte zile. Pentru ca exemplul să fie cât mai edificator, să admitem că la fiecare măsurătoare au existat condiţii meteorologice diferite, şi că eventual au lucrat operatori diferiţi, fiecare cu alte aparate, dar din aceeaşi clasă de precizie. In aceste ipoteze, evident că măsurătorile obţinute au precizii diferite ($s_{\overline{m}_i^0}$ în *Tabelul 4*). Se cere calculul mediei ponderate a tuturor măsurătorilor efectuate şi abaterea standard empirică a acesteia.

Tabelul 4. Calculul mediei ponderate şi al abaterii standard empirice aferente

Nr. crt.	D A T E		C A L C U L E	
	Măsurători $\overline{m}_i^0$ [m]	Abaterile standard ale mediilor aritmetice $s_{\overline{m}_i^0}$ [mm]	Ponderi p_i	R e z u l t a t e
0	1	2	3	4
1	143.2573	4.7	1.04	Abaterea standard empirică a unităţii de pondere (3.9): $\bar{s}_o = 4.8$ mm
2	143.2815	6.3	0.58	Media ponderată a măsurătorilor (3.20) $\overline{m}_p^0 = 143.2672$
3	143.2686	3.5	1.37	Abaterea standard empirică (eroarea medie) a mediei ponderate în cazul măsurătorilor directe de precizii diferite (3.22): $s_{\overline{m}_p^0} = 2.8$ mm
		[p]	2.99	

3.2. Abaterile standard empirice (erorile medii) ale unor funcţii uzuale de măsurători directe

In practica inginerului specialist în cadastru funciar intervin funcţii mai mult sau mai puţin complicate de mărimi care se măsoară direct. Este util să se examineze modalitatea de determinare a abaterilor standard empirice pentru unele dintre funcţiile care intervin deosebit de frecvent.

3.2.1. Funcţia reprezintă suma sau diferenţa unor măsurători directe

Fie funcţia:

$$y = \pm \overline{m}_1^0 \pm \overline{m}_2^0 \pm \ldots \pm \overline{m}_n^0, \tag{3.23}$$

în care intervin medii aritmetice ale măsurătorile m^o , efectuate direct. Acestea sunt caracterizate de abaterile standard empirice (erorile medii) ale mediilor aritmetice respectivwe : $s_{\overline{m}_i^0}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Abaterea standard empirică a funcţiei y rezultă din utilizarea formulei (3.6), în care toate pătratele derivatelor parţiale care intervin au valoarea 1. Rezultă:

$$s_y = \sqrt{s^2_{\overline{m}_1^0} + s^2_{\overline{m}_2^0} + \ldots + s^2_{\overline{m}_n^0}} = \sqrt{\left[s^2_{\overline{m}^0} \right]}. \tag{3.24}$$

Aplicaţia 7

Se consideră două distanţe d_1 = 250.00 m şi d_2 = 300.00 m. ale căror abateri standard empirice sunt de 5 mm şi respectiv de 7 mm. Se cere calculul abaterilor standard empirice absolute şi relative pentru suma S. respectiv pentru diferenţa D. a celor două distanţe avute în vedere.

Rezolvare

$$S = 550.00 \text{ mm}; \qquad s_S = 8.6 \text{ mm}; \qquad s_S/S \approx 1/64\ 000;$$

$$D = 50.00\text{mm}; \qquad s_D = 8.6 \text{ mm}; \qquad s_D/D \approx 1/6\ 000\ .$$

Comentarii

- Abaterile standard absolute sunt aceleaşi, atât pentru suma S cît şi pentru diferenţa D a celor două distanţe măsurate;
- Abaterile standard relative diferă mult între ele.

Caz particular

Dacă mediile aritmetice ale măsurătorilor directe $\overline{m}_i^0$ avute în vedere în funcţia (3.25) au aceeaşi precizie:

$$s^2_{\overline{m}_1^0} = s^2_{\overline{m}_2^0} = \ldots = s^2_{\overline{m}_n^0} = s^2_{\overline{m}^0} \ , \tag{3.23}$$

abaterea standard a funcţiei y devine:

$$s_y = s\sqrt{n}\ . \tag{3.26}$$

Asemenea situaţii intervin deseori în practică, astfel încât este util să examinăm câteva aplicaţii tipice.

Convenţie

Pentru simplificarea scrierii formulelor, în continuare se va face abstracţie de faptul că mărimile *considerate că au fost măsurate direct*, provin de fapt întotdeauna dintr-o medie aritmetică a unor măsurători repetate asupra acelei mărimi. Ca urmare, în continuare se va opera, convenţional, cu abaterea standard (eroarea medie) a unei singure măsurători, notată s , şi nu cu abaterea standard a mediei aritmetice $s^2_{\overline{m}^0}$ cum ar fi strict corect.

3.2.1.1. Măsurarea unei distanţe cu panglica de oţel

Aplicaţia 8

Se consideră o distanţă de 245.75 m, care a fost măsuată cu o panglică de oţel care are abaterea standard empirică a unei singure măsurători s = 2 cm. Distanţa respectivă se măsoară prin aplicarea panglicii de oţel de 5 ori. Rezultă că abaterea standard a întregii distanţe se obţine cu relaţia (3.26) prin particularizările corespunzătoare:

$$s_D = 2\sqrt{5} \approx 4\,\text{mm}. \qquad (3.27)$$

3.2.1.2. Erorile unghiurilor, respectiv ale direcţiilor orizontale. Aşa cum se va demonstra la cursul de *Geodezie***,** *direcţiile α* măsurate cu teodolitul într-o staţie sunt *mărimi independente,* spre deosebire de unghiurile β care s-ar obţine din acestea prin scăderi de forma (3.28), care sunt mărimi derivate, şi au un grad *de dependenţă* bine definit:

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 . \qquad (3.28)$$

Aplicaţia 9

Se măsoară două direcţii α_1, şi α_2 cu acelaşi instrument, pentru care s-a determinat abaterea standard empirică a unei singure măsurători $s_\alpha = 4^{cc}$. Se cere să se calculeze abaterea standard empirică a unghiului care se obţine prin scăderea celor două direcţii măsurate. De asemenea se cere determinarea raportului dintre ponderea acestui unghi şi ponderea unei direcţii.

Rezolvare

- La prima întrebare răspunsul este similar cu cel obţinut cu relaţia (3.25):

$$s_\beta = s_\alpha \sqrt{2} = 5^{cc},7 . \qquad (3.29)$$

- Pentru al doilea răspuns există mai multe posibilităţi. Se poate utiliza o relaţie de forma (2.109) în care abterile standard teoretice sunt estimate prin abaterile standard empirice:

$$\frac{p_\beta}{p_\alpha} = \left(\frac{s_\alpha}{s_\beta}\right)^2 = \left(\frac{4^{cc}}{5^{cc},7}\right)^2 . \qquad (3.30)$$

Admiţînd $p_\alpha = 1$ se obţine $p_\beta = 0{,}5$. *Prin urmare ponderea unghiului obţinut cu relaţia* (3.28) *este egală cu jumătatea ponderii unei direcţii, care reprezintă măsurătoarea originară.*

Analog cu situaţia examinată mai sus, se poate proceda şi în cazul determinării unei diferenţe de nivel Δh , prin nivelment geometric, în care măsurătorile primare sunt citirea pe mira din spate (a) şi respectiv citirea pe mira din faţă (b):

$$\Delta h = a - b . \qquad (3.31)$$

Deoarece în condiţiile date se poate accepta

$$s_a = s_b = s_c , \qquad (3.32)$$

unde cu s_c s-a notat eroarea de citire pe una din mirele de nivelmet, rezultă:

$$s_{\Delta h} = s\sqrt{2} . \qquad (3.33)$$

3.2.1.3. Transmiterea erorilor unghiulare într-o drumuire planimetrică. Drumuirile planimetrice încep, de regulă, de pe o direcţie R_o pentru care se cunoaşte orientarea Θ_0 în planul de proiecţie. Abaterea standard empirică a orientării iniţiale este considerată, în cele mai multe cazuri, ca fiind nulă $s_{\Theta_0} = 0$. Analog se procedează, de obicei, şi cu orientarea finală, precum şi cu alte orientări de control folosite pe parcursul drumuirii.

Aplicaţia 10

Se consideră drumuirea din Fig. 10. Se cere determinarea abaterii standard empirică a orientării laturii d_k notată s_{θ_k}, ştiind că unghiurile β_1, β_2, …, β_k au fost măsurate cu un teodolit care asigură precizia unghiulară de la ***Aplicaţia 9***.

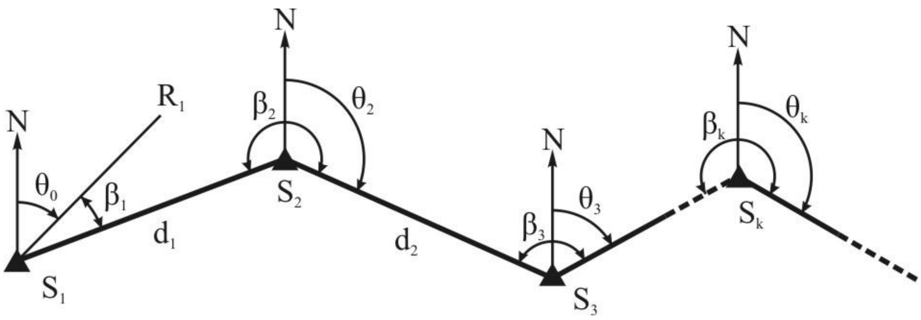

Fig. 10. Transmiterea erorii unghiulare într-o drumuire planimetrică

Rezolvare

Din Fig. 10 se poate deduce:

$$\begin{aligned}
&\Theta_1 = \Theta_0 + \beta_1; \\
&\Theta_2 = \Theta_1 - 200^g + \beta_2 = \Theta_0 + \beta_1 + \beta_2 - 200^g; \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\Theta_k = \Theta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k - 200^g.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Deoarece $s_{\Theta_0} = 0$ şi $s_{\beta_1} = s_{\beta_2} = \cdots = s_{\beta_n} = 5^{cc},7 = s_\beta$ iar constanta 200^g este lipsită de eroare se obţine:

$$s_{\Theta_k} = s_\beta \sqrt{k}\,. \tag{3.35}$$

Dacă, de exemplu:

$$k = 6, \text{ atunci } s_{\Theta_k} = 13^{cc},96\,. \tag{3.36}$$

Comentarii

- Din acest exemplu se desprinde o regulă importantă pentru practică: *este indicat ca după un număr oarecare de lungimi să avem un control pe o orientare cunoscută.* Experienţa operatorului, precizia solicitată de beneficiarul lucrării sau uneori chiar instruţiunile de lucru impun numărul de lungimi după care se solicită *controlul menţionat*.
- În cazul când drumuirea are orientări de control la ambele capete (ceea ce este întodeauna indicat) numărul k din relaţia (3.35) este considerat la jumătatea drumuirii.
- Analog se va proceda şi în cazul unei drumuiri închise: eroarea maximă este situată la mijlocul său.

3.2.2. Funcţia reprezintă produsul dintre o constantă şi o mărime măsurată direct

Fie funcţia:

$$F = c * m^0, \tag{3.37}$$

în care c reprezintă o constantă iar m^o este o mărime măsurată direct, cu abaterea standard empirică s. Se cere calculul abaterii standard empirice a funcţiei considerate. Din aplicarea formulei (3.6) rezultă:

$$s_F^2 = c^2 * s^2, \tag{3.38}$$

adică :

$$s_F = c * s. \tag{3.39}$$

Aplicaţia 11

Se consideră 3 suprafeţe de formă circulară, cu razele de 100 m; 500 m; 1000 m. Se cer abaterile standard empirice absolute şi relative ale suprafeţelor, considerându-se că razele acestora se măsoară cu o ruletă de oţel de 50 m, care asigură abateri standard empirice s de 2 cm pentru o singură măsurătoare.

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei date se fac unele consideraţii ajutătoare.

- Aşa cum s-a menţionat în **3.2.1.**, prin formula (3.26), rezultă pentru razele măsurate abateri standard empirice diferite (coloana 3 din *Tabelul 5*):

$$s_r = s\sqrt{n}, \tag{3.40}$$

unde n reprezintă numărul de măsurători de 50 m cuprinse în raza corespondentă.

➢ Aria cercului fiind determinată de relaţia:

$$A = \pi\, r^2, \tag{3.41}$$

eroarea suprafeţei sale se determină utilizând relaţia (3.6):

$$s_A^2 = 4\pi^2 r^2 s_r^2; \quad s_A = 2\,\pi\, r\, s_r. \tag{3.42}$$

Tabelul 5. Abateri standard absolute şi relative la măsurarea unor suprafeţe circulare

Nr. crt.	Lungimea razei r [m]	Abaterea standard a razei s_r [m]	Suprafaţa cercului A [m^2]	Abaterea standard absolută a suprafeţei circulare s_A [m^2]	Abaterea standard relativă a suprafeţei circulare
0	1	2	3	4	5
1.	100.00	0.028	31 415.93	12.56	~ 1 : 2 500
2.	500.00	0.063	785 398.16	62.80	~ 1 : 12 500
3.	1 000.00	0.089	3 141 592.65	125.60	~ 1 : 25 000

Concluzii:

In cazul măsurării unui număr oarecare de suprafeţe circulare *cu acelaşi instrument,* care asigură o anumită precizie (în exemplul considerat, abaterea standard empirică a unei singure măsurători a fost presupusă de 2 cm), se pot desprinde următoarele concluzii principale:

➢ erorile razelor cresc odată cu mărirea acestora;

➢ asemănător, abaterile standard empirice absolute ale suprafeţelor se măresc pe măsură ce acestea din urmă cresc;

➢ abaterile standard empirice relative ale suprafeţelor descresc.

Aplicaţia 12

În numeroase situaţii costul unui metru pătrat de suprafaţă (mai ales de suprafaţă construită) este mare, astfel încât beneficiarii respectivi sunt interesaţi în cunoaşterea suprafeţei cu erori cât mai mici, pentru a putea obţine un preţ cât mai bun. Să presupunem că se solicită determinarea unei suprafeţe circulare, cu raza de 100 m cu abateri standard empirice (erori medii) de 2 m^2, respectiv de 5 m^2. Se cere precizia de măsurare care trebuie asigurată de instrumentul care urmează a fi folosit.

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei se va utiliza formula (3.42.) în care abaterea standard empirică s_A este, de această dată, cunoscută (impusă de beneficiar).

Se cere să se calculeze abaterea standard empirică cu care trebuie determinată raza r, notată ca şi până acum s_r, astfel încât suprafaţa respectivă să se determine cu erorile menţionate. Abaterea standard empirică a razei r este obţinută din formula amintită mai sus:

$$s_r = s_A / 2 \pi r. \tag{3.43}$$

In exemplul considerat cele două răspunsuri sunt:

$$s \; = 0.003 \text{ m} \quad \text{respectiv} \quad s \; = 0.008 \text{ m} . \tag{3.44}$$

Asemenea precizii nu se mai pot abţine prin utilizarea unei panglici de oţel, care ar trebui să aibă posibilitatea de măsurare cu abateri standard a unei singure măsurători (o distanţă de 50 m) de 1,4 mm şi respectiv de 5,7 mm.

Aceste solicitări ale beneficiarilor lucrărilor geodezice - cadastrale privind precizia finală a rezultatelor a impulsionat efectiv tehnica realizării instrumentelor electronice de măsurat distanţe. Acestea s-au perfecţionat deosebit de mult, atât în direcţia creşterii preciziei de măsurare cât şi a unei productivităţi superioare . Desigur şi preţurile de cost au crescut în acelaşi sens. Aparate electronice de măsurat distanţe cu precizia solicitată de relaţiile (3.44) există, astfel încât dezideratul beneficiarului poate fi satisfăcut.

3.2.3. Funcţia reprezintă produsul dintre două mărimi măsurate direct

Se consideră funcţia:

$$f = m_1^0 \, m_2^0, \tag{3.45}$$

în care măsurătorile directe m_1^0 şi m_2^0 au fost măsurate cu abaterile standard empirice ale unei singure măsurători notate cu s_1 şi respectiv s_2. Prin aplicarea formulei generale (3.6) se obţine:

$$s_f = \sqrt{\left(m_2^0 * s_1\right)^2 + \left(m_1^0 * s_2\right)^2} \; . \tag{3.46}$$

Aplicaţia 13

Se cere determinarea abaterii standard empirice a suprafeţei unei camere care are dimensiunile de 3,5 m * 4,5 m, măsurate cu o panglică de oţel, care în condiţiile date asigură abaterea standard a unei singure măsurători de 0.01 m.

Rezolvare

Formula (3.44) devine în acest caz particular:

$$s_f = 0{,}01\sqrt{(4{,}5)^2 + (3{,}5)^2} = 0{,}06 \text{ m}^2 \tag{3.47}$$

Rezultă că suprafaţa de 32,50 m^2 a camerei a fost măsurată cu o eroare de 0,06 m^2.

Aplicaţia 14

Să considerăm că cele două mărimi măsurate direct din relaţia (3.43) au dimensiuni diferite, cazul tipic fiind constituit de situaţia care intervine în nivelmentul trigonometric topografic (la distanţe mici) - Fig.11.

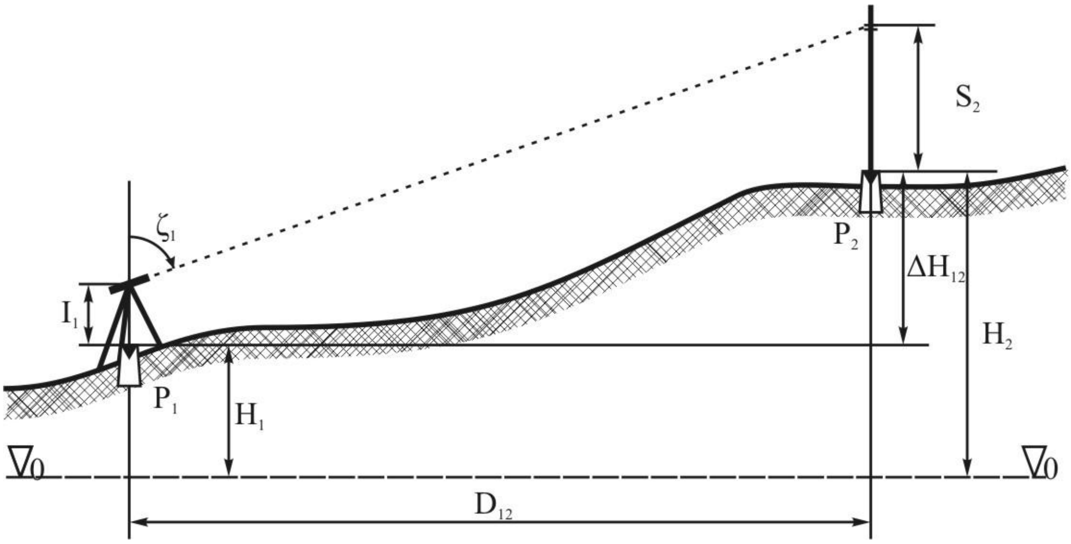

Fig. 11. Nivelmentul trigonometric topografic (la distanţe mici)

Aşa cum rezultă din Fig.11., diferenţa de nivel ΔH_{12} dintre cele două puncte topografice P_1 şi P_2 este dată de relaţia:

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = D_{12} \operatorname{ctg} \zeta_1 + I_1 - S_2. \tag{3.48}$$

Inălţimea instrumentului în staţie (I_1) precum şi înălţimea semnalului vizat (S_2) se măsoară cu multă atenţie, astfel că, de obicei, aceste mărimi sunt considerate fără erori (sau mai exact spus erorile acestora sunt mult mai mici decât ale celorlalte mărimi care se măsoară, încât pot fi neglijate). Determinarea diferenţei de nivel prin nivelment trigonometric topografic (la distanţe mici) se bazează pe urmăroarele ipoteze simplificatoare:

- raza de lumină are o curbură foarte mică pe intervalul de măsurare, astfel încât se admite că traseul parcurs este liniar (se neglijează refracţia atmosferică);
- suprafaţa de nivel zero (care în *Geodezie* este considerată extrem de ondulată şi denumită *geoid*) este înlocuită cu *planul de cotă zero*, deoarece domeniul de măsurare este restrâns.

  În aceste ipoteze, formula de determinare a diferenţei de nivel este (3.48), în care intervin două tipuri de măsurători diferite:

- măsurători de distanţe D_{12};
- măsurători unghiulare zenitale ζ_1.

În decursul timpului aparatura capabilă să măsoare asemenea mărimi a cunoscut o dezvoltare continuă. În prezent se utilizează pe scară din ce în ce mai largă *staţilei totale* care măsoară distanţe, direcţii orizontale şi unghiuri zenitale. Preciziile obţinute diferă de la un aparat la altul (de la o firmă la alta) şi exemplul care se va da în continuare are doar un caracter didactic. Se va presupune că distanţele sunt măsurate cu abateri standard de ordinul 1cm / km iar unghiurile zenitale sunt măsurate cu abateri standard de ordinul 50^{cc}. Abaterea standard a funcţiei (3.48) se poate determina aplicând relaţia (3.8) în ipotezele menţionate mai sus $\left(s_{I_1} \approx s_{S_2} \approx 0\right)$:

$$s_{\Delta H_{12}} = \sqrt{ctg^2\varsigma_1 * s^2_{D_{12}} + \left(D_{12}/\sin^2\varsigma_1\right)^2\left(\frac{s^{cc}_{\varsigma}}{\rho^{cc}}\right)^2} . \tag{3.49}$$

Cu ρ^{cc} s-a notat numărul de secunde centezimale conţinut de 1 radian. Pentru calcule aproximative se poate considera $\rho^{cc} = 636\ 620^{cc}$ şi, uneori (ca în exemplu nostru) $\rho^{cc} \approx 6 * 10^5$.

După cum se constată din formula (3.49) abaterea standard a diferenţei de nivel are două componente:

- *prima componentă* depinde de mărimea unghiului zenital şi de precizia cu care a fost măsurată distanţa dintre cele 2 puncte;
- *a doua componentă* depinde în primul rând de mărimea distanţei dintre punctele considerate şi de precizia de măsurare a unghiului zenital, precum şi de alţi factori, care fiind situaţi la numitorul expresiei, aduc o contribuţie mai redusă.

Aplicaţia 15

Se au în vedere măsurătorile din *Tabelele 6 şi 7.*

În *Tabelul 6* distanţa este considerată constantă (300,00 m) şi se au în vedere următoarele unghiuri zenitale: 10^g ; 30^g şi 70^g.

În *Tabelul 7* unghiul zenital este considerat constant (50^g) şi se au în vedere următoarele distanţe: 200 m; 400 m; 600 m.

Se cere determinarea abaterilor standard empirice ale diferenţelor de nivel cu formula (3.4) şi compararea rezultatelor în funcţie de variaţiile în parametrilor care intervin în formula menţionată.

Abaterile standard empirice ale distanţelor măsurate se vor determina cu relaţia aproximativă:

$$s_D = 1 \text{ cm} * (D)_{km}. \tag{3.50}$$

Tabelul 6. Variaţia abaterii standard empirice a diferenţei de nivel trigonometric în funcţie de modificarea unghiului zenital

Nr. crt.	Distanţa D [km]	Unghiul zenital ζ [g]	Prima componentă [cm]	A doua componentă [cm]	Abaterea standard empirică a diferenţei de nivel trigonometric [cm]
1.	0.3	10	3.6	9 270.3	96.3
2.	0.3	30	0.3	130.6	11.5
3.	0.3	70	0.02	8.8	3.0

Tabelul 7. Variaţia abaterii standard empirice a diferenţei de nivel trigonometric în funcţie de modificarea distanţelor

Nr. crt.	Distanţa D [km]	Abaterea standard a distanţei s_D [cm]	Unghiul zenital ζ [g]	Prima componentă [cm]	A doua componentă [cm]	Abaterea standard empirică a diferenţei de nivel trigonometric [cm]
1.	0.2	0.2	50	0.04	9.86	3.1
2.	0.4	0.4	50	0.16	39.47	6.3
3.	0.6	0.6	50	0.36	88.83	9.4

Comentarii:

- se observă că prima componentă din formula (3.49) are contribuţii mult mai mici comparativ cu cea de a doua componentă din aceeaşi formulă, în toate exemplele prezentate;
- din *Tabelul 6 se* constată că pe măsură ce unghiurile zenitale *descresc* (în ipoteza D = constant) abaterile standard ale diferenţelor de nivel trigonometric *cresc* extrem de mult. De aceea unghiurile zenitale mici trebuie evitate;
- din *Tabelul 7* se constată că pe măsură ce distanţele *cresc* (în ipoteza ζ = constant) abaterile standard ale diferenţelor de nivel trigonometric *cresc* de asemenea . Trebuie atras atenţia că peste limita de 800 m, ipotezele admise în lucrările topografice nu mai pot fi acceptate (de exemplu în lucrările geodezice).

3.3. Influenţa concomitentă a erorilor aleatoare și a erorilor sistematice reziduale

Să presupunem că *erorile teoretice* ε_i (i = 1, 2, …, n) definite prin relaţia (2.74) conţin atât componente aleatoare (μ) cît şi componente sistematice (ν):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mu_1 + \nu_1; \\ \varepsilon_2 &= \mu_2 + \nu_2; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \varepsilon_n &= \mu_n + \nu_n. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Se ridică la pătrat relaţiile de mai sus, după care se formează media aritmetică a termenilor rezultaţi (contribuţia adusă de suma produselor dintre erorile care intervin în membrul drept este neglijată, aşa cum s-a procedat şi în *2.5.2.2*) :

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \approx \frac{[\mu\mu]}{n} + \frac{[\nu\nu]}{n}. \tag{3.52}$$

Respectând definiţia dată pentru *abaterea standard empirică a unei singure măsurători* prin relaţia (2.101) si generalizând această definiţie la *componentele aleatoare*, respectiv la *componentele sistematice* care intervin în formula de mai sus, rezultă:

$$s_0 = \sqrt{s_{\mu_0}^2 + s_{\nu_0}^2}. \tag{3.53}$$

In aparenţă, formula obţinută mai sus nu aduce noutăţi în raport de formulele cu caracter general conţinute în **3.1.** Dar, având în vedere modalitatea de propagare a celor două categorii de erori avute în vedere se pot desprinde unele concluzii importante pentru activitatea practică:

- *erorile aleatoare (întâmplătoare)* se propagă după relaţii de forma (3.24). De exemplu, dacă se are în vedere o linie de nivelment compusă dintr-un număr n de niveleuri, de lungimi aproximativ egale, şi se notează cu s' abaterea standard pe un singur niveleu, determinată *numai* de erorile aleatoare rezultă:

$$s_{\mu_0} = s'\sqrt{n}; \tag{3.54}$$

- *erorile sistematice reziduale* au ca surse principale unele imperfecţiuni de *verificare* şi respectiv *rectificare* (eventual *etalonare*) ale aparatelor geodezice. Aceste erori nu trebuie confundate cu *greşelile de măsurare,* care sunt presupuse excluse aprioric din metodele geodezice de lucru (aşa cum s-a arătat în *1.1.1.1.*).Prin urmare, propagarea erorilor sistematice reziduale are loc direct proporţional cu numărul de măsurători individuale, aşa cum rezultă din formula (3.37). Notând cu s" *numai* contribuţia a acestei categorii de erori în eroarea finală pe un singur niveleu se poate scrie:

$$s_{v_0} = s'' * n. \tag{3.55}$$

Din ultimele trei relaţii rezultă abaterea standard empirică s_L pentru întreaga linie de nivelment, determinată atât de componenta aleatoare cât şi de componenta sistematică reziduală:

$$s_L = \sqrt{s'^2 * n + s''^2 * n^2}. \tag{3.56}$$

Observaţii

- Abaterile standard empirice s' şi s" se determină în mod specific pentru fiecare gen de măsurătoare (nivelment, măsurători de distanţe ş.a.m.d.) după încercări multiple, care depind de foarte mulţi parametri: destinaţia lucrării, precizia solicitată ş.a.m.d.;
- De numeroase ori *toleranţele* impuse de instrucţiunile de lucru, sau de către beneficiar, se dau sub forma (3.56) unde se ţine seamă de particularităţile specifice referitoare la propagarea erorilor întâmplătoare, respectiv a celor sistematice.

3.4 Şiruri de măsurători duble

Şirul de măsurători duble reprezintă un caz particular al măsurătorilor directe, fiind folosite în mod curent în practică. De exemplu, măsurarea de câte două ori, la *dus* şi la *întors*, cu ajutorul panglicii de oţel de 50 m, a laturilor drumuirilor planimetrice. In categoria măsurătorilor duble se încadrează, de asemenea, şi măsurarea diferenţelor de nivel, dintre punctele drumuirilor nivelitice, la *dus* şi la *întors*, mai ales atunci când se folosesc aceleaşi trasee şi lungimile niveleurilor sunt foarte apropiate ca mărime. Tot ca şir de măsurători duble se pot trata şi situaţiile în care fiecare dintre măsurătorile şirului au fost executate de patru sau de opt ori, grupând pe perechi, în mod corespunzător, măsurătorile efectuate.

În general, se consideră două şiruri de măsurători, efectuate corespondent asupra aceloraşi mărimi:

$$\begin{aligned} &\text{şirul 1:} \quad m^0_{1,1},\ m^0_{2,1},\ \ldots,\ m^0_{n,1}; \\ &\text{şirul 2:} \quad m^0_{1,2},\ m^0_{2,2},\ \ldots,\ m^0_{n,2}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Diferenţele care se pot forma dintre măsurătorile corespondente din cele două şiruri:

$$d_i = m^0_{i,2} - m^0_{i,1}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.58}$$

reprezintă o sursă de informaţii pentru calculul preciziei interioare pe baza unei formule de forma (2.101). Dacă folosim principiile şi notaţiile din *2.5.2.2* se poate scrie:

$$\tilde{m} = m^0_{i,1} - \varepsilon_{i,1} = m^0_{i,2} - \varepsilon_{i,2}, \tag{3.49}$$

de unde se poate deduce o altă formă de exprimare a diferenţelor d_i, în raport de *erorile teoretice*:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{1,1};\\
d_2 &= \varepsilon_{2,2} - \varepsilon_{2,1};\\
\dots &\quad \dots \quad \dots\\
d_n &= \varepsilon_{n,2} - \varepsilon_{n,1}.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Ridicând la pătrat componentele relaţiilor (3.60) şi făcând media lor aritmetică, prin neglijarea produselor dintre erorile teoretice care apar în partea dreaptă rezultă:

$$\frac{[dd]}{n} \approx \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n} + \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}. \tag{3.61}$$

In continuare se vor examina două situaţii care intervin frecvent în practică.

3.4.1. Şiruri duble de măsurători de aceeaşi precizie

Dacă se presupune că şirul de măsurători duble au aceeaşi precizie ($\varepsilon_{\bar{m}_1^0} = \varepsilon_{\bar{m}_2^0} = \varepsilon_{\bar{m}^0}$) se obţine din (3.61):

$$\frac{[dd]}{n} = 2\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{3.62}$$

În această ipoteză, *abaterea standard empirică a unei singure măsurători* (oarecari) din cele două şiruri cuprinse în formula (3.57) se poate determina prin utilizarea relaţiei de definiţie (2.101):

$$s_0 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \tag{3.63}$$

În mod obişnuit, din cele două şiruri de măsurători duble se formează medii, în mod corespondent:

$$
\begin{aligned}
M_1^0 &= \frac{m_{1,1}^0 + m_{1,2}^0}{2};\\
M_2^0 &= \frac{m_{2,1}^0 + m_{2,2}^0}{2};\\
\dots &\qquad \dots\\
M_n^0 &= \frac{m_{n,1}^0 + m_{n,2}^0}{2}.
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Abaterea standard empirică a unei singure măsurători mediate M^o se obţine cu o relaţie dedusă din particularizarea formulei (2.84):

$$s_{M^0} = \frac{s_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}}. \tag{3.65}$$

3.4.2. Şiruri duble de măsurători de precizii diferite

Se presupune că cele două şiruri de măsurători din (3.57) au precizii diferite, reflectate de ponderile acestora p_i.

Pentru determinarea estimatorilor preciziei de măsurare se pot folosi cunoştinţele din situaţia precedentă, cu particularizările care decurg din noua ipoteză:

- măsurătorile m^o din cele două şiruri se aduc la *aceeaşi pondere,* prin multiplicare cu radicalul ponderii aferente, aşa cum s-a explicat în amănunt la sfîrşitul paragrafului *2.7.3.2,* unde s-a abordat *omogenizarea măsurătorilor geodezice*. Ca urmare, noile diferenţe notate $d_i^{'}$, au evident ponderea acestor măsurători omogenizate din care au fost formate:

$$d_i' = d_i \sqrt{p_i}\,; \qquad (3.66)$$

- *abaterea standard empirică a unităţii de pondere* care se va nota cu s_0^p (a unei singure măsurători din cele două şiruri duble de măsurători, aduse la ponderile egale cu 1) se obţine cu o formulă similară cu (3.63):

$$s_0^p = \sqrt{\frac{[d'd']}{2n}}\ . \qquad (3.67)$$

Evident, din ultimile două relaţii se poate scrie:

$$s_0^p = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}\ , \qquad (3.68)$$

în care intervin diferenţele primare d_i ;

- *abaterea standard a unei singure măsurători mediate* M^o, de forma (3.64), *cu ponderea egală cu unitatea,* se determină cu una din relaţiile deja cunoscute:

$$s_{M^0}^p = \frac{s_0^p}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d'd']}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pdd]}{n}}\ ; \qquad (3.69)$$

- prin particularizarea formulei (2.104) se poate deduce *abaterea standard a oricăreia dintre măsurătorile duble individuale* $m_{i,1}^0$ sau $m_{i,2}^0$, care au fiecare ponderea p_i:

$$s_{m_i^0}^p = \frac{s_{M^0}^p}{\sqrt{p_i}} = \sqrt{\frac{[pdd]}{2np_i}}\ ; \qquad (3.60)$$

- *abaterea standard a unei măsurători mediate* M_i^0, de formula (3.64) şi care are ponderea p_i, se determină cu una dintre relaţiile cunoscute:

$$s^{p}_{M_i^0} = \frac{s^{p}_{m_i^0}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pdd]}{np_i}} \tag{3.71}$$

Aplicaţia 16

Se presupun măsurătorile *dus* şi respectiv *întors* efectuate pe o linie de nivelment, formată din 5 segmente (*Tabelul 8* - coloanele 2 şi 3). Să se determine parametrii de precizie principali.

Tabelul 8. Estimarea preciziei măsurătorilor duble

Nr. crt.	Diferenţe de nivel măsurate		Diferenţe	Mediile	Lungimi	Ponderi	Abaterile standard empirice ale măsurătorilor mediate [mm]	Calcule
	Dus $m^0_{i,1}$ [m]	Întors $m^0_{i,2}$ [m]	d_i [mm]	măsurătorilor M^0_i [m]	L_i [km]	P_i		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.1785	3.1735	- 5.0	3.1760	3.5	0.3	1.48	Abaterea standard empirică a unităţii de pondere a celor doua şiruri de măsurători (3.68) s^p_0 = 1.62 mm
2	- 5.8612	- 5.8648	- 3.6	- 5.8630	4.6	0.2	1.81	
3	17.2216	17.2256	4.0	17.2236	6.7	0.2	1.81	Abaterea standard empirică a unităţii de pondere din şirul de măsurători mediate M^0_i (3.69) $s^p_{M^o}$ = 1.14 mm
4	8.3847	8.3809	- 3.8	8.3828	5.8	0.2	1.81	
5	- 12.1467	- 12.142	- 12.144	- 12.1444	2.1	0.5	1.15	

Comentarii

- Şirul de *măsurători mediate* este mai precis decât şirurile de măsurători duble individuale.
- Măsurătorile cu ponderi mari (măsuratorile 5, respectiv 1) au abateri standard mai mici.
- În lucrările de nivelment geometric de precizie, în care se presupune că se încadrează şi exemplu de mai sus, se folosesc niveleuri de lungimi l_n aproximativ egale. Pe un segment de nivelment, propagarea erorilor întâmplătoare depinde de numărul de niveleuri, notat n_n precum şi de abaterea standard pe un singur niveleu, notată s_0, care îndeplineşte aici rolul abaterii standard a unei singure măsurători de pondere egală cu unitatea. Rezultă că abaterea standard pentru segmentul considerat, notată s_s, se determină cu o relaţie similară cu (3.24):

$$s_s = s_0 \sqrt{n_n} \ . \qquad (3.72)$$

Deoarece $n_n \approx L_s / l_n$ (L_s - lungimea segmentului de nivelment), rezultă:

$$s_s = s_0 \sqrt{L_s / l_n} \ . \qquad (3.73)$$

Particularizând formula (3.72) pentru situaţia avută în vedere, se obţine expresia ponderii pentru un segment de nivelment:

$$p_s = \frac{\text{constant}}{L_s}, \qquad (3.74)$$

care depinde de lungimea segmentului L_s şi de lungimea medie a unui niveleu de lungime medie l_n. Dacă în (3.74) se alege constanta de la numărător egală cu 1, şi se exprimă lungimea segmentului în kilometri, se obţine o formulă general utilizată la prelucrările de nivelment geometric:

$$p_i = \frac{1}{(L_i)_{km}} \ . \qquad (3.75)$$

Aceasta reprezintă ponderea unui segment de nivelment imaginar de lungime egală cu 1 km. Relaţia (3.75) s-a folosit în calculele din *Tabelul 8*.

3.5. Compensarea măsurătorilor directe

Se are în vedere şirul de măsurători directe (2.73) efectuate asupra *unei singure mărimi* şi se cere determinarea *mărimii compensate* notată x. Se vor avea în vedere măsurători independente pentru care sunt satisfăcute relaţiile (2.146).

3.5.1. Compensarea măsurătorilor directe de aceeaşi precizie

După încheierea compensării trebuie îndeplinite ecuaţiile:

$$\begin{aligned} m_1^0 + v_1 &= x; \\ m_2^0 + v_2 &= x; \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ m_n^0 + v_n &= x, \end{aligned} \qquad \text{sau sub o formă mai convenabilă:} \qquad \begin{aligned} v_1 &= x - m_1^0; \\ v_2 &= x - m_2^0; \\ \dots \quad &\dots \quad \dots \\ v_n &= x - m_n^0, \end{aligned} \tag{3.76}$$

de către toate măsurătorile efectuate.

Aşa cum s-a specificat în *Observaţiile* din *2.5.2.2.*, *corecţiile aparente* v sunt accesibile cunoaşterii umane şi pot fi determinate prin *prelucrări*, care în mod tradiţional sunt denumite în geodezie *compensări ale măsurătorilor* efectuate.

Prin ridicarea la pătrat şi însumarea relatiilor (3.76) rezultă:

$$[vv] = n\,x^2 - 2\,x\,[m^o] + [m^o m^o]. \tag{3.77}$$

Deoarece s-au presupus măsurători de precizii egale, compensarea are ca ecuaţie directoare condiţia de minim (2.157 Această condiţie este îndeplinită atunci când derivata de ordinul 1 a relaţiei de mai sus se anulează:

$$\frac{d\,[vv]}{dx} = 2\,n\,x - 2\,[m^0] = 0. \tag{3.78}$$

Din această formulă se obţine mărimea x căutată:

$$x = \frac{[m^0]}{n}, \tag{3.79}$$

care reprezintă media aritmetică a măsurătorilor efectuate.

3.5.1.1. Controlul calculelor. Deoarece în mod obişnuit în *compensările* care intervin în geodezie se operează cu un număr mare de măsurători, şi în consecinţă are loc un volum mare de calcule, etapele intermediare şi finale includ *permanent* operaţii de control, care au menirea de a *evita complet greşelile de calcul.*

➢ *Controlul sumei corecţiilor aparente v*. Dacă se adună relaţiile (3.76), se obţine:

$$[v] = n\,x - [m^o]. \tag{3.80}$$

Prin utilizarea formulei (3.79) rezultă în continuare:

$$[v] = n * \frac{[m^0]}{n} - [m^0] = 0 , \tag{3.81}$$

relaţie care este îndeplinită şi *de erorile aparente* e, conform cu relaţia (2.90), ceea ce verifică, odată în plus definiţia: $e_i = - v_i$.

- *Controlul sumei pătratelor corecţiilor aparente.* Dacă ecuaţiile (3.76) sunt înmulţite fiecare cu $v_1 \dots v_n$ şi apoi cu $m_1^0 \dots m_n^0$, rezultă prin însumare:

$$\begin{aligned} [vv] &= x\,[v] - [m^0 v]; \\ [m^0 v] &= x\,[m^0] - [m^0 m^0]. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Prin înlocuirea ultimei relaţii în precedenta şi luând în considerare formula (3.81) se obţine:

$$\begin{aligned} [vv] &= [m^0 m^0] - x\,[m^0]; \\ [vv] &= [m^0 m^0] - \frac{[m^0]^2}{n} . \end{aligned} \tag{3.83}$$

3.5.1.2. Estimarea preciziei. Dacă notăm cu X *valoarea adevărată* a mărimii x, relaţiile (3.76) se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= m_1^0 - X ; \\ \varepsilon_2 &= m_2^0 - X ; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \varepsilon_n &= m_n^0 - X , \end{aligned} \tag{3. 84}$$

unde ε_i sunt *erorile teoretice* tratate în *2.5.2.2.* Ţinând seama şi de relaţia (3.76) se obţine în continuare:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -v_1 + (x - X) ; \\ \varepsilon_2 &= -v_2 + (x - X) ; \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \varepsilon_n &= -v_n + (x - X). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Din însumarea acestor relaţii rezultă:

$$[\varepsilon] = - [v] + n (x - X) , \tag{3.86}$$

din care se obţine datorită relaţiei (3.81):

$$x - X = \frac{[\varepsilon]}{n} . \tag{3.87}$$

Prin ridicarea la patrat a relaţiilor (3.85) şi însumarea corespunzătoare pe coloane rezultă:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] - 2 (x - X) [v] + n (x - X)^2. \tag{3.88}$$

Având în vedere formulele (3.81) şi (3.87), ultima relaţie devine:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \tag{3.89}$$

Ultimul termen din formula de mai sus se poate scrie detaliat sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{[\varepsilon]^2}{n} &= \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ \ldots + \varepsilon_n)^2 = \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ \ldots + \varepsilon_n^2\right) + \\ &+ \frac{2}{n}(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \ \ldots + \varepsilon_{n\text{-}1}\varepsilon_n). \end{aligned} \tag{3.90}$$

Acestă relaţie se simplifică mult datorită proprietăţilor pe care le au *erorile teoretice* (a se vedea *2,5.2.2*) , astfel încât se poate scrie:

$$\frac{[\varepsilon]^2}{n} \approx \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{3.91}$$

Din relaţiile (3.91) şi (3.89) rezultă:

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[vv]}{n-1}, \tag{3.92}$$

formulă identică cu (2.99), care a fost dedusă însă pe alte căi.

Calculele ulterioare se bazează pe utilizarea relaţiei (2.100).

- *Abaterea standard empirică a unei singure măsurători* (imaginare) are aceeaşi expresie cu cea dedusă în *2.5.2.2* :

$$s_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{2.93}$$

- *Abaterea standard empirică a mărimii compensate x* se calculează cu formula (2.104) deoarece mărimea x este media aritmetică (3.79) a unui şir de n mărimi măsurate direct:

$$s_x = \frac{s_0}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}. \tag{3.94}$$

3.5.2. Compensarea măsurătorilor directe de precizii diferite

Ipotezele din **3.5.1.** se completează cu o nouă ipoteză: măsurătorile m_i^0 sunt de precizii diferite şi, ca urmare, au fiecare ponderi distincte, notate p_i.

Pentru calculele care vor urma este util să ridicăm la pătrat relaţiile (3.76) şi să le multiplicăm cu ponderile p_i aferente. In acest mod se obţine

$$\begin{aligned} p_1 v_1^2 &= p_1\left(x^2 - 2\,x\,m_1^0 + \left(m_1^0\right)^2\right); \\ p_2 v_2^2 &= p_2\left(x^2 - 2\,x\,m_2^0 + \left(m_2^0\right)^2\right); \\ \ldots \quad & \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ p_n v_n^2 &= p_n\left(x^2 - 2\,x\,m_n^0 + \left(m_n^0\right)^2\right). \end{aligned} \tag{3.95}$$

Prin însumare rezultă:

$$[pvv] = x^2 [p] - 2x [pm^o] + [pm^o m^o]. \tag{3.96}$$

Deoarece măsurătorile sunt independente şi de precizii diferite, prelucrarea este efectuată sub condiţia de minim (2.116). Prin urmare prima derivată a acestei funcţii trebuie să fie egală cu zero:

$$\frac{d[pvv]}{dx} = 0 = 2\,x\,[p] - 2\left[pm^0\right], \tag{3.97}$$

de unde rezultă mărimea x căutată în această situaţie particulară:

$$x = \frac{\left[pm^0\right]}{[p]}. \tag{3.98}$$

Aceasta reprezintă media ponderată a măsurătorilor avute în vedere, rezultat care s-a anticipat în **3.1.2.**, formula (3.18), dar care nu fusese demonstrat.

Observaţie

Corecţiile v_i se calculează tot cu relaţiile (3.76), dar *mărimea compensată* este obţinută cu formula (3.98).

3.5.2.1. Calcule de control. Analog ca în **3.5.1.** se deduc în continuare relaţii utile pentru controlul calculelor.

- *Controlul sumei [pv]*

După multiplicarea relaţiilor (3.76) cu ponderile aferente se obţine prin însumare:

$$[pv] = x [p] - [pm^o]. \tag{3.99}$$

Având în vedere relaţia (3.98) rezultă:

$$[pv] = \frac{\left[pm^0\right]}{[p]} * [p] - \left[pm^0\right] = 0. \tag{3.100}$$

- *Controulul sumei [pvv]*

Din relaţiile (3.96) şi (3.98) rezultă după calcule simple:

$$[pvv] = \left[pm^0 m^0\right] - \frac{\left[pm^0\right]^2}{[p]}. \tag{3.101}$$

3.5.2.2. Estimarea preciziei. Metoda care are avantaje didactice evidente pentru calculul principalilor estimatori de precizie a măsurătorilor directe ponderate este similară cu metoda folosită în **3.4.2.**. Dacă măsurătorile ponderate se multiplică cu radăcina de ordinul doi din ponderea aferentă se obţin măsurători omogene (imaginate) de aceeaşi precizie.

Această operaţiune se poate efectua şi cu *corecţiile aparente* v_i:

$$\tilde{v}_i = v_i * \sqrt{p_i}, \tag{3.91}$$

noile corecţii $\tilde{v}_i$ având ponderile egală cu unitatea. În acest fel s-a revenit la cazul examinat anterior, al măsurătorilor indirecte neponderate. Prin urmare, parametrii de precizie se obţin analog ca în *3.5.1.2.*.

- *Abaterea standard empirică a unei măsurători de pondere egală cu unitatea sau abaterea standard a unităţii de pondere* se deduce cu formula (2.81):

$$s_0 = \sqrt{\frac{[\tilde{v}\tilde{v}]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \tag{3.103}$$

- *Abaterea standard empirică a unei măsurători* m_i^0, de pondere p_i, se determină cu o formulă analogă cu formula (3.70):

$$s_{m_i^0} = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} \ . \tag{3.104}$$

- *Abaterea standard empirică a mărimii compensate* x se deduce din formula de obţinere a acestei mărimi:

$$x = \frac{1}{[p]}\left\{p_1 m_1^0 + p_2 m_2^0 + \ldots + p_n m_n^0\right\}, \tag{3.105}$$

considerată ca o funcţie de mărimi independente, măsurate direct (a se vedea **3.1.**). Prin utilizarea relaţiei (3.7) rezultă:

$$s_x^2 = \frac{1}{[p]^2}\left\{p_1^2 s_{m_1^0}^2 + p_2^2 s_{m_2^0}^2 + \ldots + p_n^2 s_{m_n^0}^2\right\}. \tag{3.106}$$

Utilizând formula (3.104) se obţine în continuare:

$$s_x^2 = \frac{1}{[p]^2} * s_0^2 [p] = \frac{s_0^2}{[p]} \ , \tag{3.107}$$

adică aceeaşi relaţie ca în **3.1.2.**:

$$s_x = \frac{s_0}{\sqrt{[p]}}. \tag{3.108}$$

Aplicaţia 17

Se consideră şirul de măsurători ponderate $\overline{m}_i^0$ din ***Aplicaţia 6*** (*Tabelul 4*). Să se determine mărimea compensată x şi principalii parametri de precizie.

Să se compare rezultatele din cele două aplicaţii.

Tabelul 9. Compensarea măsurătorilor directe ponderate

Nr. crt.	Măsurători $\overline{m}_i^0$ [m]	Ponderi p_i	Corecţii v_i [mm]	Abaterile standard empirice ale măsurătorilor $s_{\overline{m}_i^0}$ [mm]	C a l c u l e
0	1	2	3	4	5
1	143.2573	1.04	9.9	10.2	Mărimea compensată (3.98): x = 143.2672 m
2	143.2815	0.58	-14.3	13.8	Abaterea standard a unităţii de pondere (3.103): s_0 = 10.5 mm
3	143.2686	1.37	-1.4	9.0	Abaterea standard a mărimii compensate (3.107) : s_x = 3.5 mm
Sume	429.8074	2.99			

Controale

• [pv] = 0,00002 (formula (3.100))

• [pvv] = 0,00022 obţinută prin calcul direct

• [pvv] = 0,00023 (formula (3.101))

Observaţii

➢ Rezultatele finale $\overline{m}_p^0$ (în ***Aplicaţia 6***) respectiv x (în ***Aplicaţia 17***) coincid, fiind reprezentate de media ponderată a măsurătorilor directe avute în vedere.

➢ Parametrii care descriu precizia măsurătorilor şi a rezultatelor finale au valori diferite. Aceştia au fost deduşi prin utilizarea unor principii şi ipotezediferite, specifice gradului de informaţii existent într-un anumit stadiu al prelucrării măsurătorilor geodezice. Rezultatele finale diferă în primul rând datorită modalităţii de calcul al abaterii standard empirice a unei singure măsurători s_o : aceasta s-a dedus *în **Aplicaţia 6*** cu relaţia (3.9) şi în ***Aplicaţia 17*** cu relaţia (3.103). Cu relaţia (3.103) se obţin rezultate mai apropiate de cele probabile, astfel încât se poate afirma că e*stimatorii de precizie* determinaţi în ***Aplicaţia 17*** sunt deduşi într-o ipoteză mai evoluată a prelucrării decât cei corespondenţi din ***Aplicaţia 6***.

Capitolul 4
Prelucrarea măsurătorilor indirecte

În cadrul *teoriei prelucrării măsurătorilor geodezice* s-au dezvoltat, în decursul unei îndelungate perioade de timp (aproape două secole), mai multe categorii de metode de rezolvare a problemelor din ce în ce mai complexe care au intervenit în domeniul ştiinţei cunoscută sub denumirea de *geodezie.* Unele dintre aceste metode s-au perfecţionat continuu, fiind aplicate cu mai multă intensitate, altele dimpotrivă şi-au pierdut treptat aplicabilitatea. Motivaţiile în acest sens sunt multiple: randament mai scăzut sau chiar anumite dificultăţi în utilizare, în mod deosebit în ceea ce priveşte programarea calculeleor pentru a fi efectuate de calculatoarele electronice.

Rezolvările care s-au folosit cel mai des la prelucrarea observaţiilor efectuate în lucrările geodezice pot fi cuprinse în două mari categorii de metode:

- *metoda observaţiilor indirecte;*
- *metoda observaţiilor condiţionate,*

care vor fi examinate în următoarele două capitole.

Se cunosc şi alte metode, de mai mare complexitate, utilizate însă pentru rezolvarea unui număr mai restrîns de probleme, de regulă de natură ştiinţifică, astfel încât tratarea lor depăşeşte destinaţia manualului nostru.

Având în vedere limitele de extindere impuse acestui manual, despre care s-a menţionat încă din introducere, chiar în cadrul celor două metode principale menţionate mai sus se va renunţa la demonstrarea unor afirmaţii sau soluţii pentru care ar fi necesar un spaţiu prea mare. Rezultatele finale vor fi însă prezentate, deoarece se folosesc curent în prelucrările actuale.

Pentru a se asigura, pe de o parte, înţelegerea de către studenţi a tematicii expuse, iar pe de altă parte pentru a se putea permite efectuarea unei legături cu alte lucrări mai dezvoltate, expunerea se va face în paralel, atât prin notaţii clasice cât şi şi prin notaţii matriceale.

Prelucrarea măsurătorilor în reţelele geodezice mai vechi s-a realizat prin metoda observaţiilor condiţionate. În ultimele decenii, pe măsură ce posibilităţile de calcul au evoluat, s-au perfecţionat şi modelele de prelucrare, astfel încât metoda observaţiilor indirecte a căpătat o aplicabilitate aproape universală. Această metodă are următoarele avantaje specifice comparativ cu metoda observaţiilor condiţionate:

- programarea calculelor este mult mai uşor de realizat;
- evaluarea preciziei este realizată complet şi cu un volum de calcul mult mai redus;
- aplicarea unor verificări de natură statistică este mult mai accesibilă.

Din toate aceste motive, în continuare se vor descrie ambele metode menţionate, însă manualul pledează pentru introducerea programelor de prelucrare prin *metoda observaţiilor indirecte.*

4.1. Ecuaţiile corecţiilor

În acest capitol se va avea în vedere tot un şir de măsurători de forma (2.73) dar care sunt efectuate *într-o reţea geodezică,* deci nu asupra unei singure mărimi:

$$\mathbf{m^o} = \left[m_1^0,\, m_2^0,\, \ldots,\, m_n^0\right]^T. \tag{2.73}$$

Asemenea măsurători pot fi de aceeaşi precizie sau de precizii diferite şi se pot referi la un număr oarecare de mărimi, de diferite genuri (unghiuri, direcţii, distanţe, diferenţe de nivel etc.) în funcţie de tipul şi destinaţia reţelei geodezice. Pentru simplificarea expunerii, se vor avea în vedere *măsurători independente* (care respectă condiţiile (2.146)) *şi de precizii diferite.* Formulele care se vor obţine se pot particulariza, în continuare, pentru *măsurători de aceeaşi precizie* printr-o ecuaţie de forma (2.155), astfel încât matricea ponderilor devine egală cu matricea unitate (relaţia (2.156)).

Fiecare dintre aceste măsurători poate proveni din *prelucrări locale,* ca *măsuratori directe,* aşa cum s-a tratat pe larg în **2.7.3**, având un anumit grad de *corelaţie statistică,* de care ar trebui să se ţină seama în prelucrarea care se se va efectua în reţea. O astfel de tratare ar depăşi cadrul şi destinaţia manualului, motiv pentru care se vor avea în vedere, în continuare, numai *observaţii independente*.

Valorile teoretice notate $\tilde{m}$ ale măsurătorilor, rămân inaccesibile cunoaşterii umane, prin diferitele metode de prelucrare obţinându-se valori mai mult sau mai puţin apropiate de acestea.

Rezultatele prelucrărilor măsurătorilor geodezice se numesc curent, *mărimi compensate* şi vor fi notate cu **m**. În funcţie de acestea se poate defini vectorul *corecţiilor aparente obţinute prin compensare,* care va fi notat tot cu **v**, ca în *2.5.2.2.*, dar care aici rezultă *din compensarea măsurătorilor efectuate în întrega reţea geodezică:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{m} - \mathbf{m^o}. \tag{4.1}$$

Un scop important al prelucrării măsurătorilor constă in determinarea unor parametri:

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_u]^T, \tag{4.2}$$

în care se cuprind, în primul rând, parametrii de poziţionare ai reţelei geodezice în sistemul de coordonate corespondent, dar şi alte mărimi care intervin în prelucrare.

O caracteristică importantă a prelucrărilor măsurătorilor geodezice este reprezentată de faptul că *numărul de măsurători* $\mathbf{m^o}$, *notat n,* care intervine în calcule, *este întotdeauna mult mai mare decât numărul parametrilor* **X** *, notat u:*

$$n >> u \ . \tag{4.3}$$

Există posibilităti specifice fiecărui tip de reţea geodezică pentru calculul *valorilor provizorii ale parametrilor* şi care vor fi cuprinse în vectorul notat **X***:

$$\mathbf{X}^* = \left[X_1^*, X_2^*, \ldots, X_u^*\right]^T. \tag{4.4}$$

Între valorile provizorii ale parametrilor şi cele deduse din compensare există relaţia:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X^*} + \mathbf{x}, \tag{4.5}$$

în care **x** este vectorul cu care se lucrează efectiv în calculele de compensare.

Prin urmare, în urma prelucrării se vor determina două şiruri de corecţii: pentru măsurători şi respectiv pentru necunoscute:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left[v_1, v_2, \ldots, v_n\right]^T; \\ \mathbf{x} &= \left[x_1, x_2, \ldots, x_u\right]^T. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Conceptul de bază al metodei observaţiilor indirecte constă în exprimarea fiecărei mărimi m_i , pentru care s-a efectuat măsurătoarea m_i^0 (cuprinsă în vectorul (2.73)), prin parametrii conţinuţi de vectorul (4.2). Rezultă astfel un număr de n ecuaţii, cu u necunoscute în care întodeauna se respectă inecuaţia (4.3):

$$\begin{aligned} m_1 &= f_1 (X_1, X_2, \ldots, X_u); \\ m_2 &= f_2 (X_1, X_2, \ldots, X_u); \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ m_n &= f_n (X_1, X_2, \ldots, X_u). \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.1.1. Forma liniară a ecuaţiilor corecţiilor

În general, relaţiile (4.7) nu sunt de formă liniară, totalitatea lor constituind aşa-zisul *model funcţional neliniarizat al compensării măsurătorilor geodezice prin metoda măsurătorilor indirecte*. Aceste relaţii depind de geometria intrinsecă a reţelei geodezice considerate, precum şi de natura şi tipul măsurătorilor geodezice care stau la baza determinărilor

Folosind relaţiile (4.1) şi (4.5), ecuaţiile (4.7) se pot scrie mai dezvoltat sub forma:

$$\begin{aligned} m_1^0 + v_1 &= f_1 \left(X_1^* + x_1, X_2^* + x_2, \ldots, X_u + x_u\right); \\ m_2^0 + v_2 &= f_2 \left(X_1^* + x_1, X_2^* + x_2, \ldots, X_u^* + x_u\right); \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ m_n^0 + v_n &= f_n \left(X_1^* + x_1, X_2^* + x_2, \ldots, X_u^* + x_u\right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

sau, mai concentrat, sub formă matriceală:

$$\mathbf{m}^0 + \mathbf{v} = \mathbf{f}\left(\mathbf{X}^* + \mathbf{x}\right) . \tag{4.9}$$

Dezvoltând în serie **Taylor** relaţiile de mai sus, doar până la termenii de ord.1, rezultă următorul sistem de ecuaţii specific *metodei observaţiilor indirecte:*

$$\begin{aligned} m_i^0 + v_i = f_i\left(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_u^*\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_* x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)_* x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_u}\right)_* x_u \ ; \\ i = 1, 2, \ldots, n . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dacă se notează:

$$f_i\left(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_u^*\right) - m_i^0 = \ell_i \ ; \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_* = a_i \ ; \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)_* = b_i \ ; \ldots ; \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_u}\right)_* = u_i \ , \tag{4.12}$$

se obţine din (4.10) *modelul funcţional liniarizat al ecuaţiilor corecţiilor la metoda observaţiilor indirecte:*

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + u_1 x_u + \ell_1 \ ; \\ v_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + u_2 x_u + \ell_2 \ ; \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_n &= a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + u_n x_u + \ell_n \ . \end{aligned} \tag{4.13}$$

În notaţie matriceală acest sistem poate fi scris sub forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Bx} + \ell , \tag{4.14}$$

în care:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & u_n \end{bmatrix}; \qquad \ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

iar vectorii **v** şi **x** au fost definiţi cu relaţiile (4.6).

Observaţii

- ecuaţiile (4.13) se numesc uzual *ecuaţiile corecţiilor.* Trebuie atras atenţia că fiecare ecuaţie conţine o singură corecţie v;

- coeficienţii a_i, b_i,…, u_i (i = 1, …, n) se numesc coeficienţii necunoscutelor, iar mărimile ℓ_i, termeni liberi ai ecuaţiilor de corecţie. În acest sistem, formal, atât x_j (j = 1, 2, … , u) cât şi v_i (i = 1, 2, … , n) au rolul de *corecţii*, fiind în acelaşi timp şi *necunoscutele* generale care intervin în întregul complex de prelucrare a măsurătorilor *(în număr total de n+u).* Pentru a le putea evidenţia mai bine, s-au convenit, în decursul timpului, următoarele:
  - pentru cele *n* mărimi v_i, s-a adoptat denumirea de *corecţii*, deoarece ele sunt ataşate măsurătorilor geodezice directe m_i^0, efectuate în reţea, fiecare dintre acestea având rolul de a anihila un şir întreg de erori elementare aleatoare, care se produc la efectuarea măsurătorii directe corespondente m_i^0;
  - pentru cele *u* mărimi x_j, s-a adoptat noţiunea de *necunoscute,* acestea find ataşate mărimilor aproximative X_j^* cu care se operează în modelul funcţional.
- trebuie accentuat că numărul ecuaţiilor din sistemul (4.13) este egal cu numărul de măsurători efectuate în reţea, iar scrierea acestora depinde de tipul de măsurători avute în vedere, ceea ce uşurează mult elaborarea programelor pentru calculatoarele electronice;
- calculele de formare a matricei **B** (care are, în baza notaţiilor introduse, n linii şi u coloane) sunt dependente de natura reţelei geodezice, de dimensiunile sale, precum şi de modul în care sunt dispuse efectiv măsurătorile geodezice în reţea. De aceea, această matrice este denumită *matrice de configuraţie* (*a reţelei geodezice*). Coeficienţii conţinuţi de matricea **B** sunt calculabili, în funcţie de valorile provizorii ale necunoscutelor X*, aşa cum s-a notat simbolic în relaţiile de definiţie (4.12) prin indicele inferior * la fiecare derivată parţială;
- la rândul lor, valorile aproximative X_j^* (j = 1, 2, … , n) se pot determina, prin relaţii matematice specifice fiecărui tip de reţea geodezică;
- dacă încă de la început, funcţiile $\mathbf{f}_i$, au o formă liniară, de tipul reprezentat în (4.13) nu mai este necesară operaţia de linializare. Cu toate acestea este indicată introducerea valorilor provizorii X_j^* pentru ca în calcule să se opereze cu numere mici.
- referitor la operaţiile de întocmire a sistemului liniar al ecuaţiilor de corecţie se mai fac următoarele precizări:

- fiecare măsurătoare directă m_i^0, generează o ecuaţie de corecţie. Mărimile măsurate direct şi afectate de erori m_i^0, intră doar în calculul termenilor liberi, aşa cum se observă din relaţia (4.11). Rezultă că eroarea termenului liber va fi egală cu eroarea mărimii măsurate, deoarece mărimile provizorii X* pot fi considerate constante în situaţia examinată;
- dacă mărimile medii m_i^0, au fost măsurate direct cu aceeaşi precizie şi ecuaţiile sistemului liniar de corecţie vor fi de aceeaşi precizie. In caz contrar va rezulta un sistem liniar de ecuaţii în care fiecare dintre acestea are o anumită pondere, identică cu cea a măsurătorii din care provine ecuaţia. Acestea pot fi reduse la sisteme de aceeaşi precizie, dacă fiecare ecuaţie se multiplică cu radicalul de ordinul doi din ponderea mărimii măsurate, aşa cum s-a arătat în partea finală la *2.7.3.2.*. şi s-a mai procedat în cadrul unor aplicaţii precedente;
- conform observaţiilor anterioare, rezultă că ecuaţiile de corecţii nu pot fi multiplicate cu constante diferite întrucât se vor modifica ponderile ecuaţiilor;
- atunci când coeficienţii unei necunoscute, de exemplu a_i, sunt mult mai mici sau mult mai mari decât coeficienţii celorlalte necunoscute b_i, c_i, …, pentru necunoscuta corespondentă x_1 se va introduce *preliminar* în prelucrare o mărime intermediară $x_1' = 10^k x_1$, unde puterea k trebuie aleasă convenabil astfel încât să se realizeze omogenizarea coeficienţilor ecuaţiilor (aceştia să aibă aproximativ acelaşi ordin de mărime). Pentru a nu se modifica soluţiile corecte ale sistemului liniar al ecuaţiilor de corecţii iniţiale, va trebui ca în partea finală a prelucrării să se împartă necunoscuta respectivă x_1', obţinută din compensare, cu constanta 10^k.

4.1.2. Posibilităţi de estimare a ponderilor ecuaţiilor corecţiilor

Aşa cum s-a menţionat la începutul acestui capitol, în continuare se vor avea în vedere măsurători ponderate, cuprinse în vectorul:

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]^T, \tag{4.16}$$

sau mai general în matricea **P** definită prin formula (2.150).

Definiţia *teoretică* a ponderilor este dată de relaţia (2.149), care cuprinde însă mărimi care nu pot fi determinante practic (a se vedea **2.7.2.**).

În diverse etape ale prelucrării, se pot determina valori din ce în ce mai exacte ale ponderilor. Acestea reprezintă componente importante ale *modelului stochastic al prelucrării* şi pot influenţa benefic sau negativ desfăşurarea acesteia, inclusiv rezultatele finale, în funcţie de modul în care au fost calculate. În diverse aplicaţii (relaţia (3.9), *Tabelul 4* ş.a.) s-au făcut unele referiri concrete la determinarea ponderilor.

Completăm lista acestora cu alte posibilităţi, rezultate din utilizarea unor ipoteze mai mult sau mai puţin exacte, a căror expunere, în detaliu, nu este neapărat necesară.

*4.1.2.1. Estimarea ponderilor în funcţie de erorile medii de măsurare, calculate în prelucrări locale: (**Ghiţău**, 1983, pg.385):*

- *în cazul măsurării direcţiilor orizontale*, în funcţie de eroarea s'_α a unei direcţii oarecare, rezultată la compensarea în staţie, toate vizele din staţia respectivă ar putea primi aceeaşi pondere:

$$p_\alpha = \frac{c}{(s'_\alpha)^2}, \tag{4.17}$$

în care c este o constantă (determinată, de exemplu, ca o valoare medie aproximativă a tuturor erorilor $(s'_\alpha)_R$ obţinute în punctele reţelei geodezice, notate simbolic R);

- *în cazul observaţiilor unghiulare zenitale*, ponderea ar putea fi exprimată în funcţie de varianţa empirică a diferenţei de nivel $(s_{\Delta h})$ sau în funcţie de pătratul distanţei D dintre cele două puncte:

$$p_\zeta^{(1)} = \frac{c}{(s'_{\Delta h})^2}\ ; \qquad p_\zeta^{(2)} = \frac{c}{D^2}. \tag{4.18}$$

Ultima relaţie are o aplicabilitate mult mai mare.

Uneori s-a folosit în acest scop eroarea unghiului zenital mediu:

$$p_\zeta^{(3)} = \frac{c}{\left(s'_{\zeta m}\right)^2}\ ; \tag{4.19}$$

- în cazul prelucrării diferenţelor de nivel s-a folosit, aproape fără excepţie formula utilizată deja:

$$p_{\Delta h} = \frac{1}{L_{km}}, \tag{3.75}$$

L_{km} fiind lungimea liniei de nivelment exprimată în kilometri. În acest fel abaterea standard a unităţii de pondere rezultă în $mm/\sqrt{L_{km}}$, atunci când corecţiile v sunt determinate în mm;

- *în cazul prelucrări distanţelor*, ponderea se determină de regulă cu formula:

$$p_D = \frac{1}{(s'_D)^2} \ , \tag{4.20}$$

unde:

$$s'_D = a + b * D_{(km)} \ , \tag{4.21}$$

în care a şi b sunt constante specifice pentru fiecare aparat. De exemplu, pentru instrumentrul Kern Mekometer 3000, aceste constante au următoarele valori: a = 0,2 mm iar b = 0,1 mm/km. Cititorul este îndrumat să facă singur legăturile dintre relaţiile (4.21) şi (3. 9).

4.1.2.2. Estimarea ponderilor în funcţie de numărul de măsurători. Numărul observaţiilor efectuate asupra unei mărimi influenţează direct precizia de măsurare şi ca urmare ponderea sa. Ca urmare, numărul de măsurători poate împărţi măsurătorile efectuate în grupe de precizii diferite.

4.1.2.3. Estimarea ponderilor în funcţie de prelucrări preliminare separate. Determinarea ponderilor poate fi considerată un proces interativ:

- într-o primă iteraţie se realizează compensarea reţelei geodezice, considerându-se toate măsurătorile de ponderi egale;
- în etapele următoare ale compensării se dispune de estimatori s pentru fiecare dintre tipurile de măsurători rezultate din prima interaţie a compensării. Se poate face astfel o partajare a acestora (**Wolf**, 1968, **Ghiţău**, 1983 ş.a.), prin atribuirea unor coeficienţi globali de pondere, care se pot calcula în funcţie de tipurile de măsurători care intervin în reţeaua geodezică;
- prelucrarea se repetă, în aceeaşi strategie, pînă când valoarea coeficienţilor globali de pondere se stabilizează.

4.2 . Ecuatiile normale

Aşa cum s-a specificat de mai multe ori în manual, în cazul *metodei observaţiilor indirecte* numărul n de măsurători (implicit de ecuaţii de corecţii) este întodeauna mai mare decât numărul de necunoscute u care trebuie determinate. În aceste condiţii, sistemul de ecuaţii (4.13) se poate rezolva numai prin introducerea unei condiţii suplimentare, care de regulă are *forma specifică proceselor de optimizare*, în care intervine o condiţie de *minim* (sau de *maxim*).

4.2.1. Formarea sistemului de ecuaţii normale

Pentru realizarea dezideratului menţionat mai înainte, în prelucrările observaţiilor geodezice se foloseşte algoritmul cunoscut sub denumirea **Gauss-Markov**, care are ca *funcţie obiectiv* (*funcţie scop*) una dintre relaţiile (2.145), (2.116) sau 2.157), în funcţie de caracteristicile modelului stochastic al prelucrării.

Dacă ne referim la cel mai des folosit model stochastic în prezent, reflectat de condiţia (2.116) se poate scrie mai în detaliu:

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 \rightarrow \text{minim} \ , \tag{4.22}$$

sau în raport de sistemul (4.13):

$$\begin{aligned} F = [pvv] = p_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + u_1 x_u + \ell_1)^2 & + \\ + p_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + u_2 x_u + \ell_2)^2 & + \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ + p_n(a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + u_n x_u + \ell_n)^2 & \rightarrow \text{minim} \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Minimul funcţiei (4.23) este realizat atunci când se respectă condiţiile:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \ ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \ ; \quad \ldots ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_u} = 0 \, . \tag{4.24}$$

Ca exemplificare, vom proceda în detaliu pentru prima condiţie de mai sus, din care rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2p_1 a_1 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + u_1 x_u + \ell_1)^2 & + \\ + 2p_2 a_2 (a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + u_2 x_u + \ell_2)^2 & + \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ + 2p_n a_n (a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + u_n x_u + \ell_n)^2 & = 0 \, , \end{aligned} \qquad 4.25)$$

sau ţinând seamă din nou de sistemul (4.13):

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = [pav] = 0 \ . \tag{4.26}$$

Analog, folosind celelalte condiţii din (4.24) rezultă:

$$[pbv] = 0 \ ; \quad [pcv] = 0 \ ; \quad \ldots \ ; \quad [puv] = 0 \ . \tag{4.27}$$

Ansamblul condiţiilor (4.26), (4.27) poate fi scris sub următoarea formă matriceală:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \ . \tag{4.28}$$

Dacă se folosesc condiţiile menţionate mai sus şi se îmulţesc corespunzător ecuaţiile sistemului (4.13) rezultă, după însumările corespondente, următorul sistem:

$$\begin{aligned} [paa]x_1 + [pab]x_2 + \ldots + [pau]x_u + [pa\ell] &= 0 \ ; \\ [pab]x_1 + [pbb]x_2 + \ldots + [pbu]x_u + [pb\ell] &= 0 \ ; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ [pau]x_1 + [pbu]x_2 + \ldots + [puu]x_u + [pu\ell] &= 0 \, , \end{aligned} \tag{4.29}$$

care poartă denumirea de *sistem al ecuaţiilor normale*. Acesta are următoarele caracteristici principale:

- numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor;

- sistemul este simetric faţă de diagonală;
- termenii de pe diagonală sunt pătratici (sunt toţi pozitivi).

Sub formă matriceală, sistemul de ecuaţii normale se pot scrie astfel:

$$\mathbf{N\,x} + \ell^{*} = \mathbf{0}\,, \qquad (4.30)$$

în care s-au notat:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{B}\,; \quad \ell^{*} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\ell\,. \qquad (4.31)$$

Se demonstrează că în cazul reţelelor geodezice *fără constrîngeri* sau al reţelelor geodezice *constrînse*

$$\text{rang}\,\mathbf{B} = \text{rang}\,\mathbf{N} = r = \min(n,u) = u\,. \qquad (4.32)$$

În asemenea situaţii se poate calcula matricea inversă notată $\mathbf{N}^{-1}$, care are următoarele proprietăţi principale:

$$\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{N} = \mathbf{N}\,\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{I}\,, \qquad (4.33)$$

unde cu **I** s-a notat matricea unitate.

Matricea inversă $\mathbf{N}^{-1}$ va îndeplini un rol important în evaluarea preciziei mărimilor rezultate din prelucrare:

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{x_1x_1} & \mathbf{Q}_{x_1x_2} & \cdots & \mathbf{Q}_{x_1x_u} \\ \mathbf{Q}_{x_1x_2} & \mathbf{Q}_{x_2x_2} & \cdots & \mathbf{Q}_{x_2x_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Q}_{x_1x_u} & \mathbf{Q}_{x_2x_u} & \cdots & \mathbf{Q}_{x_ux_u} \end{bmatrix}. \qquad (4.34)$$

Componentele $Q_{X_iX_i}$ ai matricei $\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}$ se numesc *coeficieţi de pondere ai parametrilor* X_j.

În aceste condiţii, din sistemele (4.29) respectiv (4.30) se pot calcula parametrii **x** ai modelului funcţional:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{N}^{-1}\,\ell^{*}. \qquad (4.35)$$

Introducând valorile calculate ale parametrilor **x** în ecuaţiile (4.13) se pot calcula corecţiile **v** şi, în continuare, *valorile probabile ale parametrilor* **X** (cu relaţia (4.5)) şi *ale mărimilor compensate* **m** (cu relaţia (4.1)) *In acest fel se încheie prima etapă a prelucrării.*

În cazul *reţelelor geodezice libere*, în care nu se acceptă nici un *punct geodezic cu coordonate fixe*, condiţia (4.32) nu mai este respectată, luând naştere un *defect de rang*, ce va fi notat cu d:

$$d = u - r, \qquad (4.36)$$

care este acelaşi pentru matricile **B** şi **N**. Ca urmare, matricea sistemului de ecuaţii normale devine singulară:

$$\det \mathbf{N} = 0, \qquad (4.37)$$

adică nu mai este posibilă determinarea matricei inverse clasice $\mathbf{N^{-1}}$. Abordarea unei asemenea problematici depăşeşte cadrul manualului şi poate fi urmărită de cititorul interesat în lucrări mai dezvoltate (**Koch**, 1980, 1985, **Ghiţău**, 1983 ş.a.).

4.2.2. Indicaţii practice privind formarea sistemului ecuaţiilor normale. Controlul calculelor

În cazul în care calculele se efectuează cu calculatoare neprogramabile, este indicat ca acestea să se desfăşoare ca în *Tabelul 10*, care conţine şi controale specifice, astfel încât să fie evitată *orice greşală de calcule*.

Tabelul 10. Formarea ecuaţiilor normale.

Nr. crt.	P_i	a_i	b_i		u_i	ℓ_i	s_i	p_ia_i	p_ib_i		p_iu_i	p_il_i	p_is_i	Con-troale
1	P_1	a_1	b_1	…	u_1	ℓ_1	s_1	p_1a_1	p_1b_1	…	p_1u_1	$p_1\ell_1$	p_1s_1	X
2	P_2	a_2	b_2	…	u_2	ℓ_2	s_2	p_2a_2	p_2b_2	…	p_2u_2	$p_2\ell_2$	p_2s_2	X
	...			…			…			…			…	…
n	P_n	a_n	b_n	…	u_n	ℓ_n	s_n	p_na_n	p_nb_n	…	p_nu_n	$p_n\ell_n$	p_ns_n	X
Σ		[a]	[b]	…	[u]	[ℓ]	[s] /[s]	[pa]	[pb]		[pu]	[pℓ]	$[ps]_1$	$[ps]_2$

Aşa cum se observă, în prima parte a *Tabelului 10* se formează sume notate sumele s_i i(1,2, … ,n) , pe fiecare linie a tabelului, în care *nu se includ ponderile p_i*, ci doar coeficienţii ecuaţiilor:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 + b_1 + \ldots + u_1 + \ell_1 ;\\
s_2 &= a_2 + b_2 + \ldots + u_2 + \ell_2 ;\\
\ldots &\quad \ldots \qquad \ldots\\
s_n &= a_n + b_n + \ldots + u_n + \ell_n .
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Un prim control al calculelor este oferit de însumarea pe verticală a termenilor care intervin în sistemul (4.38)

$$[s] = [a] + [b] + \ldots + [u] + [\ell] , \tag{4.39}$$

rezultat care este identic cu însumarea termenilor din coloana notată s_i.

În partea a doua a *Tabelului 10* se fac produsele dintre ponderile ecuaţiilor atât cu coeficienţii care intervin în acestea şi apoi cu sumele s_i determinate anterior. Se obţine prin urmare, din sistemul (4.38):

$$
\begin{aligned}
p_1 s_1 &= p_1 a_1 + p_1 b_1 + \ldots + p_1 u_1 + p_1 \ell_1 \ ;\\
p_2 s_2 &= p_2 a_2 + p_2 b_2 + \ldots + p_2 u_2 + p_2 \ell_2 \ ;\\
\ldots & \quad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
p_n s_n &= p_n a_n + p_n b_n + \ldots + p_n u_n + p_n \ell_n \ .
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Fiecare dintre ecuaţiile de mai sus oferă un control pe *fiecare linie*, care poate fi formulat astfel: *suma produselor dintre ponderea liniei şi coeficienţii ecuaţiilor corecţilor din linia considerată trebuie să fie egală cu produsul dintre ponderea respectivă şi suma s corespondentă*.

Însumând pe verticală termenii care sunt incluşi în (4.40) se obţine:

$$[ps] = [pa] + [pb] + \ldots + [pu] + [p\ell]. \tag{4.41}$$

Formula de mai sus generalizează regula de control menţionată mai sus, existând posibilitatea ca termenul [ps] să se formeze în două moduri:

- se adună pe orizontală cifrele din partea a 2-a a *Tabelului 10* şi rezultă $[ps]_1$;
- se adună pe verticală cifrele din coloana *controale*, şi rezultă $[ps]_2$. Evident, controlul final va fi dat de relaţia:

$$[ps]_1 = [ps]_2. \tag{4.42}$$

Tabelul 11. Ecuaţiile normale. Controlul calculelor

a]	b]		u]	l]	s]	
[paa]	[pab]	…	[pau]	[paℓ]	[pas]	Control
	[pbb]	…	[pbu]	[pbℓ]	[pbs]	Control
		…	…	…	…	…
			[puu]	[puℓ]	[pus]	Control
				[p$\ell\ell$]	[pls]	Control

Şi la formarea propriu-zisă a ecuaţiilor normale se poate aplica regula menţionată anterior, cu adaptările respective, pentru controlul calculelor *pe fiecare linie* a *Tabelului 11* (*pentru fiecare ecuaţie normală*).

Deoarece sistemul ecuaţiilor normale este simetric faţă de diagonală, *Tabelul 11* conţine doar coeficienţii necunoscutelor situaţi deasupra acestei diagonale. Din acest motiv pentru prima linie controlul calculelor decurge firesc, pentru celelalte linii, controlul se execută şi prin considerarea termenilor situaţi deasupra liniei respective, pe verticala termenului pătratic (aşa-zisul *control în L*). Spre exemplificare, să examinăm controlul formării coeficienţilor din ecuaţia a doua normală. Pentru aceasta sistemul (4.40) este îmulţit pe verticală corespunzător cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ şi după însumare rezultă:

$$[pbs] = [pab] + [pbb] + \ldots + [pbu] + [pb\ell]. \tag{4.43}$$

Se confirmă astfel, ceea ce s-a menţionat anterior: la însumarea coeficienţilor care intervin în linia a doua a *Tabelului 11* se adună şi termenul [pab] situat pe verticală, pentru a se obţine controlul cu termenul [pbs] din ultima coloană a liniei.

4.2.3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii normale

Una dintre problemele care necesită un volum de calcul remarcabil, în cadrul tuturor prelucrărilor măsurătorilor geodezice, este constituită de rezolvarea sistemelor de ecuaţii normale de formele (4.29) sau (4.30) pentru metoda observaţiilor indirecte. Sisteme de ecuaţii normale asemănătoare se vor obţine şi pentru metoda observatiilor condiţionate (în capitolul următor). Acestea sunt sisteme de ecuaţii liniare, în care numărul necunoscutelor este egal cu cel al ecuaţiilor.

Se cunosc multe metode de rezolvare a unor asemenea sisteme care s-au dezvoltat pe măsura creşterii dimensiunilor acestora (în cadrul reţelelor geodezice naţionale ale marilor state ale lumii rezultă sisteme normale cu zeci sau chiar sute de mii de ecuaţii) şi a dezvoltării tehnicii de calcul.

Dintre aceste metode se distinge *metoda eliminărilor succesive* a lui **Gauss**, atât din punctul de vedere al *tradiţiei de aplicare* în geodezie, precum şi prin posibilităţile pe care le oferă la controlul calculelor pe parcurs şi în finalul acestora. Metoda s-a aplicat şi se aplică şi în prezent aproape în toate situaţiile în care rezolvarea sistemului de ecuaţii se realizează cu mijloace de calcul neprogramabile. Aşa cum o arată şi numele, metoda are ca principiu eliminarea în trepte a necunoscutelor care intervin în sistemul de ecuaţii normale.

Ca exemplificare se prezintă în continuare rezolvarea unui sistem de 3 ecuaţii normale, specifice observaţiilor de precizi diferite, având ca model exemplul din **Fotescu** (1975, pg. 43):

$$\begin{aligned} [paa]x_1 + [pab]x_2 + [pac]x_3 + [pa\ell] &= 0\,; \\ [pab]x_1 + [pbb]x_2 + [pbc]x_3 + [pb\ell] &= 0\,; \\ [pac]x_1 + [pbc]x_2 + [pcc]x_3 + [pc\ell] &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Metoda de rezolvare constă din reducerea numărului de necunoscute, prin eliminări succesive.

Din prima ecuaţie a sistemului (4.44) *se elimină* necunoscuta x_1:

$$x_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}x_2 - \frac{[pac]}{[paa]}x_3 - \frac{[pa\ell]}{[paa]}\,, \tag{4.45}$$

şi se introduce în celelalte două ecuaţii, rezultând:

$$\left\{[pbb]-\frac{[pab][pab]}{[paa]}\right\}x_2+\left\{[pbc]-\frac{[pab]\,[pac]}{[paa]}\right\}x_3+\left\{[pb\ell]-\frac{[pab]\,[pa\ell]}{[paa]}\right\}=0\ ;$$
$$\left\{[pbc]-\frac{[pab]\,[pac]}{[paa]}\right\}x_2+\left\{[pcc]-\frac{[pac]\,[pac]}{[paa]}\right\}x_3\ +\left\{[pc\ell]-\frac{[pac]\,[pa\ell]}{[paa]}\right\}=0. \tag{4.46}$$

În continuare se introduc notaţiile:

$$[pbb.1]=[pbb]-\frac{[pab]\,[pab]}{[paa]}\ ;\quad [pbc.1]=[pbc]-\frac{[pab]\,[pac]}{[paa]}\ ;$$
$$[pbl.1]=[pbl]-\frac{[pab]\,[pal]}{[paa]}\ ;\quad [pcc.1]=[pcc]-\frac{[pac]\,[pac]}{[paa]}\ ; \tag{4.47}$$
$$[pc\ell.1]=[pc\ell]-\frac{[pac]\,[pa\ell]}{[paa]}\ ,$$

denumite *algoritmi* **Gauss** *de ordinul 1.* Aceştia reprezintă noi expresii ale coeficienţilor necunoscutelor, şi au o semnificaţie relativ simplu de stabilit, prin compararea corespondentă a sistemelor (4.46) cu (4.47). Prin intermediul acestora, ecuaţiile (4.46) se pot scrie mai concentrat:

$$[pbb.1]x_2+[pbc.1]x_3+[pb\ell.1]=0\ ;$$
$$[pbc.1]x_2+[pcc.1]x_3+[pc\ell.1]=0. \tag{4.48}$$

Observaţie

Algoritorii Gauss au o regulă simplă de formare, pe care cititorul o poate deduce cu uşurinţă din relaţiile de definiţie (4.47). Regula se păstrează şi în continuare, la formarea *algoritmilor* **Gauss** de ordinul 2, care vor interveni în ecuaţiile următoare, dar şi la *algoritmii* **Gauss** de ordinul 3, 4, … ş.a.m.d., în funcţie de numărul ecuaţiilor cuprinse de sisteme de forma (4.44).

Din prima ecuaţie a sistemului de mai sus *se elimină* în continuare necunoscuta x_2:

$$x_2=-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}x_3-\frac{[pb\ell.1]}{[pbb.1]}\ , \tag{4.49}$$

a cărei valoare se introduce în a doua ecuaţie a sistemului (4.48), rezultând:

$$\left\{[pcc.1]-\frac{[pbc.1]\,[pbc.1]}{[pbb.1]}\right\}x_3+\left\{[pc\ell.1]-\frac{[pbc.1]\,[pb\ell.1]}{[pbb.1]}\right\}=0. \tag{4.50}$$

Utilizînd notaţiile specifice pentru *algoritmii Gauss* de ordinul 2 se poate scrie:

$$[pcc.2]=[pcc.1]-\frac{[pbc.1]\,[pbc.1]}{[pbb.1]}=[pcc]-\frac{[pac]\,[pac]}{[paa]}-\frac{[bc.1]\,[bc.1]}{[bb.1]}\ ;$$
$$[pc\ell.2]=[pc\ell.1]-\frac{[pbc.1]\,[pb\ell.1]}{[pbb.1]}=[pc\ell]-\frac{[pac]\,[pa\ell]}{[paa]}-\frac{[pbc.1]\,[pb\ell.1]}{[pbb.1]}. \tag{4.51}$$

În acest mod ecuaţia (4.50) se poate scrie mult mai concentrat, sub forma:

$$[pcc.2]\ x_3\ +[pc\,\ell\,.2]=0\ . \tag{4.52}$$

Ca un prim rezultat al rezolvării sistemului de ecuaţii normale avut în vedere se obţine:

$$x_3 = -\frac{[pc\ell.2]}{[pcc.2]}. \tag{4.53}$$

În continuare, în ordine inversă, cu relaţiile (4.49) şi (4.45) se deduc necunoscutele x_2 şi x_1. Toate calculele de eliminare cât şi de determinare a necunoscutelor se pot face într-un tabel numit *schema* **Gauss**, *redusă* care se prezintă în continuare, în *Tabelul 12*.

4.2.4. Indicaţii practice privind rezolvarea sistemului de ecuaţii normale cu metoda Gauss. Controlul calculelor

Calculele în *schema* **Gauss** redusă se desfăşoară astfel:

- se înscriu coeficienţii ecuaţiilor normale în liniile:
  - pentru ecuaţia 1 în linia (1);
  - pentru ecuaţia 2 în linia (3);
  - pentru ecuaţia 3 în linia (6).

Tabelul 12. Schema Gauss redusă

	X_1	x_2	x_3	L	S	control
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	[paa]	[pab]	[pac]	$[pa\ell]$	[pas]	
(2)	-1	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$	$-\frac{[pa\ell]}{[paa]}$	$-\frac{[pas]}{[paa]}$	se face control
(3)	$x_1 = \ldots$	[pbb]	[pbc]	$[pb\ell]$	[pbs]	
(4)		[pbb.1]	[pbc.1]	$[pb\ell.1]$	[pbs.1]	se face control
(5)		-1	$-\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$	$-\frac{[pb\ell.1]}{[pbb.1]}$	$-\frac{[pbs.1]}{[pbb.1]}$	se face control
(6)		$x_2 = \ldots$	[pcc]	$[pc\ell]$	[pcs]	
(7)			[pcc.2]	$[pc\ell.2]$	[pcs.2]	se face control
(8)			-1	$-\frac{[pc\ell.2]}{[pcc.2]}$	$-\frac{[pcs.2]}{[pcc.2]}$	se face control
			$x_3 = \ldots$			

Verificarea soluţiilor:

[(S - L) x] = … ; -[L] = …

Deoarece sistemul este simetric, este suficient să fie înscrişi coeficienţii de pe diagonală şi cei situaţi deasupra acesteia;

- se împarte linia (1), cu coeficientul - [paa], obţinându-se linia (2) şi care se regăseşte în prima ecuaţie eliminatoare (4.45). Controlul din linia 2 este uşor de demonstrat de către cititor. Analog decurg controalele din liniile (5) şi (8) sau şi din alte linii, similare, atunci cînd sistemul de ecuaţii normale are dimensiuni mai mari;
- linia (4) care conţine *algoritmii* **Gauss** *de ordinul 1* se obţine astfel:
  - se ia ca pivot elementul din linia (2), coloana (2), adică - $\frac{[pab]}{[paa]}$ şi se îmulţeşte succesiv cu elementele din linia (1), iar la fiecare dintre aceste produse se adaugă în mod corespondent coeficienţii din linia (3);
  - se face controlul specific pentru linia (4):

$$[pbb.]+[pbc.1]+[pb\ell.1] = [pbs.1]. \tag{4.54}$$

Demonstraţia rezultă din dezvoltarea *algoritmilor* **Gauss** *de ordinul 1*, care intervin în relaţia de mai sus, şi ordonarea convenabilă a termenilor. Astfel dacă se dezvoltă termenii din partea stîngă ai relaţiei (4.54) rezultă:

$$[pbb]-\frac{[pab]\,[pab]}{[paa]}+[pbc]-\frac{[pab]\,[pac]}{[paa]}+[pb\ell]-\frac{[pab]\,[pa\ell]}{[paa]}=$$

$$=[pbb]+[pbc]+[pb\ell]-\frac{[pab]}{[paa]}\{[pab]+[pac]+[pa\ell]\}=\{\,[pbs]-[pab]-\frac{[pab]}{[paa]}\{[pas]-[paa]\}= \tag{4.55}$$

$$[pbs]-[pab]-\frac{[pab]}{[paa]}[pas]+[pab]=[pbs]-\frac{[pab]\,[pas]}{[paa]}=[pbs1]\,,$$

ceea ce reprezintă termenul obţinut în coloana S , linia (4) a *Tabrlului 12.*

Analog se poate demonstra controlul din linia (7) sau din oricare dintre liniile care conţin *algoritmi* **Gauss** *de ordin superior*, atunci când sistemul de ecuaţii este de dimensiuni mai mari;

- pentru deducerea *algoritmilor* **Gauss** de ordinul II din linia (7), deci pentru obţinerea coeficienţilor ecuaţiei (4.52) se procedează analog:
  - se vor considera doi pivoţi şi anume:
    - elementul din linia (2), coloana (3), adică - $\frac{[pac]}{[paa]}$ şi
    - elementul din linia (5), coloana (3), adică - $\frac{[pbc.1]}{[pbb.1]}$;

- aceşti pivoţi se înmulţesc succesiv cu elementele din liniile de deasupra lor, se adună aceste produse rezultate, la care se însumează corespuzător elementele din linia (6).

Aşa cum s-a specificat mai sus, controlul calculelor din linia (7) este dat de relaţia:

$$[pcc.2] + [pcl.2] = [pcs.2], \tag{4.56}$$

care poate fi demonstrată analog cu modul în care s-a procedat cu relaţia (4.54):

- Linia (8) se deduce din linia (7), prin împărţire cu -[pcc.2];
- se deduc necunoscutele şi anume:
  - din linia (8) se deduce $x_3 = -\frac{[pc\ell.2]}{[pcc.2]}$;
  - din linia (5) se deduce necunoscuta x_2 , iar din linia (2) se determină necunoscuta x_1.
- *Verificarea rezolvării sistemului de ecuaţii normale se poate face în două moduri*:
  - se introduc necunoscutele în fiecare ecuaţie a sistemului iniţial (4.44), pe care acestea trebuie să le verifice (în limita aproximaţiilor de calcul);
  - printr-o singură relaţie, aşa cum este specificat sub *Tabelul 12*. Pentru demonstrarea acestui control, se adună toate ecuaţiile sistemului (4.44) şi se ordonează corespunzător rezultatul:

$$\{[paa] + [pab] + [pac]\}x_1+\{[pab] + [pbb] + [pbc]\}x_2 + \\ +\{[pac] + [pbc] + [pcc]\}x_3 = -[pa\ell]-[pb\ell]-[pc\ell]. \tag{4.57}$$

Dacă se au în vedere relaţiile de forma (4.43) se poate scrie în continuare:

$$\{[pas]-[pa\ell]\}x_1+\{[pbs]-[pb\ell]\}x_2+\{[pcs]-[pc\ell]\}x_3 = -[pa\ell]-[pb\ell]-[pc\ell], \tag{4.58}$$

sau prin utilizarea notaţiilor din *schema* **Gauss** *redusă*:

$$(S_1- L_1)x_1 + (S_2-L_2)x_2 + (S_3- L_3)x_3 = -L_1 - L_2 - L_3. \tag{4.59}$$

Utilizând simbolul *sumă* **Gauss**, relaţia de mai sus se poate scrie sub o formă mai concentrată, care reprezintă în acelaşi timp demonstraţia căutată:

$$[(S-L)x] = - [L]. \tag{4.60}$$

Această verificare va fi satisfăcută în limita aproximaţiilor de calcul - care este reprezentată de numărul de cifre utilizat, de numărul ecuaţiilor şi mai ales de conformarea sistemului.

Determinarea unor toleranţe în ceea ce priveşte controalele specificate în *Tabelul 12,* este dificil de realizat. Din acest motiv, în practică, pentru mai multă siguranţă, la determinarea soluţiilor cu n cifre exacte, calculele se efectuează cu n+2 sau chiar n+3 cifre, în special pentru liniile (2), (5), (8) … ş. a. m. d.

4.2.5. Calcule de control al rezultatelor prelucrării

Controlul permanent care s-a făcut la fiecare etapă trebuie completat cu controlul rezultatelor finale ale prelucrării. Se vor examina în continuare cele mai uzuale posibilităţi:

4.2.5.1. Controlul condiţiilor de bază pe care trebuie să-l îndeplinească corecţiile v este reprezentat de respectarea ecuaţiilor (4.26) respectiv (4.27):

$$[pav] = [pbv] = \ldots = [puv] = 0. \qquad (4.27)$$

Verificările de mai sus se pot efectua în tabele de forma *Tabelului 10* la care se mai adaugă o coloană care cuprinde corecţiile v obţinute prin prelucrare (aşa cum se va proceda în ***Aplicaţia 18***).

4.2.5.2. Calculul termenului [pvv]. Deoarece termenul [pvv] este un element principal în toate formulele prin care se determină parametrii care descriu precizia măsurătorilor şi a mărimilor rezultate din prelucrare, această sumă se calculează cu două relaţii, pentru a se asigura controlul necesar.

- o primă modalitate de calcul este cel direct:

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2, \qquad (4.61)$$

care se poate realiza în acelaşi *Tabel 10*, completat cu o coloană suplimentară, în care se trec corecţiile v, obţinute prin prelucrare;

- o altă relaţie de calcul se poate obţine *din modelul funcţional liniarizat al prelucrării*, reprezentat de ecuaţiile (4.13). Se multiplică fiecare linie a sistmului, corespunzător, cu p_1v_1, p_2v_2, …, p_nv_n şi se însumează rezultatele, după care se obţine:

$$[pvv] = x_1[pav] + x_2[pbv] + \ldots + x_u[puv] + [pv\ell]. \qquad (4.62)$$

Luând în considerare condiţiile (4.61) rezultă imediat:

$$[pvv] = [pv\ell], \qquad (4.63)$$

relaţie care poate fi folosită în scopul enunţat.

În mod curent se foloseşte o altă relaţie, dedusă prin îmulţirea fiecărei ecuaţii a sistemului (4.13) cu $p_1\ell_1$, $p_2\ell_2$, …, $p_n\ell_n$ şi însumarea pe coloane a rezultatelor:

$$[pv\ell] = [pa\ell]x_1 + [pb\ell]x_2 + \ldots + [pu\ell]x_u + [p\ell\ell], \qquad (4.64)$$

sau împreună cu (4.63):

$$[pvv] = [pa\ell]x_1 + [pb\ell]x_2 + \ldots + [pu\ell]x_u + [p\ell\ell]. \qquad (4.65)$$

Acest control acoperă un volum important de calcule, deoarece cuprinde atât obţinerea corecţiilor v cât şi a parametrilor x.

4.2.5.3. Controlul global al compensării, cunoscut şi sub denumirea de *controlul final* al prelucrării, este reprezentat de *verificarea modelului funcţional neliniarizat al prelucrării*, reprezentat de ecuaţiile (4.8). Numai după ce se realizează acest control are sens efectuarea calculelor de estimare a preciziei, care vor fi expuse în continuare.

4.3. Estimarea preciziei

Metoda observaţiilor indirecte oferă posibilităti multiple pentru determinarea unor parametri care pot caracteriza precizia *procesului de măsurare* dar şi a *rezultatelor prelucrării*. Unele formule se pot demonstra cu uşurinţă, altele însă ar necesita un spaţiu mult prea dezvoltat, astfel încât vor fi prezentate în manual doar rezultatele finale, care au o importanţă deosebită în practica curentă.

4.3.1. Abaterea standard (eroarea medie) a unităţii de pondere

Aşa cum s-a specificat în **cap. 2,** acestă mărime *caracterizează în mod global procesul de măsurare,* reprezentând precizia unei singure măsurători, care ar avea ponderea egală cu unitatea.

În stadiul *prelucrărilor locale*, cum ar fi exemplu pentru fiecare staţie de teodolit, pentru grupe de măsurători directe, ş.a.m.d., a fost dedusa formula (2.101) care nu poate fi folosită pentru scopul urmărit aici. În *3.5.2.2.*, unde s-a tratat estimarea preciziei în cadrul *compensării măsurătorilor directe*, ceea ce reprezintă un stadiu mai evoluat al prelucrării, relaţia corespondentă a fost (3.103), la care este necesar să se facă următoarele particularităţi:

- numarul de măsurători a fost notat,în ambele situaţii, cu n;
- numărul de necunoscute a fost, în *3.5.2.2.* egal cu 1, fiind reprezentat de mărimea măsurată.

O modalitate simplă de rezolvare a problemei care trebuie rezolvată aici, constă din reducerea situaţiei măsurătorilor indirecte (în care numărul de necunoscute a fost notat u (şi în care se respectă întotdeauna inegalitatea n >> u)) la cazul măsurătorilor directe. Pentru a se ajunge la o singură mărime determinată indirect se va presupune că se elimină succesiv u - 1 necunoscute din sistemul de ecuaţii normale (4.29), utilizînd cele n ecuaţii avute la dispoziţie. În acest mod relaţia (3.103) devine:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{R-1}}, \tag{4.66}$$

în care:

$$R = n - (u - 1). \tag{4.67}$$

Din utilizarea ultimelor două relaţii rezultă formula căutată:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}, \tag{4.68}$$

în care termenul [pvv] se calculează prin cele două procedee descrise în *4.2.5.2*,

4.3.2. Abaterea standard (eroarea medie) a unei măsurători oarecare m_i^0

Prin analogie cu raţionamentele din *3.5.2.2*, se poate utiliza formula (3.104):

$$s_{m_i^0} = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}, \qquad (3.104)$$

în care însă, abaterea standard a unităţii de pondere s_o se calculează, în această etapă a prelucrării, cu formula (4.68).

4.3.3. Abaterea standard (eroarea medie) a unei necunoscute x_i

Determinarea acestui gen de estimatori de precizie pentru cazul general examinat în acest capitol ar necesita un spaţiu editorial mult mai extins decât are la dispoziţie acest manual, precum şi anumite dificultăţi în înţelegerea de către studenţi a problematicii abordate.

Din aceste motive se va avea în vedere în continuare din nou sistemul de ecuaţii normale utilizat anterior, cu numai 3 necunoscute:

$$\begin{aligned}
&[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pa\ell] = 0\ ;\\
&[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pb\ell] = 0\ ;\\
&[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pc\ell] = 0\ ,
\end{aligned} \qquad (4.44)$$

în care necunoscutele x, y, z care se determină prin compensare se vor adăuga la mărimile provizorii X^*, Y^*, Z^* (presupuse cunoscute):

$$X = X^* + x\ ; \quad Y = Y^* + y\ ; \quad Z = Z^* + z\ , \qquad (4.69)$$

similar ca în relaţiile generale (4.5).

Deoarece mărimile provizorii X^*, Y^*, Z^* sunt alese relativ arbitrar şi sunt *constante* în cadrul procesului de prelucrare, rezultă din aplicarea cunoştinţelor din **3.2**:

$$s_X = s_x\ ; \quad s_Y = s_y\ ; \quad s_Z = s_z\ . \qquad (4.70)$$

Pentru deducerea abaterilor standard (erorilor medii) s_x, s_y, s_z sunt necesare unele completări ale cunoştinţelor de până acum.

4.3.3.1. Rezolvarea nedeterminată a sistemului ecuaţiilor normale

Sistemul de ecuaţii normale (4.70) se poate scrie şi sub forma unui sistem de o formă particulară:

$$\begin{aligned}
&[paa]x + [pab]y + [pac]z + 1\,[pa\ell] - 0\,[pb\ell] - 0\,[pc\ell] = 0\ ;\\
&[pab]x + [pbb]y + [pbc]z - 0\,[pa\ell] + 1\,[pb\ell] - 0\,[pc\ell] = 0\ ;\\
&[pac]x + [pbc]y + [pcc]z - 0\,[pa\ell] - 0\,[pb\ell] + 1\,[pc\ell] = 0\ ,
\end{aligned} \qquad (4.71)$$

în care ca termeni liberi ai fiecărei ecuaţii sunt comasaţi toţi termenii liberi din sistemul (4.44), cu coeficienţi aleşi corespunzător.

Ecuaţiile matriceale (4.35) se particularizează în cazul examinat acum, sub următoarea formă:

$$
\begin{aligned}
x &= -Q_{xx}[pa\ell] - Qxy\,[pb\ell] - Q_{xz}[pc\ell]\,; \\
y &= -Q_{yx}[pa\ell] - Q_{yy}\,[pb\ell] - Q_{yz}[pc\ell]\,; \\
z &= -Q_{zx}\,[pa\ell] - Q_{zy}\,[pb\ell] - Q_{zz}[pc\ell]\,,
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

în care intervin *coeficienţii de pondere* din matricea inversă corespondentă. Deoarece sistemul de ecuaţii normale iniţial (4.44) este simetric faţă de diagonală, se poate demonstra (**Botez**, 1961 pg. 218, **Wolf**, 1968 pg. 59 ş.a.) că există egalităţile:

$$Q_{xy} = Q_{yx}\,; \quad Q_{xz} = Q_{zx}\,; \quad Q_{yz} = Q_{zy}\,. \tag{4.73}$$

Dacă *presupunem* sau *acceptăm* că în locul termenilor liberi [pal], [pbl] şi respectiv [pcl] se introduc numerele - 1; 0; 0, rezultă din (4.74):

$$x \to Q_{xx}\,; \quad y \to Q_{xy}\,; \quad z \to Q_{xz}\,. \tag{4.74}$$

Analog, dacă s-ar introduce în locul aceloraşi termeni liberi numerele 0; - 1; 0, ar rezulta din (4.74):

$$x \to Q_{xy}\,; \quad y \to Q_{yy}\,; \quad z \to Q_{yz}\,. \tag{4.75}$$

În sfârşit, prin înlocuirea termenilor liberi corespondenţi cu numerele 0; 0; -1 s-ar obţine din acelaşi sistem (4.74):

$$x \to Q_{xz}\,; \quad y \to Q_{yz}\,; \quad z \to Q_{zz}\,. \tag{4.76}$$

Prin urmare, în locul sistemului (4.73) s-ar obţine următoarele 3 sisteme de *ecuaţii normale fictive*:

Sistemul 1

$$
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{xx} + [pab]\,Q_{xy} + [pac]\,Q_{xz} - 1 = 0\,; \\
&[pab]\,Q_{xx} + [pbb]\,Q_{xy} + [pbc]\,Q_{xz} = 0\,; \\
&[pac]\,Q_{xx} + [pbc]\,Q_{xy} + [pcc]\,Q_{xz} = 0\,;
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

Sistemul 2

$$
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{xy} + [pab]\,Q_{yy} + [pac]\,Q_{yz} = 0\,; \\
&[pab]\,Q_{xy} + [pbb]\,Q_{yy} + [pbc]\,Q_{yz} - 1 = 0\,; \\
&[pac]\,Q_{xy} + [pbc]\,Q_{yy} + [pcc]\,Q_{yz} = 0\,;
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Sistemul 3

$$
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{xz} + [pab]\,Q_{yz} + [pac]\,Q_{zz} = 0\,; \\
&[pab]\,Q_{xz} + [pbb]\,Q_{yz} + [pbc]\,Q_{zz} = 0\,; \\
&[pac]\,Q_{xz} + [pbc]\,Q_{yz} + [pcc]\,Q_{zz} - 1 = 0\,;
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

Din rezolvarea acestor sisteme se obţin coeficienţii de pondere, care reprezintă în cazul de faţă *necunoscutele* căutate. Astfel, aplicând algoritmul de rezolvare prin *metoda eliminărilor succesive* a lui **Gauss**, descris în **4.2.3.**, pentru sistemul de ecuaţii normale (4.79), rezultă următorul *sistem redus algoritmic*:

$$[paa]\, Q_{xz} + [pab]\, Q_{yz} + [pac]\, Q_{zz} = 0 \;;$$
$$[pbb.1]\, Q_{yz} + [pbc.1]\, Q_{zz} = 0 \;; \tag{4.80}$$
$$[pcc.2]\, Q_{zz} = 1 \;,$$

din care rezultă imediat:

$$Q_{zz} = 1 / [pcc.2] \;. \tag{4.81}$$

Prin *calcul invers* se calculează din sistemul (4.80):

$$Q_{yz} = -\, Q_{zz}\, [pbc.1] / [pbb.1] \;; \tag{4.82}$$

$$Q_{xz} = -\, Q_{yz}\, [pab] / [paa] - Q_{zz}\, [pac] / [paa] \;. \tag{4.83}$$

Pentru calculul celorlalţi coeficienţi de pondere incluşi în matrice $\mathbf{Q}_{xx}$ se vor utiliza în continuare, primele două ecuaţii ale sistemului (4.78). Utilizând şi algoritmii **Gauss** de ordinul doi se poate scrie:

$$\begin{aligned} [paa]\, Q_{xy} + [pab]\, Q_{yy} + [pac]\, Q_{yz} &= 0 \;; \\ [pbb.1]\, Q_{yy} + [pbc.1]\, Q_{yz} &= 1 \;. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului (4.84) se poate calcula Q_{yy} deoarece coeficientul de pondere Q_{yz} a fost determinat deja cu relaţia (4.82).

Coeficientul de pondere Q_{xy} se poate calcula din prima relaţie a sistemului (4.84) în funcţie de ceilalţi coeficienţi Q_{yy} şi Q_{yz} determinaţi anterior.

Ultimul coeficient de pondere necunoscut Q_{xx} se poate calcula din prima ecuaţie a sistemului (4.77) in raport de coeficienţii de pondere Q_{xy} şi Q_{xz} care sunt cunoscuţi.

Acum se poate constata că denumirea de *rezolvarea nedeterminată a sistemului ecuaţiilor normale* derivă din modalitatea de exprimare a necunoscutelor **x** :

- aceştia depind în primul rând de coeficienţii de pondere din matricea $\mathbf{Q}_{xx}$, , care la rândul lor sunt direct dependenţi de *natura şi forma concretă* a reţelei geodezice;
- necunoscutele x, y, z frpind prin sistemul (4.72) şi de termenii liberi ai sistemului ecuaţiilor normale ($[pa\,\ell]$, $[pb\,\ell]$ şi $[pc\,\ell]$ în cazul examinat). Aceştia din urmă aduc în procesul de compensare influenţa erorilor din procesul de măsurare, aşa cum s-a mai specificat şi se va clarifica numeric în continuare. Cu alte cuvinte, pentru o reţea geodezică dată prin *forma* sa precum şi prin *dispunerea* măsurătorilor, valoarea necunoscutelor x, y, z şi deci a rezultatelor definitive obţinute prin prelucrare, depinde de *calitatea măsurătorilor,* care este inclusă în termenii liberi. Desigur de acest parametru depinde şi precizia necunoscutelor. Orice modificare în termenii liberi ℓ conduce la modificarea soluţiilor x pentru necunoscute.

Pentru calculul practic al coeficienţilor de pondere se preferă, din punctul de vedere al comodităţii de calcul, utilizarea unor coloane adăugate la sistemul de ecuaţii normale de următoarea formă (pentru exemplul din **4.3.3.**):

$$\left|\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right| . \qquad (4.85)$$

Coeficienţii de pondere Q_{xx} , Q_{yy} şi Q_{zz} se obţin din rezolvarea sistemelor de ecuaţii normale (4.77) – (4.79), în care acestia îndeplinesc rolul de *necunoscute,* iar *termenii liberi fictivi* sunt conţinuţi în (4.85). Deducerea practică a acestor coeficienţi se va explica în amănunt la lucrările practice şi poate fi urmărită şi în exemplul numeric din ***Aplicaţia 18***.

4.3.3.2. Exprimarea necunoscutelor în raport de termenii liberi absoluţi ℓ şi de coeficienţii de pondere Q. Pentru determinarea abterilor standard (erorilor medii) ale necunoscutelor x, y, z este necesară exprimarea acestora *în raport direct* de termenii liberi, care intervin în ecuaţiile originare de corecţii (4.13). Aşa cum s-a mai menţionat, motivaţia constă în faptul că în termenii liberi intervin măsurătorile m^0 (relaţia (4.11)), astfel încât erorile de măsurare se transmit prin termenii liberi în întregul proces de compensare.

Prin urmare se caută expresii analoge cu (4.72) de forma:

$$\begin{aligned} x &= -(\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \ldots + \alpha_n \ell_n) = -[\alpha \ell]\,; \\ y &= -(\beta_1 \ell_1 + \beta_2 \ell_2 + \ldots + \beta_n \ell_n) = -[\beta \ell]\,; \\ z &= -(\gamma_1 \ell_1 + \gamma_2 \ell_2 + \ldots + \gamma_n \ell_n) = -[\gamma \ell]\,. \end{aligned} \qquad (4.86)$$

Prin simpla comparare a sistemelor (4.72) şi respectiv (4.86) se poate scrie pentru prima serie de coeficienţi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_1a_1Q_{xx} + p_1b_1Q_{xy} + p_1c_1Q_{xz}\,; \\ \alpha_2 &= p_2a_2Q_{xx} + p_2b_2Q_{xy} + p_2c_2Q_{xz}\,; \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_n &= p_na_nQ_{xx} + p_nb_nQ_{xy} + p_nc_nQ_{zz}\,. \end{aligned} \qquad (4.87)$$

Desigur pentru ceilalţi coeficienţi (β_i, γ_i; $i = 1, 2, \ldots, n$) se pot scrie relaţii similare.

Dacă ecuaţiile (4.87) se multiplică corespunzător cu $\frac{\alpha_i}{p_i}$ şi se însumează pe verticală se obţine:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = [a\alpha]\,Q_{xx} + [b\alpha]\,Q_{xy} + [c\alpha]\,Q_{xz}\,. \tag{4.88}$$

Prin asemănare cu sistemul (4.77) rezultă:

$$\begin{aligned}
[a\alpha] &= [paa]\,Q_{xx} + [pab]\,Q_{xy} + [pac]\,Q_{xz} = 1\,;\\
[b\alpha] &= [pab]\,Q_{xx} + [pbb]\,Q_{xy} + [pbc]\,Q_{xz} = 0\,;\\
[c\alpha] &= [pac]\,Q_{xx} + [pbc]\,Q_{xy} + [pcc]\,Q_{xz} = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Din relaţiile de mai sus se obţine:

$$[a\alpha] = 1\,; \quad [b\alpha] = 0\,; \quad [c\alpha] = 0\,, \tag{4.90}$$

astfel încât:

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{xx}\,. \tag{4.90}$$

Analog se poate demonstra (**Wolf**, 1968, pg. 60):

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Q_{xy}\,; \quad \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] = Q_{xz}\,;\\
&\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{yy}\,; \quad \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] = Q_{yz}\,;\\
&\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = Q_{zz}\,.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

4.3.3.3. Calculul abaterilor standard (erorilor medii) ale erorilor necunoscutelor (parametrilor). Revenind la relaţiile (4.70), (4.91), (4.92) şi respectiv (4.88) se pot aplica principiile dezvoltate în **3.2,** rezultând:

$$s_x = \sqrt{\left[\alpha^2 s_{m^0}^2\right]}\,; \quad s_y = \sqrt{\left[\beta^2 s_{m^0}^2\right]}\,; \quad s_z = \sqrt{\left[\gamma^2 s_{m^0}^2\right]}\,. \tag{4.93}$$

Utilizând relaţia (3.10) se obţine în continuare:

$$\begin{aligned}
s_x &= s_0\sqrt{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} = s_0\sqrt{Q_{xx}}\,;\\
s_y &= s_0\sqrt{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} = s_0\sqrt{Q_{yy}}\,;\\
s_z &= s_0\sqrt{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} = s_0\sqrt{Q_{zz}}\,.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Abaterea standard (eroarea medie) a unităţii de pondere s_0 se determină cu relaţia (4.68), iar despre determinarea coeficienţilor de pondere Q_{xy} , Q_{yy} , Q_{zz} s-a tratat pe larg în cele de mai sus.

4.3.4. Estimatori de precizie suplimentari în cazul reţelelor planimetrice

În cazul reţelelor planimetrice, fiecare punct geodezic este reprezentat prin două coordonate de poziţie x, y,. In acest caz matricea (4.34) are un aspect particular.

Se va presupune că s-au eliminat în prealabil acele necunoscute care nu au legătură directă cu poziţia punctelor geodezice (cum ar fi: necunoscutele de orientare a staţiilor de teodolit, necunoscutele de scară la măsurarea distanţelor ş.a.m.d.).

Dacă se consideră că în reţeaua geodezică există u puncte noi, matricea coeficienţiilor de pondere, în ipoteza enunţată mai sus, are următoarea formă:

1		2		…	R		…	u	
dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	...	dx_R	dy_R	…	dx_u	dy_u

$$\mathbf{N^{-1}} = \mathbf{Q_{xx}} = \begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} & Q_{x_1x_2} & Q_{x_1y_2} & \cdots & Q_{x_1x_R} & Q_{x_1y_R} & \cdots & Q_{x_1x_u} & Q_{x_1y_u} \\ Q_{x_1y_1} & Q_{y_1y_1} & Q_{y_1x_2} & Q_{y_1y_2} & \cdots & Q_{y_1x_R} & Q_{y_1y_R} & \cdots & Q_{y_1x_u} & Q_{y_1y_u} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ Q_{x_1x_R} & Q_{y_1x_R} & Q_{x_2x_R} & Q_{y_2x_R} & \cdots & Q_{x_Rx_R} & Q_{x_Ry_R} & \cdots & Q_{x_Rx_u} & Q_{x_Ry_u} \\ Q_{x_1y_R} & Q_{y_1y_R} & Q_{x_2y_R} & Q_{y_2y_R} & \cdots & Q_{x_Ry_R} & Q_{y_Ry_R} & \cdots & Q_{y_Rx_u} & Q_{y_Ry_u} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ Q_{x_1x_u} & Q_{y_1x_u} & Q_{x_2x_u} & Q_{y_2x_u} & \cdots & Q_{x_Rx_u} & Q_{y_Rx_u} & \cdots & Q_{x_ux_u} & Q_{x_uy_u} \\ Q_{x_1y_u} & Q_{y_1y_u} & Q_{x_2y_u} & Q_{y_2y_u} & \cdots & Q_{x_Ry_u} & Q_{y_Ry_u} & \cdots & Q_{x_uy_u} & Q_{y_uy_u} \end{bmatrix}$$

(4.95)

Utilizând coeficienţii de pondere conţinuţi de matricea (4.720 se pot calcula anumiţi parametri de precizie caracteristici pentru reţelele planimetrice. Demonstraţiile se pot urmări în lucrări mai extinse (**Wolf**, 1968, **Pelzer**, 1980 ş.a.).

4.3.4.1. Eroarea medie ***Helmert***. Pentru oricare punct R din reţea se pot determina erorile individuale pe axele de coordonate cu relaţia (4.96):

$$s_{x_R} = s_0\sqrt{Q_{x_Rx_R}}; \quad s_{y_R} = s_0\sqrt{Q_{y_Ry_R}} . \tag{4.96}$$

Helmert a introdus noţiunea de *eroare totală* pentru poziţia punctului considerat:

$$s_{t_R} = \sqrt{s_{x_R}^2 + s_{y_R}^2} = s_0\sqrt{Q_{x_Rx_R} + Q_{y_Ry_R}} . \tag{4.97}$$

4.3.4.2. Un estimator global de precizie, pentru întreaga reţea avută în vedere, ar putea fi:

$$\overline{s_t} = s_0\sqrt{\left(Q_{x_1x_1} + Q_{y_1y_1} + \ldots + Q_{x_ux_u} + Q_{y_uy_u}\right)/\,2u}\,, \qquad (4.98)$$

care evident se poate scrie mai prescurtat:

$$\overline{s_t} = s_0\sqrt{\left(\text{urma } \mathbf{N}^{-1}\right)/\,2u}\,. \qquad (4.99)$$

Acest estimator de precizie globală a fost denumit în limba romînă *eroarea medie **Helmert** generalizată* (**Ghiţău**, 1983) şi ar putea fi avut în vedere la stabilirea toleranţelor pentru poziţia în plan a unei reţele geodezice.

4.3.4.3. Elipsa erorilor, care se poate forma în fiecare punct nou R după compensare. Această nouă noţiune generalizează noţiunea de *interval de încredere* (a se vedea **2.9**) din spaţiul cu o dimensiune la cea de *domeniu de încredere,* valabilă pentru spaţiul cu două dimensiuni. Determinarea parametrilor care determină elipsa erorilor ar necesita un spaţiu şi cunoştinţe în domeniu ceva mai dezvoltate, şi de aceea cititorul interesat este îndrumat să consulte bibliografia citată de mai multe ori în acest capitol.

Deoarece rezultatele finale sunt deosebit de importante pentru prelucrarea măsurătorilor geodezice efectuate în reţelele planimetrice, acestea se vor prezenta în continuare, fără demonstraţiile necesare.

- semiaxele elipsei erorilor se calculează cu următoarele relaţii:

$$a_R = s_0\sqrt{\lambda_1}\;; \quad b_R = s_0\sqrt{\lambda_2}\,, \qquad (4.100)$$

unde:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Q_{x_Rx_R} + Q_{y_Ry_R}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{x_Rx_R} - Q_{y_Ry_R}\right)^2 + 4Q_{x_Ry_R}}\,. \qquad (4.101)$$

Coeficienţii de producere $Q_{x_Rx_R}$, $Q_{y_Ry_R}$ şi respectiv $Q_{x_Ry_R}$ din formula (4.101) se extrag din matricea $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{xx}$ (4.95).

- Orientarea axei mari a elipsei erorilor, în raport de axa x (îndreptată spre direcţia nord) se determină cu relaţia:

$$\Theta = \frac{1}{2}\,\mathbf{arctg}\,\frac{2\mathbf{Q}_{xy}}{\mathbf{Q}_{xx} - \mathbf{Q}_{yy}}\,. \qquad (4.104)$$

Imaginea elipsei erorilor este prezentată în Fig.4.1, din care se observă că aceasta este înscrisă într-un dreptunghi cu laturile 2 s_x şi respectiv 2 s_y.

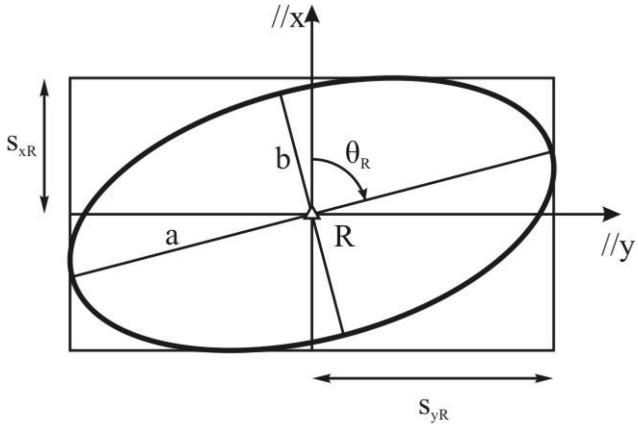

Fig. 12. Elipsa erorilor

Aplicaţia 14

Se consideră o linie de nivelment de ordinul III, din figura alăturată, între punctele A şi B. Au fost proiectate punctele de ordinul IV : 1, 2, 3 şi 4, care formează un poligon de nivelment.

Se cunosc :

- cotele punctelor vechi A şi B ;
- diferenţele de nivel măsurate în reţeaua de nivelment;
- distanţele dintre reperii de nivelment (exprimate în kilometri)

Se cere

- prelucrarea riguroasă a măsurătorilor efectuate în reţeaua de nivelment prin metoda observaţiilor indirecte.

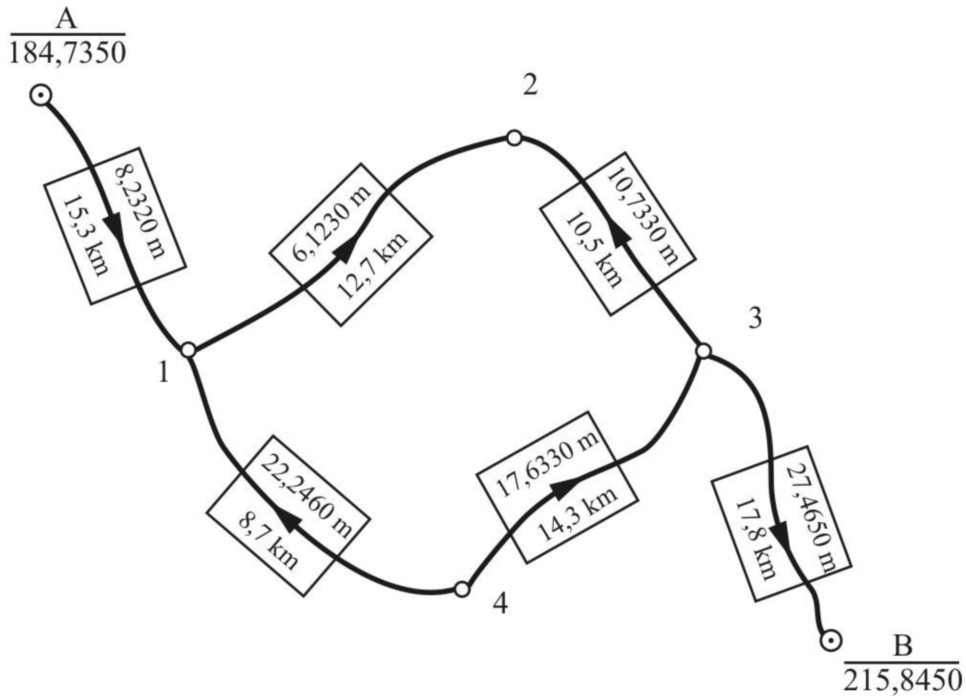

Fig. 13 Schiţa reţelei de nivelment

Rezolvare

Tabelul 13 Cotele reperilor de nivelment

Reperul de nivelment	Cote vechi H Cote provizorii H^* [m]	Necunoscute x_j [mm]	Cote după compensare [m]	Abaterile standard ale cotelor s_{x_j} [mm]
0	1	2	3	4
A	184.7350	-	184.7350	-
B	215.8450	-	215.8450	-
1	192.9670	1.5	192.9685	1.8
2	199.0900	1.4	199.0914	2.2
3	188.3570	1.2	188.3582	1.9
4	170.7240	-0.4	170.7236	2.2

Indicaţii practice

- modalitatea de determinare a cotelor provizorii H* este arbitrară. Se va alege calea cea mai simplă (evident, cu o verificare corespunzătoare);
- coloanele (2), (3) şi (4) se completează după verificarea compensării;
- valorile obţinute pentru necunoscutele x_j se rotunjesc la 0,1 mm.

Tabelul 14. Ponderile măsurătorilor

Linia de nivelment $i \rightarrow j$	Ponderea p_{ij}
A - 1	0.07
1 - 2	0.08
3 - 2	0.10
4 - 3	0.07
4 - 1	0.11
3 - B	0.06

Ponderile din tabelul de mai sus se determină cu relaţia (3.75).

Tabelul 15. Diferenţele de nivel

Linia de nivelment	Diferenţa de nivel măsurată Δh_{ij}^{0} [m]	Corecţia v_{ij} [mm]	Diferenţa de nivel compensată Δh_{ij}^{0} [m]	Abaterea standard a diferenţei de nivel $s_{\Delta h_{ij}^{0}}$ [mm]
0	1	2	3	4
A - 1	8.2320	1.5	8.2335	2.2
1 - 2	6.1230	-0.1	6.1229	2.0
3 - 2	10.7330	0.1	10.7331	1.8
4 - 3	17.6330	1.7	17.6347	2.2
4 - 1	22.2460	-1.1	22.2449	1.7
3 - B	27.4850	1.8	27.4869	2.4
Abaterea standard a unităţii de pondere s_0 = 0.6 mm				

- coloanele (2), (3), (4) se vor completa după verificarea compensării;
- în ceea ce priveşte *formarea ecuaţiilor corecţiilor în lucrările de nivelment geometric* se disting următoarele două situaţii:
  - între un reper nou şi un alt reper nou *(cazul general)*. De exemplu între reperii de nivelment 1 şi 2:

$$H_1^* + x_1 + \Delta h_{12}^0 + v_{12} = H_2^* + x_2 \ ;$$
$$v_{12} = x_2 - x_1 + \ell_{12} \ ; \ p_{12} \ ; \tag{4.103}$$
$$\ell_{12} = \left(H_2^* - H_1^*\right) - \Delta h_{12}^0 \ ;$$

- între un reper vechi şi un reper nou *(caz particular).* De exemplu între reperii de nivelment A şi 1:

$$
\begin{gathered}
H_A + \Delta h^0_{A1} + v_{A1} = H^*_1 + x_1 \;; \\
v_{A1} = x_1 + \ell_{A1} \;;\;\; p_{A1} \;; \\
\ell_{A1} = \left(H^*_1 - H_A\right) - \Delta h^0_{A1} \;.
\end{gathered}
\tag{4.104}
$$

- Între doi reperi vechi de nivelment nu are sens să se efectueze o măsurătoare de nivelment, deoarece aceşti reperi de nivelment îşi păstrează cotele nemodificate după compensare (se respectă *principiul ierarhic* de realizare a reţelelor geodezice de sprijin, aşa cum se va trata mai detaliat la cursul de *Geodezie*). În consecinţă, între doi reperi de nivelment vechi nu vor exista ecuaţii de corecţii.

Deşi ecuaţiile corecţiilor pot fi scrise în oricare din cele două sensuri ale diferenţei de nivel, pentru a se evita posibile erori s*e recomandă* totuşi scrierea lor în mod unitar, de exemplu în *sensul pozitiv al creşterii diferenţei de nivel*, aşa cum se va proceda în continuare.

Tabelul 16 Ecuaţiile corecţiilor

Linii de nivelment $i \to j$	Ponderi p_{ij}	Necunoscute x_j [mm]				Termeni liberi ℓ_{ij} [mm]	Sume	Corecţii v_{ij} [mm]
		1 a_i	2 b_i	3 c_i	4 d_i			
		$x_1 =$ 1.51	$x_2 =$ 1.36	$x_3 =$ 1.24	$x_4 =$ -0.43			
0	1	2	3	4	5	6	7	8
A – 1	0.07	+1				0.0	1.0	1.5
1 – 2	0.08	-1	+1			0.0	0.0	-01
3 – 2	0.10		+1	-1		0.0	0.0	0.1
4 – 3	0.07			+1	-1	0.0	0.0	1.7
4 – 1	0.11	+1			-1	-3.0	-3.0	-1.1
3 – B	0.06			-1		+3.0	+2.0	1.8
Sume		+ 1	+ 2	- 1	- 2	0.0	0.0\0.0	

$[pvv]_1 = 0{,}67$; $[pvv]_2 = 0.67$

Controlul compensării

[pav] = 0,00

[pbv] = 0,00

[pcv] = 0,00

[pdv] = 0,00

Note

- valorile numerice pentru x_j cu care se determină corecţiile v_{ij} se preiau din *Tabelul 18* (rezolvarea ecuaţiilor normale);
- controlul compensării se realizează după calculul corecţiilor v.

Tabelul 17 Ecuaţiile normale

a]	b]	c]	d]	ℓ]	s]	Control
0.26	-0.08	0.00	-0.11	-0.33	-0.26	-0.26
	0.18	-0.10	0.00	0.00	0.00	0.00
		0.23	-0.07	-0.18	-0.12	-0.12
			0.18	0.33	0.33	0.33

Abaterea standard a unităţii de pondere

$$s_0 = \sqrt{\frac{0,67}{2}} = 0,6 \text{ mm.}$$

Verificarea globală a compensării

$A \rightarrow 1$ 0,00 mm

$1 \rightarrow 2$ 0,00 mm

$3 \rightarrow 2$ 0,00 mm

$4 \rightarrow 3$ 0,00 mm

$4 \rightarrow 1$ 0,00 mm

$3 \rightarrow B$ 0,00 mm

Tabelul 18 Rezolvarea ecuaţiilor normale. Calculul coeficienţilor de pondere

x_1	x_2	x_3	x_4	L	$Q_{x_1x_1}$	$Q_{x_2x_2}$	$Q_{x_3x_3}$	$Q_{x_4x_4}$	S	Control
0,26	-0,08	0,00	-0,11	-0,33	- 1	0	0	0	-1,26	
- 1	+0,30769	0,00000	+0,42308	+1,26923	+3,84615	0	0	0	+4,84615	4,84615
x_1=1,50600	0,18	-0,10	0,00	0,00	0	- 1	0	0	-1,00	
	0,1554	-0,1000	-0,0338	-0,1015	-0,30769	- 1	0	0	-1,3877	-1,3877
	- 1	+0,64356	+0,21760	+0,65347	+1,98020	+6,43564	0	0	+8,9370	+8,9370
	x_2=1,36009	0,23	-0,07	-0,18	0	0	- 1	0	-1,12	
		0,1656	-0,0918	-0,2453	-0,1980	-0,6436	- 1	0	-2,0131	-2,0131
		- 1	+0,55435	+1,48128	+1,19565	+3,88647	+6,03865	0	+12,15640	+12,15640
		x_3=1,24318	0,18	0,33	0	0	0	- 1	-0,67	
			0,0752	0,0323	-0,5998	-0,5743	-0,5543	- 1	-2,6209	-2,6209
			- 1	-0,42952	+7,97610	+7,63696	+7,37101	+13,29787	+34,85239	+34,85238
			x_4=-0,42952	Q_{xx}	9,47	13,32	10,12	13,30		
				$\sqrt{Q_{xx}}$	3,07	3,65	3,18	3,65		

[(S - L - Q) x] = + 0,1800

- [L] = + 0,1800

Capitolul 5

Prelucrarea măsurătorilor condiţionate

Comparativ cu prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observaţiilor indirecte, metoda observaţiilor condiţionate a cunoscut o aplicabilitate mai restrânsă în ultimele decenii. Cauza este generată în mod deosebit de faptul că metoda observaţiilor indirecte se pretează mult mai comod la programarea pe calculatoare electronice. Programarea calculelor pentru metoda observaţiilor condiţionate nu se poate practic generaliza, de cele mai multe ori fiind necesară cunoşterea amănunţită a geometriei reţelei, la care trebuie aplicat un *anumit program de calcul,* care diferă semnificativ de la o situaţie la alta.

Desigur, deoarece ambele metode sunt riguroase, pentru o anumită reţea geodezică dată, prin geometria sa şi prin măsurătorile geodezice efectuate, se obţin *aceleaşi rezultate* prin aplicarea ambelor metode avute în vedere. Volumul de calcule este însă diferit, prin metoda observaţiilor indirecte obţinându-se, aproape fără excepţie, o mai mare productivitate precum şi posibilităţi mai mari în ceea ce priveşte estimarea preciziei parametrilor care intervin în prelucrare.

Studierea prelucrării măsurătorilor geodezice prin metoda observaţiilor condiţionate este totuşi justificată prin faptul că în anumite situaţii, este adevărat restrânse ca număr, această metodă oferă soluţii mai rapide, cu un volum de calcule mai mic, în comparaţie cu metoda observaţiilor indirecte (aşa cum se va putea observa, de exemplu, din compararea ***Aplicaţiilor 18** şi **19**).*

Un impediment important în aplicarea metodei observaţiilor condiţionate constă în stabilirea cu exactitate a ecuaţiilor de condiţie pe care trebuie să le satisfacă măsurătorile efectuate în reţeaua geodezică. *Numărul total* al acestor ecuaţii se va stabili cu o formulă simplă (5.29), care se va deduce în **5.4.1.** Scrierea *efectivă* a ecuaţiilor de condiţie, *necesare şi suficiente,* reprezintă însă o problemă mult mai dificilă, în special în cazul reţelelor planimetrice extinse, în care pot interveni măsurători unghiulare şi de distanţe, efectuate după reguli care diferă de la o reţea geodezică la alta.

Din acest punct de vedere pot interveni următoarele neajunsuri:

- în cazul în care *se omit* unele ecuaţii de condiţie, rezultatele finale ale compensării vor fi inexacte, deoarece acestea nu vor verifica condiţiile omise, rezultând astfel o reţea geodezică incomplet geometrizată;
- atunci când se scrie, din neatenţie, o ecuaţie de condiţie care reprezintă consecinţa altor ecuaţii deja scrise (cum ar fi, de exemplu, suma sau diferenţa acestora ş.a.m.d), va

rezulta o nedeterminare la rezolvarea sistemului de ecuaţii normale corespondent (5.18) sau (5.19). Determinantul acestuia devine nul, astfel încât sistemul de ecuaţii respectiv nu poate fi rezolvat.

Asemenea dificultăţi nu intervin la metoda observaţiilor indirecte, unde *fiecărei măsurători îi corespunde o ecuaţie de corecţie* de forma (4.10). Programatorul nu trebuie să *vadă* geometria reţelei geodezice ci să cunoască numărul şi genul de măsurători geodezice efectuate, coordonatele punctelor vechi (*considerate ca fixe*) precum şi coordonatele provizorii ale punctelor noi. Multe programe de calcul performante realizează şi determinarea coordonatelor provizorii, calculul unor corecţii preliminarii care se aduc măsurătorilor înainte de începerea prelucrării etc.

5.1. Ecuaţiile de condiţie

Se consideră acelaşi şir de măsurători ca în celelalte capitole ale manualului:

$$\mathbf{m}^0 = \left[m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0\right]^T, \tag{2.73}$$

efectuate *într-o reţea geodezică,* asemănător ca în **4.1.**

În funcţie de geometria reţelei geodezice şi de tipul măsurătorilor geodezice efectuate, *mărimile compensate* ale acestora trebuie să satisfacă *un număr strict necesar şi suficient de ecuaţii de condiţie,* care va fi notat în continuare cu r :

$$\begin{aligned} &\Phi_1(m_1, m_2, \ldots, m_n, a_1) = 0\ ; \\ &\Phi_2(m_1, m_2, \ldots, m_n, a_2) = 0\ ; \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &\Phi_r\ (m_1, m_2, \ldots, m_n, a_r) = 0\ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

Constantele a_1, a_2, …, a_r sunt arbitrare şi depind numai de geometria reţelei geodezice considerate.

La fel ca la metoda observaţiilor indirecte, mărimile compensate se obţin din măsurătorile efectuate $\mathbf{m^0}$ prin adăugarea *corecţiilor* aparente $\mathbf{v}$, care se vor deduce prin compensare:

$$\mathbf{m^0} + \mathbf{v} = \mathbf{m}\ . \tag{4.1}$$

Din ultimele două relaţii rezultă:

$$\begin{aligned} &\Phi_1\left(m_1^0 + v_1, m_2^0 + v_2, \ldots, m_n^0 + v_n, a_1\right) = 0\ ; \\ &\Phi_2\left(m_1^0 + v_1, m_2^0 + v_2, \ldots, m_n^0 + v_n, a_2\right) = 0\ ; \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &\Phi_r\ \left(m_1^0 + v_1, m_2^0 + v_2, \ldots, m_n^0 + v_n, a_r\right) = 0\ , \end{aligned} \tag{5.2}$$

sau sub formă matriceală :

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{m^0} + \mathbf{v}\right) = \mathbf{0}\ . \tag{5.3}$$

Cele două sisteme de ecuaţii de mai sus reprezintă *modelul funcţional sub formă neliniară la prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observaţiilor condiţionate.*

Prin dezvoltarea în serie **Taylor** a relaţiilor din sistemul (5.2) şi renunţarea la termenii de ord. 2 şi superiori, rezultă:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_1\right) + v_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial m_1}\right)_0 + \ldots + v_n\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial m_n}\right)_0 = 0\ ;\\
&\Phi_2\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_2\right) + v_1\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial m_1}\right)_0 + \ldots + v_n\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial m_n}\right)_0 = 0\ ;\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\Phi_r\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_r\right) + v_1\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial m_1}\right)_0 + \ldots + v_n\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial m_n}\right)_0 = 0\ .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Dacă se notează:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial m_1}\right)_0 ;\quad \alpha_2 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial m_2}\right)_0 ;\quad \ldots ;\quad \alpha_n = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial m_n}\right)_0 ;\\
&\beta_1 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial m_1}\right)_0 ;\quad \beta_2 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial m_2}\right)_0 ;\quad \ldots ;\quad \beta_n = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial m_n}\right)_0 ;\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&r_1 = \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial m_1}\right)_0 ;\quad r_2 = \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial m_2}\right)_0 ;\quad \ldots ;\quad r_n = \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial m_n}\right)_0 ;
\end{aligned} \tag{5.5}$$

precum şi:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_1\right) = \omega_1\ ;\\
&\Phi_2\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_2\right) = \omega_2\ ;\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\Phi_r\left(m_1^0, m_2^0, \ldots, m_n^0, a_r\right) = \omega_r\ ,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

se obţine din (5.4) următorul sistem de *ecuaţii liniare de condiţie*:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \omega_1 = 0\ ;\\
&\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n + \omega_2 = 0\ ;\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + \omega_r = 0\ ,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

cunoscut şi sub denumirea de: *forma liniară a modelului funcţional la metoda observaţiilor condiţionate.*

Observaţii

1. Termenii liberi $\boldsymbol{\omega}$ determinaţi cu relaţiile (5.6) exprimă *neîndeplinirea* ecuaţiilor de condiţie de către măsurătorile efectuate şi de aceea se numesc curent şi *neînchideri.*

2. In orice reţea geodezică este satisfăcută inegalitatea:

$$r < n, \tag{5.8}$$

ceea ce se poate enunţa, în general: în *orice reţea geodezică numărul ecuaţiilor de condiţie este mai mic decât numărul de măsurători efectuate.*

Introducând notaţiile:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}; \tag{5.8}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T; \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \end{bmatrix}^T, \tag{5.10}$$

modelul funcţional (5.7) se poate scrie sub următoarea formă matriceală:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}\,. \tag{5.11}$$

Deoarece r < n, sistemele (5.7) sau (5.11) nu sunt rezolvabile fără o condiţie suplimentară. In acest scop se poate folosi, în funcţie de necesităţi, una dintre condiţiile (2.145), (2.116) sau (2.157), care reprezintă, fiecare separat, o componentă principală a *modelului stochastic* adoptat pentru organizarea prelucrării măsurătorilor geodezice **(2.7. 3.)**.

Observaţie

La fel ca în capitolul precedent, şi în acest capitol ipoteza principală sub care se va desfăşura *prelucrarea măsurătorilor geodezice prin metoda observaţiilor condiţionale* este reprezentat de considerarea acestora ca *mărimi independente statistic, însă de precizii diferite*. Măsurătorile sunt caracterizate, prin urmare, de aceeaşi matrice a ponderilor (2.150) sau de acelaşi vector ca în (4.16):

$$\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n]^T. \tag{4.16}$$

5.2. Ecuaţiile normale ale multiplicatorilor Gauss - Lagrange

În ipoteza anterior menţionată, condiţia de minim care dirijează desfăşurarea prelucrării este reprezentată, în practic toate prelucrările măsurătorilor geodezice efectuate în prezent, de relaţia (2.116), scrisă dezvoltat sub forma (4.22). Cei doi matematicieni renumiţi, amintiţi mai sus, **Gauss** şi, independent de acesta, **Lagrange** au emis aproape simultan conceptele de bază ale *teoriei* *erorilor şi metodei celor mai mici pătrate.* Ei au completat condiţia de minim (2.116) în felul următor:

$$\begin{aligned}F = {} & p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 - \\ & -2k_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \omega_1) - \\ & -2k_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n + \omega_2) - \\ & \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ & -2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + \omega_r) \to \text{minim}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Având în vedere ecuaţiile (5.7), se observă cu uşurinţă că funcţiile (2.116) şi respectiv (5.12) acceptă *acelaşi minim.* Acesta are loc atunci când derivatele de ordinul 1 ale funcţiilor avute în vedere, în raport de variabilele care le conţin, se anulează:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial v_1} = 2(p_1 v_1 - \alpha_1 k_1 - \beta_1 k_2 - \ldots - r_1 k_r) = 0\,; \\ &\frac{\partial F}{\partial v_2} = 2(p_2 v_2 - \alpha_2 k_1 - \beta_2 k_2 - \ldots - r_2 k_r) = 0\,; \\ &\quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &\frac{\partial F}{\partial v_n} = 2(p_n v_n - \alpha_n k_1 - \beta_n k_2 - \ldots - r_n k_r) = 0.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Din formulele de mai sus rezultă cunoscutele *ecuaţii ale corelatelor* sau *ale multiplicatorilor* **Gauss - Lagrange**:

$$\begin{aligned}&v_1 = \frac{1}{p_1}(\alpha_1 k_1 + \beta_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r)\,; \\ &v_2 = \frac{1}{p_2}(\alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r)\,; \\ &\quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &v_n = \frac{1}{p_n}(\alpha_n k_1 + \beta_n k_2 + \ldots + r_n k_r).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Având în vedere forma particulară a matricei (2.116) se poate scrie:

$$\mathbf{Q}_{m^0 m^0} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_n} \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Dacă se notează vectorul *multiplicatorilor* **Gauss - Lagrange** cu:

$$\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_r]^T, \tag{5.16}$$

ecuaţiile (5.14) pot fi scrise sub formă matriceală în felul următor:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_{\mathbf{m^0 m^0}} \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \mathbf{k} \,. \tag{5.17}$$

Utilizând ecuaţiile (5.7) şi (5.14) se obţine următorul sistem de *ecuaţii normale ale multiplicatorilo*r **Gauss - Lagrange**:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] k_1 + \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{\alpha r}{p}\right] k_r + \omega_1 = 0 \,; \\
&\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] k_1 + \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{\beta r}{p}\right] k_r + \omega_2 = 0 \,; \\
&\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\
&\left[\frac{\alpha\, r}{p}\right] k_1 + \left[\frac{\beta\, r}{p}\right] k_2 + \ldots + \left[\frac{r\, r}{p}\right] k_r + \omega_r = 0 \,.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Sistemul (5.18) se poate scrie sub forma matriceală prin utilizarea relaţiilor (5.17) şi respectiv (5.11):

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{m^0 m^0}} \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \mathbf{k} + \mathbf{w} = 0 \,. \tag{5.19}$$

Dacă se notează:

$$\mathbf{N}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{m^0 m^0}} \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \,, \tag{5.20}$$

sistemul (5.19) se poate scrie mai concentrat:

$$\mathbf{N_k}\, \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \,. \tag{5.21}$$

Sistemele de ecuaţii (5.18), respectiv (5.21) sunt denumite *sistemele ecuaţiilor normale ale corelatelor sau ale multiplicatorilor* **Gauss - Lagrange**. Acestea au cele trei proprietăţi menţionate în **4.2.1,** ca orice sistem de ecuaţii normale.

Rezolvarea sistemelor avute în vedere se realizează similar cum s-a procedat în **4.2.3.**, din care rezultă mărimile auxiliare **k**, denumite *corelate* sau *multiplicatori* **Gauss - Lagrange**.

Controlul pe parcurs al rezolvării ecuaţiilor normale, precum şi controlul final al rezolvării, se realizează similar cum s-a procedat în **4.2.4.**, şi cum se va exemplifica în ***Aplicaţia 19*** .

5.3. Calculul mărimilor compensate. Controale specifice metodei observaţiilor condiţionate

După rezolvarea sistemelor de ecuaţii normale (5.18) sau (5.21) se pot calcula corecţiile **v** din sistemul (5.14) şi apoi valorile compensate ale măsurătorilor **m** din (4.1), *ceea ce reprezintă încheierea primei părţi a prelucrării.*

- *Un control specific* metodei observaţiilor condiţionate se obţine în modul următor:

- ecuaţiile sistemului (5.14) sunt multiplicate, pe rând, în mod corespunzător în ambii membri, cu factorii: p_1v_1; p_2v_2 ; …; p_nv_n şi apoi rezultatele se adună pe verticală, astfel încât rezultă:

$$[pvv] = [\alpha v]\, k_1 + [\beta v]\, k_2 + \ldots + [rv]\, k_r\,; \qquad (5.22)$$

- dacă se au în vedere ecuaţiile de condiţie (5.6), aduse la forma liniară (5.7), se obţine în continuare:

$$[pvv] = -\,(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \ldots + \omega_r k_r)\,, \qquad (5.23)$$

sau mai concentrat, prin utilizarea generală a simbolului *sumă* **Gauss:**

$$[pvv] = -\,[k\, w]\,. \qquad (5.23)$$

Formula de mai sus reprezinta un *control specific* pentru metoda observaţiilor conditionate, prin care se acoperă o mare parte a calculelor.

Desigur termenul [pvv] se poate obţine şi prin calcul direct, înlocuind termenii componenţi în suma avută în vedere.

- *Un alt control specific* metodei observaţiilor condiţionate constă în verificarea tuturor ecuaţiilor liniare de condiţie (5.7):

$$\begin{aligned} &[\alpha v] = -\,\omega_1\,; \\ &[\beta v] = -\,\omega_2\,; \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &[rv] = -\,\omega_r\,; \end{aligned} \qquad (5.24)$$

- *Controlul final* al prelucrării constă în verificarea ecuaţiilor neliniare de condiţie (5.1) de către mărimile compensate **m**.

5.4. Estimarea preciziei la metoda observaţiilor condiţionate

5.4.1. Abaterea standard a unităţii de pondere

Pentru calculul acestui estimator de precizie globală, sunt necesare unele operaţiuni pregătitoare, care să reducă rezolvarea actualei probleme la o situaţie cunoscută din **cap. 4**.

Deoarece sistemul de ecuaţii de condiţie (5.7) este constituit dintr-un număr r de ecuaţii, care este întotdeauna mai mic decât numărul n de corecţii **v** (condiţia (5.8)), se apelează la un artificiu de calcul, cunoscut sub denumirea de *transformarea măsurătorilor condiţionate în măsurători indirecte* (**Botez**, 1961, pg. 264). În acest scop se exprimă primele r corecţii v din sistemul (5.6), în raport de celelalte corecţii v_{r+1} , v_{r+2}, …, v_n:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 v_{r+1} + B_1 v_{r+2} + \ldots + N_1 v_n + L_1 \ ; \\ v_2 &= A_2 v_{r+1} + B_2 v_{r+2} + \ldots + N_2 v_n + L_2 \ ; \\ &\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ v_r &= A_r v_{r+1} + B_r v_{r+2} + \ldots + N_r v_n + L_r \ , \end{aligned} \tag{5.25}$$

la care se adaugă, desigur, identităţile:

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= v_{r+1} \ ; \\ v_{r+2} &= v_{r+2} \ ; \\ \vdots & \qquad \ldots \\ v_n &= v_n \ . \end{aligned} \tag{5.26}$$

Sistemul de *ecuaţii de corecţii* rezultat din asocierea sistemelor (5.25) şi (5.26) (specific prelucrărilor prin metoda *observaţiilor indirecte*) conţine *n ecuaţii* cu *n-r* necunoscute.

Prin urmare numitorul relaţiei (4.68) devine în acesată situaţie:

$$n - (n - r) = r. \tag{5.27}$$

Deoarece prin ambele metode avute în vedere *trebuie să se obţină aceleaşi rezultate* pentru toate mărimile care intervin în pelucrare, inclusiv pentru abaterea standard a unităţii de pondere s_0 , numărătorul relaţiei (4.68) se va păstra acelaşi, astfel încât rezultă:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \ . \tag{5.28}$$

Din cele două posibilităţi de determinare a abaterii standard a unităţii de pondere s_0 (relaţia (4.69)) la metoda observaţiilor indirecte şi respectiv relaţia (5.27) la metoda observaţiilor condiţionate), rezultă o ecuaţie simplă prin care se poate calcula *numărul r total* de ecuaţii de condiţie:

$$r = n - u. \tag{5.29}$$

Reamintim, pentru o recapitulare pe care o considerăm didactic necesară:

- r reprezintă numărul de ecuaţii de condiţie *la metoda observaţiilor condiţionate;*
- n reprezintă numărul de măsurători $\mathbf{m}^0$ efectuate în reţeaua geodezică, care se păstrează acelaşi atât *la metoda observaţiilor indirecte* cât şi la *metoda observaţiilor condiţionate* ;
- u reprezintă numărul de necunoscute (parametri) X care se determină în reţeaua geodezică, prin utilizarea metodei *observaţiilor indirecte*.

Aşa cum se anticipa la începutul capitolului, numărul total de ecuaţii de condiţie r se poate stabili cu uşurinţă, pin utilizarea formulei (5.29).

Componenta de la numărătorul relaţiei (5.28) se poate deduce în două modalităţi, pentru control: calculul direct şi, respectiv, cu utilizarea relaţiei (5.24).

5.4.2. Abaterea standard (eroarea medie) a unei măsurători oarecare m_i^0

Deoarece *toate rezultatele* la metoda observaţiilor condiţionate trebuie să coincidă cu cele de la metoda observaţiilor indirecte, ambele metode fiind riguroase, abaterea standard (eroarea medie) a unei măsurători oarecari se determină, după compensare, cu aceeaşi formulă:

$$s_{m_i^0} = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}. \tag{3.91}$$

5.4.3. Abaterea standard (eroarea medie) a unei funcţiuni de mărimi compensate

Determinarea abaterii standard (erorii medii) a unei mărimi oarecare rezultate din prelucrarea măsurătorilor prin *metoda observaţiilor condiţionate* (de exemplu cota unui reper de nivelment) *se realizează cu o oarecare dificultate*, comparativ cu *metoda observaţiilor indirecte.* O astfel de mărime trebuie exprimată, în prealabil, ca o funcţie de mărimile compensate **m**, care la rândul său sunt reprezentate de măsurătorile $\mathbf{m}^0$ (2.73) şi corecţiile acestora **v** (4.6) :

$$F = F(m_1^0 + v_1, m_2^0 + v_2, \dots, m_n^0 + v_n). \tag{5.30}$$

Atunci când funcţia considerată nu este adusă la o formă liniară, se poate proceda similar, în acest scop, în mod similar ca în **4.1.** sau în **5.1.** :

$$F = f_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_n v_n \quad , \tag{5.31}$$

unde :

$$f_0 = F(m_1^0, m_2^0, \dots, m_n^0). \tag{5.32}$$

Deducerea formulei de calcul al abaterii standard (al erorii medii) a funcţiei F, notată s_F , ar necesita un spaţiu care depăşeşte destinaţia manualului. De aceea se prezintă formula necesară fără demonstraţie (care poate fi urmărită în lucrări mai extinse **Wolf**, 1968, pg.89, **Fotescu**, 1975, pg.113, **Ghiţău**, 1983, pg.175 ş.a.):

$$s_F = s_0 \sqrt{Q_{FF}} \ , \tag{5.33}$$

unde Q_{FF} este *coeficientul de pondere al funcţiei considerate*. Acesta se calculează cu următoarea formulă:

$$Q_{FF} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bf.1}{p}\right]^2}{\left[\frac{bb.1}{p}\right]} - \dots \tag{5.34}$$

Observaţii:

- Se cunosc mai multe procedee de calcul al coeficientului de pondere Q_{FF} . Cel mai folosit procedeu constă în adăugarea de coloane suplimentare (câte o coloană pentru fiecare funcţie de forma (5.31)) la sistemul de ecuaţii liniarizate (5.7);
- Modalitatea de calcul se va explica în detaliu la orele de lucrări practice şi poate fi urmărite din exemplul următor.

Aplicaţia 19

Să se compenseze mărimile geodezice, efectuate în reţeaua considerată la ***Aplicaţia 18***, prin metoda observaţiilor condiţionate.

Rezolvare

Tabelul 19. Cotele reperilor de nivelment

Reperul vechi de nivelment	Cotele reperilor vechi H	Denumirea liniei de nivelment din care se determină cota reperului nou	Diferenţa de nivel compensată	Denumirea reperului de nivelment	Cota reperului de nivelment după compensare	Abaterile standard ale cotelor s_{x_i}
	[m]		[m]		[m]	[mm]
0	1	2	3	4	5	6
A	184.7350	A → 1	8.2335	1	192.9685	1.8
B	215.8450	1 → 2	6.1229	2	199.0914	2.2
		2 → 3	- 10.7331	3	188.3582	1.9
		3 → 4	- 17.6347	4	170.7236	2.2
		4 → 1	22.2449	1 (control)	192.9685	
		1 → A (contol)	8.2335	A (control)	184.7350	
		3 → B(control)	27.4868	B (control)	215.8451	

$$s_{x_i} = s_0\sqrt{Q_{F_iF_i}}$$

Indicaţii practice

- Rezultatele din coloanele 3 … 6 din *Tabelul 19* se completează *după* rezolvarea ecuaţiilor normale ale corelatelor (*Tabelul 22*), calculul corecţiilor v (*Tabelul 20*), respectiv al coeficienţilor de pondere necesari deducerii abaterilor standard (erorilor medii) ale cotelor (sub *Tabelul 22*).
- *Tabelul 22* conţine şi verificările necesare pe cotele punctelor vechi, ceea ce reprezintă un caz particular al considerentelor de natură teoretică din **5.3**.
- Ponderile măsurătorilor sunt aceleaşi ca în *Tabulul 11*.
- La o *rezolvare separată, numai prin metoda observaţiilor condiţionate,* în ordine firească ar fi trebuit să se continue cu *Tabelul 14,* ceea ce este lipsit de sens, deoarece ar fi o simplă repetare (corecţiile **v** din *Tabelul 15* şi tespectiv *Tabelul 20* coincid şi de asemenea abaterile standard ale diferenţelor de nivel $s_{m_i^0}$, care se calculează, la ambele metode, cu formula (3.104)).
- In mod asemănător, se obţine aceleaşi rezultat pentru abaterea standard a unitătii de pondere s_o, determinată cu formulele specifice (4.68) şi respectiv (5.28).
- *Numărul total* de ecuaţii de condiţie r se determină cu formula (5.29), fiind în situaţia de faţă:

$$n = 6 - 4 = 2\,. \tag{5.35}$$

- Ecuaţiile de condiţie în cazul *reţelelor de nivelmant geometric* sunt de două categorii. Exemplificând pe reţeaua de nivelment avută în vedere, acestea sunt:
  - *pentru fiecare poligon de nivelment trebuie îndeplinită o ecuaţie de condiţie de forma:*

$$\Delta h_{1\text{-}2} - \Delta h_{3\text{-}2} - \Delta h_{4\text{-}3} + \Delta h_{4\text{-}1} = 0. \tag{5.36}$$

  Acesta este *primul tip* de ecuaţii de condiţie în cazul prelucrării măsurătorilor geodezice efectuate în reţelele de nivelment. După cum se observă în relaţia de mai sus, condiţia respectivă este îndeplinită de *diferenţele de nivel compensate*.

    - La fel ca şi la ***Aplicaţia 18*** este indicat ca la scrierea ecuaţiilor de forma (5.36) să se atribuie ca sens pozitiv al diferenţelor de nivel sensul crescător al acestora.

      Scrierea ecuaţiilor de condiţie se face unitar, prin acceptarea unui anumit sens (de regulă se foloseşte sensul orar) pentru toate ecuaţiile, aşa cum se poate urmări şi pe schiţa din Fig. 18.

- Introducând în continuare relaţii de forma (4.1), particularizate pentru lucrările de nivelment:

$$\Delta h_{i-j} = \Delta h^{0}_{i-j} + v_{i-j} \ , \qquad (5.37)$$

rezultă:

$$\Delta^{0}_{1-2} + v_{1-2} - \left(\Delta^{0}_{3-2} + v_{3-2}\right) - \left(\Delta^{0}_{4-3} + v_{4-3}\right) + \Delta^{0}_{4-1} + v_{4-1} = 0 \ . \qquad (5.38)$$

- Prin adunarea *diferenţele de nivel măsurate* se obţine *neînchiderea în poligonul de nivelment* considerat, aşa cum rezultă din formulele (5.5), care reprezintă în acelaşi timp şi termenul liber al primei ecuaţii de condiţie:

$$\omega_1 = \Delta h^{0}_{1-2} - \Delta h^{0}_{3-2} - \Delta h^{0}_{4-3} + \Delta h^{0}_{4-1} = +3.0 \text{ mm}. \qquad (5.39)$$

- Din ultimele trei relaţii se obţine prima ecuaţia de condiţie din sistemul de forma (5.7), care în exemplul urmărit are forma:

$$v_{1-2} - v_{2\text{-}3} - v_{4\text{-}3} + v_{4-1} + 3.0 = 0 \ . \qquad (5.40)$$

- *Dacă în reţeaua de nivelment există un număr de t puncte vechi, atunci trebuie îndeplinite t-1 ecuaţii de condiţie* (numite şi ecuaţii *de acord pe cotele punctelor vechi*). Acesta este *cel de-al doilea tip* de ecuaţii de condiţie în cazul prelucrării măsurătorilor geodezice efectuate în reţelele de nivelment. Şi la scrierea acestui tip de ecuaţii se păstrează convenţiile de semn stabilite anterior. In cazul nostru t = 2, deci trebuie îndeplinită condiţia de acord pe cotele punctelor vechi A şi B:

$$H_A + \Delta h_{A\text{-}1} + \Delta h_{1\text{-}2} - \Delta h_{3\text{-}2} + \Delta h_{3\text{-}B} = H_B \ ; \qquad (5.41)$$

Parcurgând aceleaşi etape ca la scrierea ecuaţiei de condiţie precedentă, se obţine:

$$v_{A-1} + v_{1\text{-}2} - v_{3\text{-}2} + v_{3\text{-}B} - 3.0 = 0 \ . \qquad (5.42)$$

Termenul liber aferent ecuaţiei (5.42) se determină asemănător ca în cazul anterior:

$$\omega_2 = H_A + \Delta h^{0}_{A-1} + \Delta h^{0}_{1-2} - \Delta h^{0}_{3-2} + \Delta h^{0}_{3\text{-}B} - H_B = -3.0 \text{ mm} \ . \qquad (5.43)$$

- Aşa cum s-a menţionat şi în **cap. 4**, *între doi reperi vechi de nivelment* (*cu cotă fixă*, care nu se modifică prin prelucrarea geodezică), între care nu există reperi noi, nu se execută măsurători de nivelment. Ca urmare, în asemenea situaţii, nu vor exista ecuaţii de condiţie.

Concluzionând, în cazul reţelei de nivelment din Fig. 18 este necesar s-ă fie îndeplinite doar condiţiile (5.40) şi (5.42) în care intervin termenii liberi determinaţi cu relaţiile (5.39) şi respectiv (5.43) .

Abaterile standard (erorile medii) ale cotelor punctelor noi se determină cu formulele (5.30) - (5.33), după metodologia descrisă în **5.4.3**. În acest scop se scriu funcţiile aferente, care în exemplul considerat au deja o formă practic liniară, reprezentînd modalitatea de determinare a cotelor acestor puncte:

$$\begin{aligned} &F_1 = H_A + \Delta h_{A\text{-}1};\\ &F_2 = H_A + \Delta h_{A\text{-}1} + \Delta h_{1\text{-}2};\\ &F_3 = H_A + \Delta h_{A\text{-}1} + \Delta h_{1\text{-}2} - \Delta h_{2\text{-}3};\\ &F_4 = H_A + \Delta h_{A\text{-}1} + \Delta h_{1\text{-}2} - \Delta h_{2\text{-}3} - \Delta h_{4\text{-}3}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Dacă se introduc diferenţele de nivel măsurate şi corecţiile v aferente rezultă forma finală a acestor funcţiuni:

$$\begin{aligned} &F_1 = f_{10} + v_{A-1};\\ &F_2 = f_{20} + v_{A-1} + v_{1-2};\\ &F_3 = f_{30} + v_{A-1} + v_{1-2} - v_{2-3};\\ &F_4 = f_{40} + v_{A-1} + v_{1-2} - v_{2-3} - v_{4-3}; \end{aligned} \tag{5.45}$$

unde :

$$\begin{aligned} &f_{10} = H_A + \Delta h^0_{A-1};\\ &f_{20} = H_A + \Delta h^0_{A-1} + \Delta h^0_{1-2};\\ &f_{30} = H_A + \Delta h^0_{A-1} + \Delta h^0_{1-2} - \Delta h^0_{2-3};\\ &f_{30} = H_A + \Delta h^0_{A-1} + \Delta h^0_{1-2} - \Delta h^0_{2-3} - \Delta h^0_{4-3}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Calculele decurg în continuare în tabele adecvate reţelei geodezice avute în vedere. Se mai dau următoarele

indicaţii practice

pentru exemplul numeric urmărit:

- la fel ca şi în ***Aplicaţia 18*** cifrele din *Tabelul 20* se completează în două etape şi anume:
  - coloanele 1…9, sumele de control, sumele $\left[\frac{ff}{p}\right]$ precum şi ω_1, ω_2 trebuie completate *înainte* de formarea ecuaţiilor normale (*Tabelul 21*);
  - coloana 10, valorile corelatelor k_1 şi k_2, precum şi controlul specific, dat de relaţia (5.24), se vor completa după rezolvarea sistemului de ecuatii normale (*Tabelul 22*);
- formarea sistemului ecuaţiilor normale şi ai celorlalţi termeni, necesari la deducerea coeficienţiilor de pondere $Q_{F_iF_i}$ (i = 1,…,4) este controlată similar cum s-a procedat la *Tabelul 18*.

Tabelul 17. Ecuaţiile de condiţie. Calculul corecţiilor v şi al unor estimatori de precizie

Linia de nivelment	Ponderi	Ecuaţiile de condiţie / Valoarea corelatelor k		F u n c ţ i i l e d e p o n d e r e				Sume	Corecţii
$i \rightarrow j$	p_{ij}	k_1 = - 0.11708	k_2 = 0.10541	F_1	F_2	F_3	F_4	S	v_i [mm]
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A - 1	0.07		+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 5	1.5
1 - 2	0.08	+ 1	+ 1		+ 1	+ 1	+ 1	+ 5	- 0.1
3 - 2	0.10	- 1	- 1			- 1	- 1	- 4	0.1
4 - 3	0.07	- 1					- 1	- 2	1.7
4 - 1	0.11	+ 1						+ 1	- 1.1
3 - B	0.06		+ 1					+ 1	1.8
S u m e		0	+ 2	+ 1	+ 2	+ 1	0	+ 6 / + 6	
Termeni liberi		w_1 = 3.0 mm	w_2 = - 3.0 mm						
			$\left[\frac{f\,f}{p}\right]$	14.285	26.786	36.786	51.071		
Controlul specific: - [kw] = 0.67								[pvv] = 0.67	

Tabelul 18. Sistemul de ecuaţii normale ale multiplicatorilor **Gauss - Lagrange.**

Termenii suplimentari pentru coeficienţii de pondere ai funcţiilor considerate.

	$\alpha]$	$\beta]$	$F_1]$	$F_2]$	$F_3]$	$F_4]$	Sume	Control
$\left[\frac{\alpha}{p}\right.$	45.8766	22.5000	0.0000	12.5000	22.5000	36.7857	140.1623	140.1623
$\left[\frac{\beta}{p}\right.$		53.4524	14.2857	26.7857	36.7857	36.7857	190.5952	190.5952

Tabelul 19. Rezolvarea sistemului de ecuaţii normale ale multiplicatorilor **Gauss - Lagrange**.

Calculul coeficienţilor de pondere ai funcţiilor considerate

k_1	k_2	w	Funcţii de pondere F_1	F_2	F_3	F_4	Sume S	Control
45.8766	22.5000	3.0000	0.0000	12.5000	22.5000	36.7857	143.1623	
- 1	- 0.49044	- 0.06539	0.0000	- 0.27247	- 0.49044	-0.80184	- 3.12059	- 3.12059
k_1 = - 0.11709	53.4524	- 3.0000	14.2857	26.7857	36.7857	36.7857	187.5952	
	42.4173	- 4.4713	14.2857	20.6552	25.7507	18.7443	117.3818	117.3818
	- 1	+ 0.10541	- 0.33679	- 0.48695	- 0.60708	- 0.44190	- 2.76731	- 2.76731

k_2 = + 0.10541

Verificare

[(S - F - w) k] = 0.0001

- [w] = 0.0000

	F_1	F_2	F_3	F_4
$\left[\frac{f\,f}{p}\right]$	14.285	26.786	36.786	51.071
$Q_{F_iF_i}$	9.47	13.32	10.12	13.29
$\sqrt{Q_{F_iF_i}}$	3.07	3.65	3.18	3.65

Verificarea globală a compensării

se realizează prin introducerea diferenţelor de nivel compensate în ecuaţiile de condiţie, după care se obţine:

- pentru ecuaţia de condiţie (5.37) : 0.000 m;
- pentru ecuaţia de condiţie (5.41) : 0.0001 m.

Remanenţa de 0.1 mm la ecuaţia de condiţie (5.41) se datorează rotunjirilor de calcul.

Constatare finală

Toate mărimile finale obţinute prin prelucrarea diferenţelor de nivelment măsurate în reţeaua geodezică avută în vedere :

- cotele punctelor noi;
- diferenţele de nivel compensate;
- estimatorii de precizie
  - abaterea standard a unităţii de pondere;
  - abaterile standard ale diferenţelor de nivel măsurate, estimate după compensare;
  - abaterile standard ale cotelor punctelor noi, estimate după compensare

sunt identice în cadrul celor două metode de prelucrare folosite:

- *metoda observaţiilor indirecte;*
- *metoda observaţiilor condiţionate.*