FACULTATEA DE CONSTRUCŢII
SPECIALIZAREA MĂSURĂTORI TERESTRE ŞI CADASTRU

TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE

Suport de curs

CUPRINS

1. PROBLEME DE BAZĂ ÎN STUDIUL TEORIEI ERORILOR DE MĂSURARE

Informaţiile, care constituie baza concretă de date necesară rezolvării problemelor geodezice, fotogrametrice şi topografice, provin din observaţiile efectuate asupra unor mărimi cu care se lucrează frecvent şi care, în principal, sunt reprezentate de măsurătorile de unghiuri şi distanţe. **Calitatea** informaţiilor obţinute din aceste măsurători este funcţie directă de **volumul** observaţiilor şi de **precizia** instrumentelor de măsurat.

Se impune aşadar, ca pornind de la scopul pentru care sunt efectuate măsurătorile să se stabilească valorile corespunzătoare ca mărime şi precizie, luând în considerare aspectul economic referitor la volumul strict necesar şi suficient al observaţiilor care se impun.

Teoria erorilor de măsurare sau teoria prelucrării măsurătorilor geodezice intervine cu succes şi rezolvă favorabil aceste aspecte.

1.1 IMPORTANŢA TEORIEI ERORILOR DE MĂSURARE

Operaţia de măsurare reprezintă un proces experimental de obţinere a informaţiei sub forma unui raport numeric, între valoarea mărimii fizice măsurate şi valoarea unei alte mărimi de acelaşi gen considerată drept unitate de măsură.

Scopul unei cercetări ştiinţifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a fi puse în slujba activităţii umane. Pentru aceasta, este necesară îmbinarea cercetării ştiinţifice cu aplicaţia tehnică – practică, fără de care orice speculaţie abstractă devine sterilă.

Pentru realizarea acestui deziderat, prima condiţie în alegerea mărimilor fizice, înţelegând prin aceasta şi mărimile care intervin în tehnică şi în practică, este ca ele să fie măsurabile.

Pentru mărimi scalare, operaţia de măsurare se exprimă matematic prin formula

$$Q = n \cdot q \qquad 1.1$$

în care: Q – mărimea fizică măsurată, q – unitatea de măsură, n - număr oarecare.

Este de remarcat faptul că membrul al doilea al ecuaţiei (1.1) denumită uneori şi ecuaţia fundamentală a măsurării, este un produs de doi factori caracteristici distincţi: unul cantitativ n, factor numeric, iar celalalt calitativ q, care defineşte natura mărimii rezultante Q.

Rezultatul măsurării Q se mai numeşte măsura sau valoarea mărimii considerate. Este evident că, rezultatul final al operaţiei de măsurare presupune efectuarea măsurării propriu-zise, codificarea şi prelucrarea informaţiilor de măsurare.

Din punctul de vedere al subordonării metrologice, se deosebesc mijloace de măsurat etalon şi de lucru. Etaloanele servesc la reproducerea şi păstrarea unităţilor de măsură, precum şi la verificarea altor mijloace de măsurat. Mijloacele de măsurat de lucru servesc la executarea operaţiilor de măsurare în procese tehnologice, în lucrări de laborator etc.
Se cunoaşte faptul că dacă o mărime se măsoară de mai multe ori, de fiecare dată se obţine o altă valoare chiar dacă măsurătorile se desfăşoară în aceleaşi condiţii, de către acelaşi operator şi cu instrumente de mare precizie.
Cauza acestor neconcordanţe se datorează erorilor care afectează întotdeauna o măsuratoare, făcând ca valoarea adevărată a mărimii măsurate să nu poată fi cunoscută niciodată.
Practic, neputând fi determinată valoarea adevărată a mărimii măsurate, se caută să se determine o valoare apropiată de aceasta într-un grad mai mare sau mai mic funcţie de scopul pentru care se execută măsurătorile.
Apropierea mărimii determinate faţă de valoarea sa adevărată caracterizează precizia măsurătorii.
Ca urmare, prelucrarea măsurătorilor efectuate asupra unei mărimi urmăreşte obţinerea celei mai bune valori a acesteia şi a diferenţei maxime între valoarea determinată şi valoarea adevărată.

1.2 IMPORTANŢA TEORIEI ERORILOR PENTRU PRACTICA MĂSURĂTORILOR TERESTRE

Teoria erorilor de măsurare prezintă o importanţă deosebită pentru practica măsurătorilor terestre, datorită volumului impresionant de observaţii ce trebuie executate, prelucrate şi compensate în vederea obţinerii valorilor lor celor mai probabile, ca şi pentru evaluarea cât mai corectă şi mai completă a preciziei.
Cunoscându-se cât mai exact mărimile erorilor medii ale fiecărui argument măsurabil în parte, se poate determina eroarea medie a unei funcţii de aceste argumente. În acest fel, se poate rezolva problema inversă a erorilor de măsurare, în cadrul căreia, faţă de o eroare maximă impusă apriori unei funcţii ce urmează a se determina, se va stabili încă din faza de proiect, care trebuie să fie erorile maxime cu care se vor măsura pe teren argumentele componente. Aceasta dă posibilitatea stabilirii preciziei optime de măsurare, cu avantaje economice importante. Astfel, la realizarea unei reţele de triangulaţie, necesară ridicărilor topografice, a unei reţele de microtriangulaţie necesară pentru urmărirea comportării unei construcţii etc., studiul preciziei de determinare a poziţiei punctelor reţelei se face încă din faza de proiectare, funcţie de configuraţia reţelei şi de precizia cu care se vor executa măsurătorile pe teren. Acest studiu va urmări ca erorile în poziţia punctelor să se încadreze în toleranţele impuse anticipat. La sfârşit, prin compararea erorilor post-compensate cu erorile stabilite anticipat, se va putea aprecia corectitudinea studiului făcut. Studiul erorilor de

măsurare prezintă o importanţă cu totul deosebită în acele domenii ale măsurătorilor terestre (Geodezie, Fotogrametrie, Geodezie şi Topografie aplicată în construcţii), în care exigenţele impuse în privinţa preciziei sunt deosebit de ridicate. Se subliniază faptul că de fiecare dată în practica măsurătorilor terestre trebuie avută în vedere precizia optimă necesară. Aceasta deoarece o precizie exagerată conduce la cheltuieli inutile de forţă de muncă, de mijloace materiale şi de timp, iar o precizie insuficientă duce la o calitate slabă a rezultatelor obţinute din măsurători.

Introducerea automatizării în prelucrarea observaţiilor constituie un salt calitativ important, cu consecinţe remarcabile şi în domeniul măsurătorilor terestre, ca şi în studiul erorilor de măsurare .

Teoria matematică a informaţiei formulează legile generale ale comenzii, controlului şi comunicaţiilor şi stabileşte principiile de codificare, prelucrare, păstrare şi transmitere a informaţiei, asociindu-se cu tehnica de calcul automat. Această nouă direcţie constituie o etapă superioară în dezvoltarea metodelor de prelucrare a rezultatelor obţinute din măsurători.

1.3 SCURT ISTORIC AL TEORIEI ERORILOR DE MĂSURARE ŞI A METODEI CELOR MAI MICI PĂTRATE

Problema prelucrării observaţiilor a apărut întâi în domeniul astronomiei, în special după descoperirea lunetei de către Galileo-Galilei (1564–1642) şi
perfecţionarea continuă a instrumentelor şi aparatelor de măsură. După ce teoria greşită a sistemului geocentric, elaborată şi prezentată de Claudiu Ptolemeu (90–168) în lucrarea sa "Megale Byntaxis", a dominat cunoaşterea ştiinţifică circa 12 secole, ea este infirmată de către Nicolaus Copernic (1473–1543), care elaborează teoria sistemului heliocentric şi pe care o fundamentează în lucrarea "Despre mişcările de revoluţie ale corpurilor cereşti".

Marele astronom Johannes Keppler (1571–1630), discipolul şi continuatorul lui Tycho Brahe (1546–1601), pe baza măsurătorilor înaintaşului său, dar şi din determinări personale, confirmă definitiv teoria heliocentrică a lui Copernic, descoperă forma eliptică a orbitelor planetelor şi formulează cele trei legi pe baza cărora are loc mişcarea planetelor în jurul Soarelui.

A devenit clar că pentru justa înţelegere a sistemului de alcătuire a Universului, este nevoie de executarea unui număr mare de măsurători, cu o precizie cât mai bună şi a căror prelucrare să se facă după criterii cât mai corecte.

Însăşi confirmarea legii atracţiei universale, descoperită de Isaac Newton (1642–1727), s-a putut face 18 ani mai târziu, după ce în Franţa s-a determinat destul de precis, valoarea razei Pământului.

De multe ori, precizia insuficientă a măsurătorilor efectuate a condus la contradicţii între teorie şi practică. A fost nevoie să se construiască instrumente şi aparate de măsură cu caracteristici superioare şi în acelaşi timp, să se elaboreze şi o teorie adecvată a măsurătorilor şi a erorilor de măsurare.

O dezvoltare remarcabilă a teoriei erorilor şi a metodei celor mai mici pătrate, a avut loc la sfârşitul secolului al XVIII–lea şi începutul secolului al XIX-lea, fiind legată de numele lui A. M. Legendre, K.F. Gauss şi P. S. Laplace.
Adrien Maria Legendre (1752-1833) fundamentează pentru prima dată teoria prelucrării observaţiilor făcând studii asupra erorilor şi aplicându-le ulterior la prelucrarea măsurătorilor astronomice. Aceste studii, împreună cu dezvoltarea principiilor metodei celor mai mici pătrate sunt cuprinse în lucrarea sa ”Noi metode pentru determinarea orbitelor cometelor” apărută în anul 1806.
Independent de A. M. Legendre, matematicianul Karl Friederich Gauss (1777-1855) descoperă metoda celor mai mici pătrate, pe care o aplică tot la prelucrarea măsurătorilor astronomice. Teoria sa este cuprinsă în lucrarea
”Teoria mişcării corpurilor cereşti ce se rotesc în jurul Soarelui după secţiuni conice”, publicată în 1809.
Pe lângă multe alte probleme teoretice, K. F. Gauss propune şi formula care pune în evidenţă repartiţia normală a erorilor aleatoare.
În lucrările sale ulterioare, K. F. Gauss aprofundează latura algebrică a metodei celor mai mici pătrate, deducând o serie de formule necesare evaluării preciziei măsurătorilor.
Pierre Simon Laplace (1749–1827), în tratatul său de bază ”Teoria analitică a probabilităţilor”, dă o nouă fundamentare teoretică metodei celor mai mici pătrate, care constituie de fapt premiza dezvoltării teoretice ulterioare. El are meritul de a fi făcut şi legătura strânsă dintre erori şi probabilitate, prin definirea corectă a formulei probabilităţii unei erori.
Măsurarea arcelor de meridian şi a latitudinilor, ca şi prelucrarea acestora, a permis determinarea formei şi dimensiunilor Pământului pe baza cărora s-a elaborat sistemul metric, sistem practic de măsuri ”bun pentru toate timpurile şi pentru toate popoarele”.
De asemenea, întocmirea hărţilor şi planurilor topografice ale ţărilor, a impus mai întâi, crearea reţelelor de triangulaţie geodezică de sprijin. Calculele de compensare a marilor reţele de triangulaţie au necesitat dezvoltarea corespunzătoare şi a teoriei erorilor.
În dezvoltarea teoriei erorilor de măsurare, a metodei celor mai mici pătrate şi a teoriei probabilităţilor şi-au adus contribuţii importante F. W. Bessel (1784–1846), N. I. Lobacevski (1792–1856), P. L. Cebîşev (1821–1894), A. L. Cauchy (1789–1857), U. Le Verrier (1811–1877).
Statistica matematică dezvoltă într-o optică nouă, atât teoria erorilor, cât şi metoda celor mai mici pătrate. Lucrări de înaltă ţinută ştiinţifică în domeniul teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice au elaborat în ţara noastră academicienii Gheorghe Mihoc şi Octav Onicescu.
În ultimele decenii, lucrările unor specialişti formaţi la şcoala acestor doi savanţi, se aplică cu mult succes în practică.
Aplicarea teoriei erorilor de măsurare şi a metodei celor mai mici pătrate în domeniul măsurătorilor terestre, în special al geodeziei şi topografiei, a fost făcută de reputaţii specialişti români Ştefan Paraschivescu, Theodor Pompei, Ioan Virgiliu, Constantin Motaş, Ioan Plăcinţeanu, Mihai P.Botez, unii dintre ei fiind şi cadre universitare cu lucrări ştiinţifice teoretice şi practice de prestigiu.

2. MĂSURĂTORI ŞI ERORI DE MĂSURARE

S-a văzut că prin măsurare se înţelege determinarea valorii unei mărimi fizice prin raportarea acesteia la o altă mărime de aceeaşi natură, adoptată ca unitate, folosind un instrument sau un aparat de măsură.
Toate lucrările de topografie şi geodezie se bazează pe măsurători efectuate în scopul determinării poziţiei diferitelor obiecte şi fenomene din spaţiul terestru. Aceste măsurători se referă în special la mărimi liniare (lungimi) şi la mărimi unghiulare (unghiuri).
Aşa cum rezultă din definiţie, orice proces de măsurare presupune, în primul rând, existenţa unei **unităţi de măsură** în raport de care să fie exprimată valoarea observată. De-a lungul timpului s-au utilizat diferite unităţi de măsură, în prezent, majoritatea ţărilor lumii, printre care şi România, a adoptat **Sistemul Internaţional de Unităţi** (SI).
În urma unei măsurători se obţine o valoare măsurată, numită şi observaţie, care nu reprezintă altceva decât raportul dintre mărimea fizică măsurată şi unitatea de măsură reprodusă de instrumentul folosit.

2.1 CLASIFICAREA MĂSURĂTORILOR

Măsurătorile pot fi clasificate după următoarele criterii:

2.1.1 După modul de obţinere a mărimii fizice care interesează:

a) măsurători directe la care mărimea fizică considerată se compară direct cu unitatea de măsură, fiecare măsurătoare efectuată generând câte o valoare a mărimii măsurate.

Exemple de măsurători directe:
-măsurarea unui unghi cu teodolitul
-măsurarea unei lungimi cu ruleta

Se mai consideră ca măsurători directe şi anumite funcţii simple de măsurători directe şi anume:

-diferenţa dintre două mărimi măsurate direct (exemplu: diferenţa de nivel rezultată prin scăderea citirilor pe miră),
-produsul dintre o mărime măsurată şi o constantă
Un caz special al măsurătorilor directe îl constituie măsurătorile condiţionate, definite ca măsurători directe ce trebuie să satisfacă o serie de condiţii geometrice sau analitice.

Exemple de măsurători condiţionate:
1. Într-o reţea de formă triunghiulară au fost măsurate toate unghiurile.
Teoretic, acestea trebuie să îndeplinească condiţia din geometria plană că suma lor să fie egală cu 200^g.
2. Suma diferenţelor de nivel într-o drumuire închisă, trebuie să fie egală cu zero.

b) măsurători indirecte la care valoarea mărimilor care ne interesează se obţine prin intermediul altor mărimi măsurate direct, acestea fiind funcţional dependente între ele.

Exemple de măsurători indirecte:

1. determinarea coordonatelor punctelor unei reţele geodezice prin măsurători liniare, dependenţa între mărimile de determinat (x_i, y_i) şi mărimile măsurate direct (D_{ij}), fiind:

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \qquad 2.1$$

2. determinarea elementelor elipsoidului de rotaţie pământesc (semiaxa şi turtirea), prin măsurarea lungimilor de arc de meridian şi de latitudini.

Sfera măsurătorilor indirecte este mult mai largă decât cea a măsurătorilor directe, primele fiind de multe ori şi mult mai simple.
Există şi anumite mărimi care practic nici nu pot fi măsurate direct, de exemplu determinarea densităţii care se face în funcţie de volum şi masă (mărimi ce se pot măsura direct),$\delta = \delta(V, M)$ sau determinarea unor constante fizice cum ar fi acceleraţia gravitaţională, etc.

2.1.2 După condiţiile în care sunt executate:

a) măsurători de aceeaşi precizie, când se efectuează cu acelaşi instrument, de către acelaşi operator, prin aceeaşi metodă de lucru şi în aceleaşi condiţii de mediu.
În acest caz se poate considera că tuturor acestor măsurători le putem acorda aceeaşi încredere.
b) măsurători de precizii diferite (ponderate), când unul din factorii de mai sus diferă, deci nu mai putem acorda aceeaşi încredere tuturor măsurătorilor, unele fiind determinate mai precis decât altele.

2.1.3 După legătura dintre ele:

a) măsurători dependente
Dacă ansamblul condiţiilor în care se efectuează o măsurătoare influenţează total sau parţial rezultatul altei măsurători, se spune că acestea sunt dependente între ele.
b) măsurători independente
Sunt acelea care nu se influenţează reciproc.
Corelaţia sau dependenţa între mărimi se exprimă cu ajutorul unui coeficient empiric de corelaţie, dedus experimental pe cale statistică efectuând mai multe măsurători.
Aceste determinări sunt însă foarte greoaie.

2.1.4 După numărul lor:

a) măsurători necesare definite prin numărul minim de măsurători, cu ajutorul cărora se poate stabili valoarea mărimii considerate.
b) măsurători suplimentare efectuate în vederea ridicării preciziei de măsurare sau a preîntâmpinării eventualelor greşeli ce pot apărea.
Aceste măsurători suplimentare determină numărul gradelor de libertate ale reţelei respective.

2.2 CLASIFICAREA ERORILOR DE MĂSURARE

Se numeşte ***eroare*** diferenţa dintre valoarea măsurată şi valoarea adevărată a unei mărimi fizice: $e = M - X$, unde prin *M* s-a notat valoarea obţinută prin măsurare, iar prin *X*, valoarea adevărată.
Valoarea reală a unei mărimi nu poate fi determinată niciodată din cauza inexactităţilor care apar în procesul de măsurare.
Această imposibilitate poate fi generată de o serie întreagă de cauze cum ar fi:
variaţia în timp a obiectului măsurat, imperfecţiunea organelor de simţ ale operatorului, imperfecţiunea aparaturii şi a metodelor de măsurare, influenţa condiţiilor exterioare etc.
Erorile pot fi clasificate după cum urmează:

2.2.1 După modul de alegere a mărimii nominale:

a) ***erori reale*** *(adevărate),* ε_i în cazul în care valoarea de referinţă (nominală) se consideră valoarea reală X a mărimii respective:

$$\varepsilon_i = M_i - X \qquad 2.2$$

Deoarece valoarea adevărată *X* a unei mărimi nu este accesibilă, înseamnă că
nici eroarea adevărată ε nu poate fi cunoscută.

b) ***erori aparente*** *(probabile)*, v_i în cazul în care se consideră ca valoare de referinţă, valoarea probabilă a mărimii respective:

$$\pm v_i = M_i - M \qquad 2.3$$

Valoarea probabilă a unei mărimi se consideră a fi media aritmetică în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie, sau media ponderată în cazul măsurătorilor de precizie diferită (ponderate).

Dacă se schimbă sensul unei erori se obţine corecţia, deci $c = -e$.

2.2.2 După mărimea lor:

a) erori evitabile (erori grosolane, greşeli)
Ele se pot evita printr-o atenţie sporită în timpul procesului de măsurare.
Exemplu: erori la metri de măsurare a distanţelor cu ruleta; erori de grade la citirea unghiurilor pe microscopul teodolitului.
Prin urmare, aceste erori grosolane sau greşeli sunt cu un ordin de mărime mai mari decât precizia de măsurare.
Acest tip de eroare se evidenţiază imediat într-un şir de măsurători putând fi eliminată cu uşurinţă pe baza coroborării datelor cu cele de la alte observaţii.
În calculele de compensare se consideră că măsurătorile nu sunt afectate de erori grosolane.

b) erori inevitabile ce nu pot fi eliminate indiferent de metoda folosită sau de gradul de atenţie al operatorului, ci doar diminuate.
Aceste erori pot fi clasificate după modul de acţionare astfel:

b.1 erori sistematice, sunt acelea la care se cunosc cauzele care le generează şi legile după care acţionează. Valoarea lor poate fi deci determinată şi în consecinţă se poate corecta rezultatul obţinut din măsurători.
Diminuarea erorilor sistematice se poate face prin:
- metoda de măsurare (de exemplu la măsurarea unghiurilor se efectuează determinări în cele două poziţii ale lunetei, eliminându-se eroarea de colimaţie)
- prin calcul, aplicându-se corecţii rezultatului (corecţia de etalonare, corecţia de temperatură, etc. la măsurarea distanţelor cu ruleta)
- printr-o reglare mai bună a aparatelor
- reducând la minim ponderea observaţiilor pentru care nu s-au putut îndepărta erorile sistematice

Erorile sistematice pot fi la rândul lor ***constante*** sau ***variabile***.

Exemplu: dacă un etalon cu care se măsoară distanţa este mai scurt cu 1 cm., pentru fiecare introducere a etalonului în distanţa de măsurat, se comite o eroare care îşi păstrează valoarea şi semnul. Avem de-a face cu o eroare sistematică constantă.
Aceasta se propagă după legea înmulţirii, adică eroarea totală este egală cu eroarea unitară înmulţită cu numărul care arată de câte ori intervine eroarea unitară în rezultatul final:

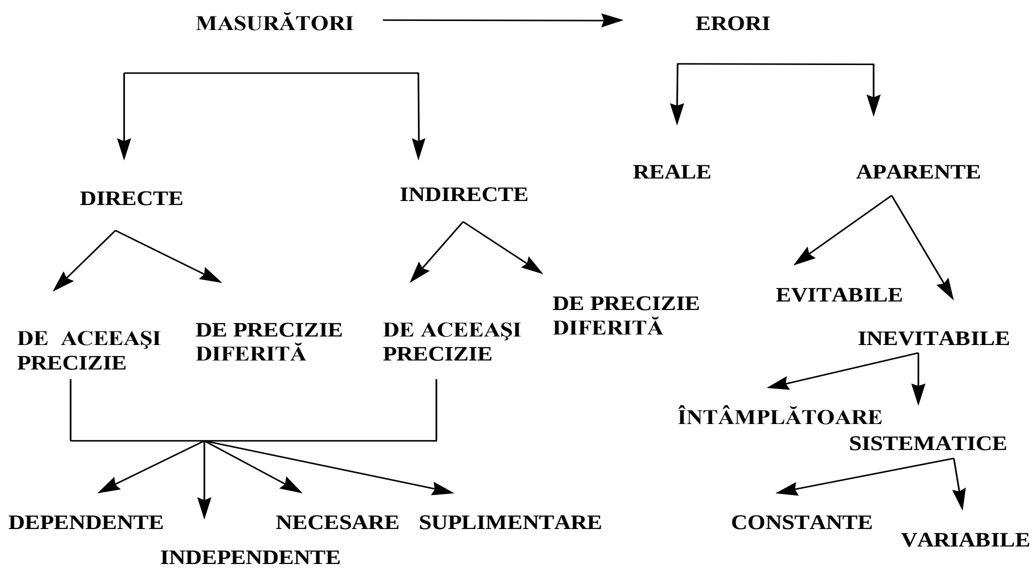
$$e_{st} = n \cdot e_s \qquad 2.4$$

e_{st} = eroare sistematică totală
n = numărul care arată de câte ori etalonul se cuprinde în mărimea măsurată
e_s = eroarea sistematică constantă unitară
Eroarea sistematică variabilă nu se propagă după legea liniară urmarită de erorile constante, deci ea nu îşi păstrează tot timpul semnul şi valoarea.

Exemplu: eroarea de excentricitate a limbului, când centrul acestuia nu coincide cu centrul alidadei.

b.2 erori întâmplătoare (accidentale), acelea care influenţează într-un mod întâmplător, cu cantităţi mici fiecare, dar apreciabile în total şi nu pot fi eliminate.
Erorile întâmplătoare pot fi diminuate prin efectuarea mai multor măsurători. Ele se micşorează de asemenea, prin perfecţionarea instrumentelor şi a metodelor de lucru.
În studiul teoriei erorilor, se consideră că măsurătorile au fost corectate de toate celelalte erori (greşeli, erori sistematice) şi *sunt afectate numai de erorile întâmplătoare.*

Schematic, această clasificare s-ar putea reda sub următoarea formă:



2.2.3 Proprietăţile erorilor întâmplătoare

Proprietăţile erorilor întâmplătoare sunt deduse din practică, ele permiţând studierea ştiinţifică a erorilor prin aplicarea calculului probabilităţilor.

- Erorile mici, în valoare absolută, sunt mai frecvente sau mai probabile decât cele mari. Această proprietate determină ***principiul cazualist.*** Deci, avem cazuri mai multe cu erori mici decât cu erori mari.
- Toate erorile sunt mai mici decât o anumită limită care ar corespunde erorii datorită sumei totale a cauzelor de erori. Prin această proprietate se defineşte ***principiul limitativ***.

- Făcând un număr foarte mare de măsurători, rezultă un număr egal de erori pozitive cât şi negative, suma lor fiind sensibil egală cu zero. Rezultă astfel ***principiul distributiv***.
- Probabilitatea ca să avem o anumită eroare este funcţie numai de mărimea erorii respective. Este definit astfel ***principiul probabilistic***.

Aplicând legile probabilităţilor matematice, s-a demonstrat că probabilitatea ca o eroare întâmplătoare să fie cuprinsă într-un interval oarecare x, $x + dx$, este:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \qquad 2.5$$

în care:
”e” reprezintă baza logaritmilor naturali (e = 2,71828…..);
”h” este modulul de precizie, care caracterizează precizia instrumentului utilizat pentru măsurători.

Dacă reprezentăm într-un sistem rectangular de axe XOY mărimea erorilor v_i pe abscisă, iar pe ordonată frecvenţa acestora, pentru un număr mare de măsurători, se obţine o curbă clopot numita *curba Gauss* simetrică în raport cu axa OY şi asimptotă la axa OX.
Determinarea erorii medii pătratice a mediei aritmetice ne permite să stabilim intervalul în care cu siguranţă se află valoarea reală *X*, fără însă a putea preciza valoarea exactă a acesteia.
Dacă curba este alungită înseamnă că avem mai multe erori mici care se grupează în jurul valorii zero; când clopotul este turtit erorile mari predomină.
În concluzie, se poate afirma că o măsurătoare este cu atât mai precisă cu cât clopotul este mai alungit.

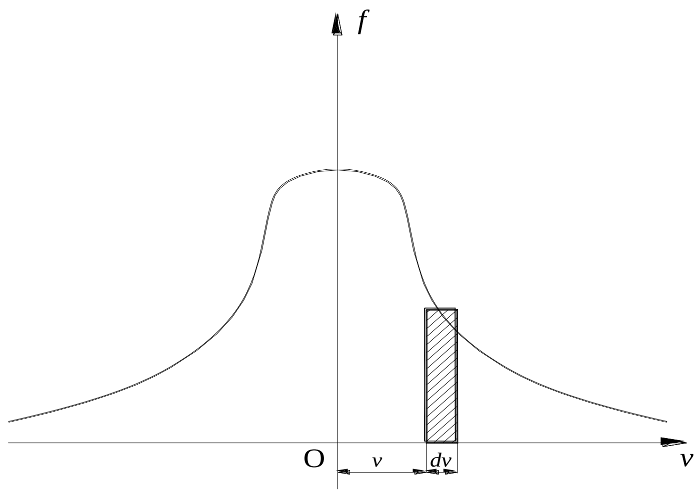


Fig. 2.1 Graficul de distribuţie a erorilor - Clopotul Gauss

2.3 ALTE TIPURI DE ERORI

2.3.1 ***eroarea relativă*** sau eroarea pe unitatea de măsură.

$$e_r = \frac{e}{M} \qquad 2.6$$

în care ”e” reprezintă eroarea absolută comisă la măsurarea mărimii M.
În acest raport, în locul lui ”e” se poate introduce eroarea medie pătratică (m), eroarea medie pătratică a mediei aritmeticei (e_m), sau eroarea probabilă (e_p).

2.3.2 ***eroarea probabilă*** (e_p) a unei valori măsurate individual este acea valoare pentru care numărul erorilor mai mari este egal cu cel al erorilor mai mici decât acestea.

$$e_p = \pm \frac{2}{3} m$$

$$e_p = \pm \frac{2}{3} e_m \qquad 2.7$$

unde: $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$; $e_m = \pm \frac{m}{\sqrt{n}}$

2.3.3 ***eroarea în procente şi la mie***
rezultă prin înmulţirea erorii relative cu 100, respectiv cu 1000.

2.3.4 ***precizia unei măsurători***
Dacă eroarea de măsurare creşte cu mărimea măsurată, precizia se exprimă prin eroarea relativă (e_r) pusă sub forma:

$$P = \frac{1}{\frac{M}{e}} \qquad 2.8$$

Numitorul expresiei arată de câte ori eroarea comisă la măsurare se cuprinde în mărimea măsurată.
Eroarea relativă ”e” se poate exprima prin una din erorile: m, e_m, e_p.

3. CONCEPTE STATISTICE

PRELUCRAREA STATISTICĂ A MĂSURĂTORILOR

Se defineşte noţiunea de probabilitate matematică a unei întâmplări, raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile producerii aceleaşi întâmplări sau:

$$P = \frac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}$$

Dacă numărul cazurilor favorabile este mai mic decât numărul celor posibile avem de-a face cu o probabilitate simplă. Dacă numărul de cazuri favorabile este egal cu numărul de cazuri posibile, avem o certitudine matematică sau probabilitate maximă.
Probabilitatea minimă va fi atunci când numărul de cazuri favorabile este egal cu zero.
În această situaţie putem afirma că este vorba de o incertitudine matematică.

Statistica este ramura matematicii aplicate care studiază culegerea, analiza şi interpretarea datelor privind fenomenele de masă.

Obiectivul cercetării statistice îl constituie o mulţime de elemente având caracteristici comune, mulţime numită ***populaţie statistică***.

O submulţime a acesteia, asupra căreia se fac analizele statistice reprezintă ***selecţia***.
Datele măsurate într-o selecţie permit să se stabilească o *estimaţie* a caracteristicii studiate, adică o valoare nici absolut exactă, nici absolut sigură, ci doar ”foarte probabilă”.
Elementele unei mulţimi statistice pot fi caracterizate printr-o serie de indicatori cantitativi şi calitativi. Numărul acestor indicatori trebuie judicios ales, pentru că un număr prea mic, generalizează prea mult fenomenul ales, iar un număr prea mare complică mult calculele.
În urma unor măsurători repetate asupra unei caracteristici se obţin valori diferite ale acesteia datorită caracterului întâmplător (aleator) pe care îl are caracteristica respectivă în cadrul populaţiei.
Pentru studiul matematic al fenomenelor cu caracter întâmplător, se introduce noţiunea de ”***variabilă aleatoare***”, adică o variabilă care în cadrul unei

experienţe poate primi oricare dintre valorile posibile, specifice experienţei respective.
Variabilele aleatoare pot fi *discrete*, adică pot lua doar anumite valori, (de exemplu, numărul obţinut la aruncarea unui zar), sau *continui*, adică pot lua orice valoare într-un interval finit sau infinit (de exemplu, rezultatul măsurării unei lungimi).
În geodezie în general sunt necesari şi suficienţi doi indicatori cantitativi şi anume: ***media şi dispersia***.

Repartiţii de frecvenţe

Diferitele valori ale caracteristicii măsurate au frecvenţe diferite, adică unele apar de mai multe ori decât altele. Pentru a putea compara selecţii de volume diferite, se foloseşte noţiunea de ”frecvenţă relativă ”, adică raportul dintre numărul de apariţii ale unei valori şi numărul total de măsurători.

Fie x o variabilă aleatoare şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile pe care le poate lua aceasta, cu frecvenţele relative f_1, f_2,…., f_n).

Mulţimea perechilor ordonate (x_i, f_i)), $i=1,2,\ldots,n$ defineşte *repartiţia variabilei aleatoare* x.

Dacă notăm cu F_i frecvenţa absolută a valorii x_i şi cu N numărul total de măsurători (valoarea x_i apare de F_i ori în N experimente repetate), rezultă:

$$f_i = \frac{F_i}{N} \tag{3.1}$$

deci, frecvenţa relativă este o măsură a probabilităţii.

În cazul populaţiilor discrete finite, probabilitatea unui eveniment este egală cu numărul cazurilor favorabile raportat la numărul total al cazurilor posibile.

De exemplu, la aruncarea unei perechi de zaruri numărul cazurilor în care poate apare suma 5 (numărul de cazuri favorabile), este de 4: (1-4); (2-3); (3-2); (4-1) iar numărul total de cazuri posibile este de 36: (1-1); (1-2); (1-3);…; (6-5); (6-6). Deci, probabilitatea de apariţie a sumei 5 este $P(5) = \frac{4}{36}$, în timp ce probabilitatea sumei 2 este $P(2) = \frac{1}{36}$.

În cazul unei variabile aleatoare continui, probabilitatea că aceasta să ia o anumită valoare este zero, deoarece numărul total de cazuri posibile este infinit.

Histograma

O formă des utilizată pentru reprezentarea grafică a repartiţiei frecvenţei este *histograma,* care se construieşte astfel:

-se grupează valorile variabilei în intervale (clase, (Δ_i, Δ_{i+1}))

-se înscriu pe abscisă limitele claselor şi pe ordonată frecvenţele (absolute sau relative) acestora (numărul de valori cuprinse în fiecare clasă)

-pentru fiecare înălţime se trece frecvenţa clasei

Dacă F_i este frecvenţa absolută a clasei (Δ_i, Δ_{i+1}), atunci repartiţia acestor frecvenţe poate fi reprezentată într-un sistem rectangular, în care un dreptunghi are ca bază clasa (Δ_i, Δ_{i+1}), iar aria este proporţională cu frecvenţa absolută F_i. Dacă ariile dreptunghiurilor elementare sunt egale cu frecvenţele relative, atunci aria totală a histogramei este egală cu unitatea.

În cazul în care frecvenţele absolute sunt prea mari şi deci incomod de reprezentat grafic, se trece la frecvenţe relative care se calculează cu ajutorul relaţiei:

$$f_i = \frac{F_i}{N} \qquad 3.2$$

În anumite situaţii, când intervalele (Δ_i, Δ_{i+1}) sunt mici şi numeroase, histograma poate fi înlocuită cu o curbă de frecvenţă, care se trasează în aşa fel încât porţiunile din dreptunghiurile elementare rămase în afara curbei să se compenseze cu cele cuprinse sub curbă, dar care se află în exteriorul histogramei.

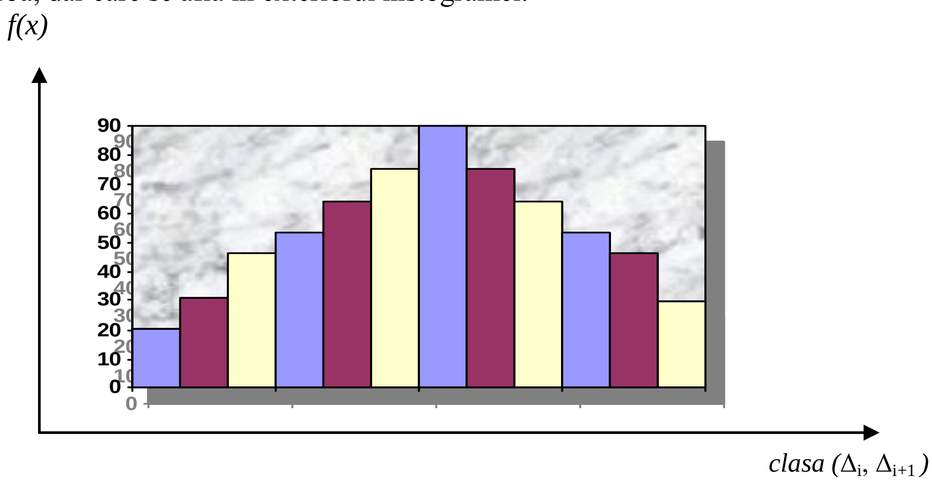


Fig. 3.1 Histograma

Poligonul frecvenţelor

Poligonul frecvenţelor se obţine unind cu o linie continuă punctele definite în abscisă de centrele claselor şi în ordonată de frecvenţe.

Dacă în locul erorilor rezultate din măsurători se dispune de o repartiţie de frecvenţe, se consideră mijlocul intervalului respectiv, adică (Δ_i, Δ_{i+1})/2.

De această dată rolul frecvenţelor individuale îl preiau frecvenţele relative corespunzătoare fiecărei clase în parte.

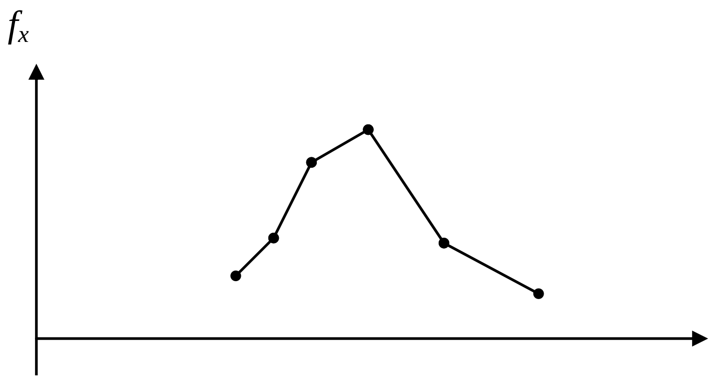


Fig. 3.2 Poligonul frecvenţelor

Se presupune că pentru aflarea unei mărimi fizice, s-a efectuat un şir de măsurători. Pentru ca valorile şirului să poată participa la calculul valorii probabile, cu obţinerea unei anumite precizii, se face uz de toleranţele stabilite pentru diferite categorii de măsurători.

Toleranţa reprezintă limita maximă stabilită pentru o eroare, prevăzută de instrucţiunile tehnice, pentru acceptarea rezultatului unei măsurători.
Ecartul este diferenţa dintre două valori oarecare dintr-un şir de măsurători, efectuate asupra aceleeaşi mărimi.
Ecartul maxim este diferenţa dintre valoarea maximă şi valoarea minimă, rezultate dintr-un şir de măsurători.
Mărimea ecarturilor, ca şi a ecartului maxim, pot folosi la aprecierea preciziei măsurătorilor efectuate, în sensul că, acestea, cu cât vor avea valori mai mici, cu atât precizia va fi mai mare şi invers.
Corecţia este mărimea egală şi de semn contrar cu eroarea.

3.2 STUDIUL REPARTIŢIEI ERORILOR ÎNTÂMPLĂTOARE

3.2.1 Valori tipice de selecţie folosite la prelucrarea rezultatelor obţinute din măsurători

Clasificarea şi reprezentarea grafică a unor repartiţii constituie prima etapă în analiza preciziei rezultatelor obţinute din măsurători. Prelucrarea statistică a observaţiilor presupune folosirea unor valori tipice de selecţie cum ar fi de exemplu media aritmetică, care dintr-un anumit punct de vedere reprezintă o sinteză a acestor observaţii.

Media aritmetică
Dacă într-un şir de *n* măsurători rezultatul x_1 apare de n_1 ori, x_2 de n_2 ori,….,x_k de n_k ori, $\sum_{i=1}^{k} = n$, atunci media aritmetică este dată de expresia :

$$M = \bar{x} = \sum_{i}^{k} f_i \cdot x_i \qquad 3.3$$

unde f_i se calculează cu ajutorul relaţiei (3.2).
Dacă în cele *n* măsurători fiecare rezultat apare o singură dată,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} x_i \qquad 3.4$$

Media aritmetică (3.3) se numeşte medie aritmetică pentru date grupate, iar (3.4), media aritmetică pentru date negrupate.

Media aritmetică are o deosebită importanţă în estimarea preciziei măsurătorilor când nu se cunoaşte valoarea exactă a mărimii fizice măsurate.

Dispersia

Dispersia(varianţa) exprimă gradul de împrăştiere a variabilelor aleatoare discrete.

$$D^2(x) = \sigma^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = M\left\{\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right\} \qquad 3.5$$

Abaterea standard

Abaterea standard reprezintă o eroare cu care sunt determinate valorile mărimilor aleatoare respective

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D^2} \qquad 3.6$$

Mărimile M, D^2 şi σ reprezintă parametri statistici care definesc o repartiţie. Pentru o variabilă discretă bidimensională există următoarea relaţie care exprimă covarianţa:

$$\operatorname{cov}(x,y) = \sigma(x,y) = M\left\{\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x-\bar{x}\right)\left(y-\bar{y}\right)}{n} \qquad 3.7$$

covarianţa de selecţie: $$S_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{n-1} \qquad 3.8$$

iar, $r_{x,y}$ este coeficientul de corelaţie

$$r_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad 3.9$$

Atunci când variabilele sunt independente, relaţia devine :

$$r_{x,y} = 0 \qquad 3.10$$

Pentru n vectori aleatori putem defini varianţele şi covarianţele într-un tablou numit *matrice de varianţă-covarianţă:*

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{11}} & \sigma_{12} & . & . & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{22}} & . & . & \sigma_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & . & . & \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{nn}} \end{pmatrix} \qquad 3.11$$

Pe diagonala principală se găsesc varianţele (dispersiile), iar în restul tabloului se găsesc covarianţele.

Proprietăţi :

- Relaţia (3.11) reprezintă o matrice pătratică, simetrică şi pozitiv definită (determinantul este mai mare ca 0).

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \boldsymbol{\sigma_{yy}} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{zy} & \boldsymbol{\sigma_{zz}} \end{pmatrix} \qquad 3.12$$

- Dacă variabilele sunt independente, atunci :

$$\sigma_{ij} = 0 \qquad 3.13$$

iar matricea devine o matrice diagonală

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma_{11}} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma_{22}} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \boldsymbol{\sigma_{nn}} \end{pmatrix} \qquad 3.14$$

3.2.2 Media şi dispersia unei funcţii de *n* variabile aleatoare

Considerăm funcţia

$$U = F(x_1, x_2, ...x_n) \qquad 3.15$$

Presupunem că această funcţie este continuă şi derivabilă ori de câte ori este nevoie. Se consideră de asemenea cunoscute valorile medii $\overline{x}_i$. Ne propunem să determinăm valoarea medie a acestei funcţii, precum şi dispersia acesteia.
În general funcţia de tip (3.15) nu este liniară. O vom aduce la această formă prin dezvoltare în serie Taylor în jurul valorilor medii, reţinând numai termenii de ordinul I:

$$U = F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{x_i = \overline{x}_i} \cdot (x_i - \overline{x}_i) + t \qquad 3.16$$

unde *t* reprezintă termenii de ordin superior.
Aplicând operatorul medie acestei funcţii, rezultă:

$$M(U)=\overline{U}=M\{F(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)\}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{x_i=\bar{x}_i}\cdot M(x_i-\bar{x}_i) \qquad 3.17$$

Cum $M(x_i-\bar{x}_i)=0,$ vom avea:

$$\overline{U}=F(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n) \qquad 3.18$$

Dacă aplicăm relaţiei (3.16) operatorul dispersie:

$$D^2\ (U)=\sigma^2(U)=D^2\{F(\bar{x}_1,\bar{x}_2,..,\bar{x}_n)\}+D^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\cdot(x_i-\bar{x}_i)\right\} \qquad 3.19$$

primul termen este egal cu zero, reprezentând dispersia unei constante;

$$D^2(U)=\sigma^2(U)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2_{x_i=\bar{x}_i}\cdot\sigma_i^2+2\sum_{i\langle j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0\cdot\sigma_{ij} \qquad 3.20$$

Relaţia (3.20) se poate scrie şi sub forma:

$$\sigma^2(U)=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2_{x_{i=\bar{x}_i}}\cdot\sigma_i^2\ +2\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial xj}\right)_{x_{i=\bar{x}_i}}\cdot\sigma_i\cdot\sigma_j\cdot r_{ij} \qquad 3.21$$

deoarece,

coeficientul de corelaţie se exprimă prin: $r_{ij}=\dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\Rightarrow\sigma_{ij}=\sigma_i\cdot\sigma_j\cdot r_{ij}$.

Când variabelele aleatoare sunt independente, $\sigma_{ij}=0$, iar dispersia funcţiei are expresia:

$$\sigma^2(U)=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2_{x_i=\bar{x}_i}\cdot\sigma_i^2 \qquad 3.22$$

În unele calcule topografice, relaţia (3.22) poate fi aplicată şi astfel:
se dă eroarea funcţiei şi se cere să se determine erorile argumentelor:

$\sigma_U=dat$

$\sigma_i=?$

Având o ecuaţie cu *n* necunoscute, pentru rezolvare se utilizează aşa zisa influenţă egală a erorilor:

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}\cdot\sigma_1=\frac{\partial F}{\partial X_2}\cdot\sigma_2=.....\frac{\partial F}{\partial X_N}\cdot\sigma_N=\Delta$$

$$\sigma^2_{(U)}=n\cdot\Delta^2 \qquad 3.23$$

$$\sigma_i=\Delta\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

***Exemple**:*

1. Se dă funcţia

$$F = x^2 - y^2 + 2xy + 1$$

Se cunosc valorile medii $\bar{x}, \bar{y}$ şi $\sigma_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$

Se cere să se determine valoarea medie a funcţiei şi eroarea acesteia.

Rezolvare:

Valoarea medie va fi dată de:

$\overline{F} = \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\bar{x}\bar{y} + 1$,

iar dispersia :

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 \cdot \sigma_y{}^2 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \cdot \sigma_y$$

$$= (2\bar{x} + 2\bar{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + (-2\bar{y} + 2\bar{x})^2 \cdot \sigma_y^2 + 2(2\bar{x} + 2\bar{y})(2\bar{x} - 2\bar{y})\sigma_{xy}$$

2. Se dă funcţia

$$F = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots\ldots a_n \cdot x_n$$

Se cere eroarea funcţiei $\sigma_F^2 = ?$, variabilele fiind independente.

$$\sigma_F^2 = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot \sigma_i^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i \cdot \sigma$$

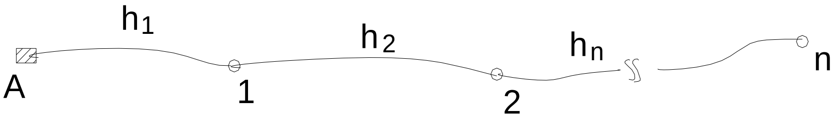
Rezultă: $\sigma_F = \pm\sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 \cdot \sigma_n^2} \cdot \sigma$

Dacă $a_i = \pm 1$ avem:

$$\sigma_F = \pm\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2}$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots = \sigma_n \Rightarrow \sigma_F = \pm\sigma \cdot \sqrt{n}$$

3. Transmiterea erorilor într-o drumuire de nivelment geometric:



Care este eroarea în cota punctului ***n*** datorită erorilor în diferenţele de nivel $\boldsymbol{h_i}$ măsurate. Valorile $\boldsymbol{h_i}$ sunt independente.

$$H_n = H_A + \sum_{i=1}^{n} h_i$$

$$\sigma_{H_n}^2 = ?$$

Dispersia $\sigma_{H_n}^2 = \sum \frac{\partial H_n}{\partial h_i} \int_0^2 \sigma_i^2 \cdot \sigma$

$$\frac{\partial H_n}{\partial h_i} = 1$$

$$\sigma_{H_n}^2 = \sigma_1 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2$$

Dacă niveleele sunt egale rezultă $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n$

Deci: $\sigma_{H_n} = \pm\sigma \cdot \sqrt{n}$

unde n reprezintă numărul de staţii.

Dacă considerăm lungimea totală a drumuirii L iar lungimea unei portee (distanţa dintre miră şi aparat) l, rezultă:

$$n = \frac{L}{2l}$$

$$\sigma_{H_n} = \pm\sigma \cdot \sqrt{\frac{L}{2l}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{2l}} \cdot \sqrt{L}$$

$$\sigma_{H_n} = a\sqrt{L}$$

unde a reprezintă o constantă, dată de regulă de precizia fiecărui aparat în parte.

4. COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR DIRECTE

În practica măsurătorilor, pentru determinarea valorii unei mărimi fizice, de cele mai multe ori se execută un număr mai mare de măsurători decât cel strict necesar. Scopul compensării constă în aflarea celei mai probabile valori a mărimii, numită şi valoare compensată, pe baza totalităţii măsurătorilor efectuate.
Pentru obţinerea unor soluţii unice, este obligatorie aplicarea unui principiu, reprezentat în cazul de faţă de principiul sau ***metoda celor mai mici pătrate***, care, în esenţă constă din următoarele:

- ***valorile cele mai probabile ale mărimilor căutate se determină atunci când suma pătratelor corecţiilor este minimă*** $\left[VV\right]$ ***= min. - în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie, sau*** $\left[pVV\right]$ ***= min. în cazul măsurătorilor ponderate (de precizii diferite).***

4.1 ERORILE ÎNTÂMPLĂTOARE ÎN MĂSURĂTORILE DIRECTE DE ACEEAŞI PRECIZIE

4.1.1 Valoarea cea mai probabilă a unei mărimi măsurate direct

Dacă o mărime este măsurată în mod direct, de mai multe ori, cu acelaşi instrument şi în aceleaşi condiţii, se vor obţine rezultate apropiate, care diferă totuşi cu cantităţi mici. Se poate afirma că orice măsurătoare directă este afectată de erori, erori care fac ca valoarea adevărată a mărimilor măsurate să nu fie accesibilă în practică.

Considerăm că asupra aceleeaşi mărimi M s-au executat ”n” măsurători, rezultând valorile $M_1,\ M_2,....,M_n$.
Dacă aceste valori sunt suficient de apropiate, rezultă că măsurătorile individuale sunt bune. Se consideră că valoarea cea mai probabilă pentru acest set de ”n” măsurători, este media aritmetică a acestora:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + ... + M_n}{n} = \frac{\left[M_i\right]}{n} \qquad 4.1$$

Acest procedeu s-a considerat la început că fiind impus de logica lucrurilor (postulatul lui Gauss - 1809), dar ulterior a fost justificat prin calculul probabilităţilor.

4.1.2 Teoreme fundamentale asupra erorilor întâmplătoare

În funcţie de valoarea cea mai probabilă M a mărimii măsurate se determină erorile întâmplătoare aparente v_i :

$$\begin{aligned}
\pm v_1 &= M_1 - M \\
\pm v_2 &= M_2 - M \\
\pm v_3 &= M_3 - M \\
&\ldots\ldots \\
\pm v_n &= M_n - M
\end{aligned} \qquad 4.2$$

Teorema I

Suma erorilor aparente "v_i" este întotdeauna egală cu zero.

Prin însumarea relaţiilor *4.2* membru cu membru se obţine:
$\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 \pm \ldots\ldots \pm v_n = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_n - n \cdot M$
Folosind notaţiile Gauss:

$$[v_i] = [M_i] - n \cdot M \qquad 4.3$$

Ţinând seama de relaţia de definiţie a valorii celei mai probabile $M = \frac{[M_i]}{n}$ şi înlocuind-o în expresia de mai sus obţinem:

$$[v_i] = [M_i] - n\frac{[M_i]}{n} \qquad 4.4$$

Deci $$[v_i] = 0; \quad n \neq \infty \qquad 4.5$$

Teorema II

Suma pătratelor erorilor întâmplătoare aparente [vv] trece printr-un minim pentru valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate.

Se porneşte de la expresiile erorilor aparente întâmplătoare definite faţă de valoarea M :

$$\begin{aligned}
\pm v_1 &= M_1 - M \\
\pm v_2 &= M_2 - M \\
\pm v_3 &= M_3 - M \\
&\ldots\ldots \\
\pm v_n &= M_n - M
\end{aligned} \qquad 4.6$$

Dacă se ridică la pătrat şi se însumează aceste egalităţi se va obţine:

$$[v_i v_i] = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = (M_1 - M)^2 + ... + (M_n - M)^2 \quad 4.7$$

Această sumă se prezintă că o funcţie de mărimea M , deci: $[v_i v_i] = F(M)$

$$F(M) = (M_1 - M)^2 + (M_2 - M)^2 + ... + (M_n - M)2 \quad 4.8$$

Se ştie că o funcţie trece printr-un minim atunci când derivata de ordinul I este zero, iar derivata de ordinul II este mai mare decât zero:

$$F'(M) = -2(M_1 - M) - 2(M_2 - M) -....-2(M_n - M) = 0 \quad 4.9$$

de unde rezultă:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + ... + M_n}{n} \quad 4.10$$

Această teoremă este foarte importantă în studiul teoriei erorilor, justificând expresia valorii celei mai probabile.

4.1.3 Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători

Erorile aparente $v_i = M_i - M$ caracterizează calitatea măsurătorilor:
cu cât acestea sunt mai mici cu atât măsurătoare a este mai bună, mai precisă.

Dacă se consideră media erorilor aparente $\frac{[v_i]}{n}$, aceasta ar fi egală cu zero, deoarece $[v_i] = 0$ (conform primei teoreme). Acest rezultat ar conduce la concluzia falsă că măsurătoarea este perfectă (nu există erori).

Pentru a scoate în evidenţă eventualele erori mari şi, de asemenea pentru a scăpa de semnele acestor erori, în practică se admite eroarea medie pătratică $\frac{[v_i v_i]}{n}$, în care n reprezintă numărul de măsurători efectuate.
Eroarea medie pătratică se noteaza cu m^2 şi are expresia:

$$m^2 = \frac{[v_i v_i]}{n} \quad 4.11$$

sau, mai frecvent este folosită în calcul relaţia:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n}} \quad 4.12$$

Observaţie: în cazul în care se efectuează o singură măsurătoare asupra unei mărimi se obţine rezultatul eronat: $m = 0$, adică măsurătoarea nu conţine erori.
Formula care dă expresia erorii medii pătratice trebuie modificată astfel ca în cazul unei singure măsurători să avem de-a face cu o nedeterminare matematică.
Ţinând seama de acest lucru, expresia lui *m* devine:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n-1}} \quad 4.13$$

(pentru o singură măsurătoare *m* ar deveni: $m = \pm\sqrt{\frac{0}{0}}$ care este o nedeterminare din punct de vedere matematic).
Este important să se cunoască valoarea erorii medii pătratice pentru aprecierea calităţii şi a preciziei unei măsurători. Cu cât aceasta va fi mai mică, cu atât măsurătoarea va fi mai precisă.

4.1.4 Eroarea medie pătratică a mediei aritmetice

Această eroare este definită ca diferenţa algebrică pozitivă sau negativă dintre valoarea cea mai probabilă (M) şi valoarea reală (X), adică:

$$\pm e_m = M - X \quad 4.14$$

Considerăm următoarele erori reale ε_i:

$$\begin{aligned} \pm \varepsilon_1 &= M_1 - X \\ \pm \varepsilon_2 &= M_2 - X \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \varepsilon_n &= M_n - X \end{aligned} \quad 4.15$$

Prin însumare: $[\varepsilon_i] = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n$

$$[\varepsilon_i] = [M_i] - n \cdot X \quad 4.16$$

Dacă în această relaţie înlocuim $[M_i] = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n$ cu valoarea ei $n \cdot M$ obţinută din expresia mediei, rezultă:

$$[\varepsilon_i] = n \cdot (M - X) \qquad 4.17$$

$$[\varepsilon_i] = n \cdot e_m \qquad 4.18$$

(deci, suma erorilor întâmplătoare reale este diferită de zero).
Prin ridicare la pătrat:

$$[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2 - 2[\varepsilon_i \varepsilon_j] \qquad 4.19$$

Pentru un număr mare de măsurători se poate considera că $[\varepsilon_i \varepsilon_i] = n^2 \cdot e_m^2$, deoarece erorile $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ fiind unele pozitive, iar altele negative, suma dublelor produse tinde către zero. Din această relaţie rezultă că eroarea medie pătratică a mediei aritmetice va fi egală cu:

$$e_m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon_i \varepsilon_i]}{n^2}} \qquad 4.20$$

S-a vazut însă că mărimea erorilor reale nu poate fi cunoscută, astfel încât aceste erori vor trebui înlocuite prin erori aparente.

Ştim că: $\pm v_i = M_i - X$

$\pm \varepsilon_i = M_i - M$

Se poate scrie că:

$\pm \varepsilon_i = \pm v_i + (M - X)$, folosindu-se un mic artificiu de calcul

$$\pm \varepsilon_i = \pm v_i + e_m \qquad 4.21$$

Dacă se determină din măsurători valoarea unei mărimi de n ori, vom avea:

$$\begin{gathered} \pm \varepsilon_1 = \pm v_1 \pm e_m \\ \pm \varepsilon_2 = \pm v_2 \pm e_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ \pm \varepsilon_n = \pm v_n \pm e_m \end{gathered} \qquad 4.22$$

Se ridică la pătrat aceste relaţii şi se adună, obţinându-se:

$$\begin{gathered} \varepsilon_1^2 = v_1^2 + e_m^2 \pm 2v_1 \cdot e_m \\ \varepsilon_2^2 = v_2^2 + e_m^2 \pm 2v_2 \cdot e_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n^2 = v_n^2 + e_m^2 \pm 2v_n \cdot e_m \end{gathered} \qquad 4.23$$

$$\overline{[\varepsilon_i \varepsilon_i] = [v_i v_i] + n \cdot e_m^2 \pm 2e_m \ [v_i]}$$

dar $[v_i]=0$

rezultă că:

$$[\varepsilon_i\varepsilon_i]=[v_iv_i]+n\cdot e_m^2 \qquad 4.24$$

şi ţinând cont de relaţia $[\varepsilon_i\varepsilon_i]=n^2\cdot e_m^2$, se poate scrie:

$$n^2e_m^2=[v_iv_i]+n\cdot e_m^2 \qquad 4.25$$

Deci:

$$e_m=\pm\sqrt{\frac{[v_iv_i]}{n(n-1)}} \qquad 4.26$$

Raportând această valoare la cea a erorii medii pătratice a unei singure măsurători se poate observa relaţia de legătură:

$$e_m=\pm\frac{m}{\sqrt{n}} \qquad 4.27$$

adică,

eroarea medie pătratică a mediei aritmetice se reduce proporţional cu rădăcina pătrată din numărul de măsurători.

4.1.5 Prezentarea rezultatului măsurătorilor

Rezultatul măsurătorilor efectuate asupra unei mărimi se poate prezenta sub forma:

$$X=M\pm e \qquad 4.28$$

în care: - X este valoarea adevărată a mărimii măsurate

- M este valoarea medie sau valoarea probabilă determinată
- e este una din erorile definite, respectiv m, e_m, e_p

Pot fi mărimi asupra cărora se execută o singură măsurătoare. Pentru aceste cazuri în relaţia (4.28), M este valoarea măsurată (după eliminarea erorilor sistematice), iar e este eroarea observaţiei respective (eroarea instrumentului, de obicei). Semnificaţia egalităţii (4.28) constă în aceea că valoarea adevărată se află într-un interval de precizie dat de inegalitatea:

$$M-e<X<M+e \qquad 4.29$$

Exemple de calcul

1. Considerăm că asupra unei lungimi au fost efectuate mai multe observaţii de precizii egale. Valorile observaţiilor sunt:

O_1 =*176.720 m*	O_3 =*176.728 m*	O_5 =*176.723 m*
O_2 =*176.707 m*	O_4 =*176.725 m*	O_6 =*176.731 m*

Se constată că în seria de determinări există observaţia O_2 cu valoarea mult diferită de celelalte; rezultă că asupra acesteia a acţionat o eroare inadmisibilă (greşeală) şi în consecinţă se elimină din prelucrare.
De asemenea, dacă admitem o toleranţă egală cu *1cm* se observă că nici valoarea O_6 nu poate fi acceptată, deoarece ecartul maxim este de *1,1cm* şi depăşeşte toleranţa.
Celelalte observaţii (O_1, O_3, O_4, O_5) pot fi prelucrate în continuare întrucât respectă condiţia:

$$\Delta_{max} < T$$

Valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate se obţine printr-un calcul de forma:

$$M = \frac{O_1 + O_3 + O_4 + O_5}{4}$$

Calculul practic al mediei aritmetice se face considerând o valoare de bază M_0 a mărimii măsurate la care se adaugă media aritmetică a diferenţelor de forma (O_i - M_0).
Se constată că valoarea de bază poate fi considerată M_0 =*176.720 m*, faţă de care avem diferenţele:

O_1 - M_0 = *0*

O_3 - M_0 = *8mm*

O_4 - M_0 = *5mm*

O_5 - M_0 = *3mm*

Cu aceasta obţinem:

$$M = M_0 + \frac{[O - M_0]}{4} = 176.720\,m + \frac{0+8+5+3}{4}\,mm = 176.724\,m$$

Pentru a stabili eroarea medie pătratică a mediei aritmetice se determină în continuare erorile aparente şi suma acestora, astfel:

$$v_1 = O_1 - M = -4\ mm$$

$$v_3 = O_3 - M = +4\ mm$$

$$v_4 = O_4 - M = +1\ mm$$

$$v_5 = O_5 - M = -1\ mm$$

Conform primei proprietăţi a erorilor aparente se constată că: *[v] = 0*, rezultând deci că erorile sunt corect determinate.
De asemenea se stabilesc pătratele erorilor aparente şi suma pătratelor lor;
Se obţine:

$v_1^2 = 16$

$v_3^2 = 16$

$v_4^2 = 1$

$v_5^2 = 1$

$----$

$[vv] = 34$

Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători, conform relaţiei *4.13* este:

$$m = \pm\sqrt{\frac{34}{4-1}} = \pm\sqrt{\frac{34}{3}} = \sqrt{11{,}3} \cong \pm 3{,}3mm$$

Eroarea medie pătratică a mediei aritmetice, conform relaţiei *4.27* este

$$e_m = \pm\frac{3.3}{\sqrt{4}} = \pm 1.65mm$$

rezultatul final al mărimii măsurate se prezintă cu ajutorul relaţiei *4.28* sub forma:

$$X = 176.724m \pm 1.65\ mm$$

Eroarea relativă a lungimii măsurate este:

$$e_r = \frac{1.65mm}{176.724} = \frac{1}{\frac{176724}{1.65}} \cong \frac{1}{100.000}$$

2. Să se determine precizia necesară unui instrument de măsurat unghiuri pentru ca din patru măsurători să se obţină o precizie de $\pm 10^{cc}$

Se foloseşte în acest scop relaţia *4.27* în care:

$e_m = \pm 10^{cc}$

$n = 4$

Deci:

$m = \pm 10^{cc}\sqrt{4} = \pm 20^{cc}$

3. De câte ori trebuie măsurat un unghi cu un teodolit a cărui precizie este de $\pm 10^{cc}$ pentru a obţine o precizie de $\pm 2^{cc}$?
Folosim relaţia *4.27* în care:

$m = \pm 10^{cc}$

$e_m = \pm 2^{cc}$

$\sqrt{n} = \frac{10}{2} = 5$, rezultă $n = 25$ măsurători

4.1.6 Eroarea unei funcţii de mărimi independente măsurate direct

Se consideră o funcţie diferenţiabilă:

$$F = F(M_1, M_2, ..., M_n), \qquad 4.30$$

care conţine valorile mărimilor măsurate direct, mărimi care sunt independente.
Dorim să determinăm eroarea medie pătratică m a funcţiei de mai sus, datorită erorilor argumentelor M_i.
Dacă s-ar cunoaşte erorile adevarate ε_i, atunci eroarea reală a funcţiei *F*, ar fi:

$$\varepsilon_F = F\ (M_1 + \varepsilon_1,\ M_2 + \varepsilon_2, \ldots,\ M_n + \varepsilon_n) - F(M_1, M_2, ..., M_n) \qquad 4.31$$

(adică, *valoarea eronată* - *valoarea justă*).
În practică, erorile ε_i au valori destul de mici, astfel încât derivatele de ordin doi şi cele superioare pot fi neglijate din dezvoltarea în serie Taylor facută în vecinătatea punctului $O\,(M_1, M_2, ..., M_n)$
Efectuând calculele, vom obţine:

$$\varepsilon_F = F(M_1, M_2, ..., M_n) - F(M_1, M_2, ..., M_n) + \left(\frac{\partial F}{\partial M_1}\right)\varepsilon_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)\varepsilon_2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)\varepsilon_n \qquad 4.32$$

sau

$$\varepsilon_F = \left(\frac{\partial F}{\partial M_1}\right)_0 \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)_0 \varepsilon_2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)_0 \varepsilon_n \qquad 4.33$$

Ridicând la pătrat, însumând şi ţinând cont că suma produselor duble tinde către zero pentru un număr mare de determinări ale aceleaşi mărimi măsurate $M_{i,}$ se poate scrie trecând la erori medii pătratice:

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial M_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)_0^2 m_2^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)_0^2 m_n^2\ , \qquad 4.34$$

în care s-a înlocuit suma pătratelor erorilor adevărate $[\varepsilon_F \varepsilon_F]$ cu eroarea medie pătratică m^2.

Relaţia de mai sus exprimă eroarea funcţiei de mărimi măsurate direct, când acestea sunt independente.
Această expresie mai este cunoscută sub denumirea de ***legea de propagare a erorilor*** şi mai poate fi prezentată sub forma:

$$m_F = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial M} m\right)^2} \qquad 4.35$$

4.1.7 Erori ale unor funcţii particulare

1. Se dă funcţia sub următoarea formă:

$$F = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \qquad 4.36$$

în care a_i reprezintă coeficienţi, deci valori constante, iar x_i sunt necunoscutele. Derivatele parţiale rezultă ca:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i \qquad 4.37$$

Deci, eroarea funcţiei va fi

$$m_F^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + ... + a_n^2 m_n^2\,, \qquad 4.38$$

m_i reprezentând erori medii pătratice ale argumentelor.

2. Funcţia are forma:

$$F = \pm x_1 \pm x_2 \pm ..... \pm x_n \qquad 4.39$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \pm 1, \qquad 4.40$$

rezultă: $$m_F^2 = m_1^2 + m_2^2 + ...m_n^2 \qquad 4.41$$

3. Forma funcţiei este:

$$F = \pm\ x_1\ \pm\ x_2\ \pm\ ....\pm\ x_n \qquad 4.42$$

şi

$$m_1 = m_2 = ...m_n = m \qquad 4.43$$

În acest caz eroarea funcţiei va avea forma:

$$m_F^2 = n \cdot m^2 \qquad 4.44$$

4. Un caz des întâlnit în practică este acela în care funcţia apare că diferenţă a două mărimi măsurate:

$$F = x_1 - x_2 \qquad 4.45$$

În acest caz avem:

$$m_F = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \qquad 4.46$$

dacă $m_1 = m_2$, rezultă

$$m_F = m\sqrt{2} \qquad 4.47$$

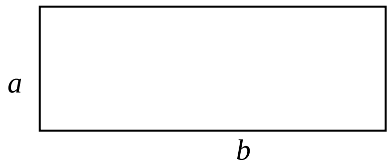
Problema se poate pune şi invers:
cât de mari trebuie să fie erorile absolute sau relative ale argumentelor, pentru ca eroarea funcţiei să nu depăşească o anumită valoare dată.
Având de-a face cu o singură ecuaţie cu n necunoscute, în practică se foloseşte *principiul influenţelor egale ale erorilor*, impunând următoarele condiţii suplimentare:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial M_1}\right)_0 \cdot m_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)_0 \cdot m_2 = ... = \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)_0 \cdot m_n \qquad 4.48$$

Eroarea absolută limită a funcţiei fiind cunoscută, rezultă că eroarea medie pătratică a unui singur argument va fi:

$$m_i = \frac{m_F}{\sqrt{n}} / \left(\frac{\partial F}{\partial M_i}\right)_0 \qquad 4.49$$

Exemplu:
Cu ce eroare absolută trebuie măsurate laturile unui dreptunghi cu dimensiunile:



a = 80m ; b =100m

pentru ca suprafaţa sa să fie determinată cu o precizie de $\pm 1m^2$.

Rezolvare:
Suprafaţa dreptunghiului este

$$S = a \cdot b$$
$$S = 8000m^2$$

Formula suprafeţei este dată de:

$$m_s = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \cdot m_b^2}$$

Erorile argumentelor (respectiv laturile a şi b) vor fi:

$$m_a = \frac{m_S}{\sqrt{2}} \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{100\sqrt{2}} \text{ metri}$$

$$m_b = \frac{m_S}{\sqrt{2}} \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{80\sqrt{2}} \text{ metri}$$

(unde m_S este precizia dată prin temă).

4.2 MĂSURĂTORI DIRECTE PONDERATE

Considerăm că asupra unei mărimi s-au executat mai multe măsurători de precizii diferite, rezultând valorile $M_1, M_2, ...M_n$ şi erorile corespunzătoare $m_1, m_2, ...m_n$.
Valoarea cea mai probabilă a mărimii respective se deduce, aducând cazul măsurătorilor ponderate la cel al măsurătorilor de aceeaşi precizie, caz în care ştim să calculăm această valoare ca fiind media aritmetică a măsurătorilor de aceeaşi precizie.
În acest scop considerăm că fiecare valoare M_i reprezintă media aritmetică din p_i măsurători fictive de aceeaşi precizie. Erorile m_i pot fi considerate ca erori medii aritmetice şi conform relaţiei generale care ne dă eroarea medie pătratică a mediei aritmetice vom putea scrie:

$$e_m = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} ......m_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}} \qquad 4.50$$

Cu μ s-a notat eroarea medie pătratică a unei măsurători fictive şi din relaţia (4.50*)* rezultă că toate măsurătorile fictive sunt de aceeaşi precizie, având aceeaşi eroare μ.
Măsurătorile noastre iniţiale s-au transformat acum într-un număr de$[p]$ măsurători fictive de aceeaşi precizie.
Valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate va fi media aritmetică a tuturor măsurătorilor fictive, adică:

$$M = \frac{M_1 p_1 + M_2 p_2 + ... + M_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{[pM]}{[p]} \qquad 4.51$$

Această expresie poate fi dedusă aplicând şi principiul metodei celor mai mici pătrate:

$$[vv] = (M - M_i)^2 \qquad 4.52$$

deci:

$$[pvv] = \left[p_i \left(M - M_i\right)^2\right] \qquad 4.53$$

Minimul acestei relaţii va fi:

$$\frac{\partial [pvv]}{\partial M} = 2M \cdot [p] - 2[pM] = 0 \qquad 4.54$$

adică:

$$M = \frac{[pM]}{[p]} \quad \text{(media ponderată)} \qquad 4.55$$

Şi în acest caz se poate folosi o valoare apropiată M_0, pentru simplificarea calculelor, adică:

$$M = M_0 + M_i \qquad 4.56$$

Se obţine astfel:

$$M = M_0 + \frac{[pM]}{[p]} \qquad 4.57$$

Înmulţind relaţiile (4.52) cu $p_1, p_2, ...p_n$ şi însumând, se obţine:

$$[pv] = M[p] - [pM] \qquad 4.58$$

Ţinând seama de (4.55) rezultă:

$$[pv] = 0 \qquad 4.59$$

4.2.1 Calculul preciziei

a) Eroarea medie pătratică a unităţii de pondere (a unei măsurători fictive cu ponderea egală cu unitatea).

Din (4.50) avem:

$$\mu = m_i \sqrt{p_i} \qquad 4.60$$

Dacă se consideră $p_i = 1$, rezultă $\mu = m_1 = m_2 = ... = m_n$, adică μ este o eroare medie pătratică corespunzatoare la ponderi egale cu unitatea, şi poartă denumirea de *eroarea medie pătratică a unităţii de pondere.*

Eroarea medie pătratică a unităţii de pondere va fi dedusă cu relaţia cunoscută din cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie $\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$, în care $\overline{v_i} = v_i\sqrt{p_i}$ şi reprezintă o mărime omogenizată.
Deci:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad 4.61$$

b) Eroarea medie pătratică a mediei ponderate

Media ponderată exprimată de relaţia (4.55), $M = \frac{[pM]}{[p]}$ se prezintă ca o funcţie de mărimi măsurate direct, deci pentru evaluarea erorii se poate aplica relaţia care exprimă eroarea unei astfel de funcţii:

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)_0^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)_0^2 \cdot m_2^2 + \ldots.. + \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)_0^2 \cdot m_n^2$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} e_M^2 &= \frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2 \cdot m_1^2 + p_2^2 \cdot m_2^2 + \ldots.. + p_n^2 \cdot m_n^2\right) = \\ &= \frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2 \cdot \frac{\mu^2}{p_1} + p_2^2 \cdot \frac{\mu^2}{p_2} + \ldots\ldots.. + p_n^2 \cdot \frac{\mu^2}{p_n}\right) = \frac{\mu^2 \cdot [p]}{[p]^2} \end{aligned} \qquad 4.62$$

adică:

$$e_M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad 4.63$$

4.2.2 Determinarea ponderilor

Se poate demonstra că în locul ponderilor se pot lua nişte numere proporţionale cu acestea, fără ca rezultatul compensării să se modifice.
Din relaţia (4.50):

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$$

Rezultă, $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$

sau, la modul general:

$$p_i = \frac{\text{constantã}}{m_i^2} \qquad 4.64$$

Ponderile se pot deduce astfel:

1. Dacă se cunosc valorile m_i, atunci ponderile se vor calcula cu relaţia (4.64)
   Constanta de proporţionalitate se poate lua:
   a) cel mai mic multiplu comun al pătratelor erorilor m_i, astfel încât să rezulte pentru ponderile p_i, numere întregi

   b) 10^n, n fiind un număr întreg astfel ales, încât ponderile să rezulte ca numere comode pentru calcule, de obicei cuprinse între 10^{-2} şi 10^2.
2. Dacă în loc de erorile m_i ale măsurătorilor se cunoaşte faptul că măsurătorile M_i au fost obţinute ca nişte medii din mai multe determinări de aceeaşi precizie, de exemplu, M_1 a rezultat din n_1 măsurători, M_2 din n_2 măsurători şi aşa mai departe, atunci ponderile vor lua drept valori chiar aceste numere n_1, $n_2, \ldots, n_n$.
3. Când se cunosc erorile medii pătratice "m_i", ponderile se mai pot determina şi în mod relativ, faţă de una din ele care se ia ca unitate, astfel:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2} \ldots\ldots \; p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$$

sau: $\frac{p_1}{p_i} = \left(\frac{m_i}{m_1}\right)^2$

şi dacă $p_1 = 1$, rezultă $p_i = \frac{m_1}{m_i}$

Exemplu:

Cota unui punct nodal determinată din patru drumuiri de nivelment geometric este trecută în tabelul de mai jos, împreună cu lungimile drumuirilor respective.
Să se calculeze valoarea cea mai probabilă a cotei punctului nodal cât şi precizia de determinare a acestei cote.
Valoarea aproximativă este considerată $M_0 = 102{,}42\,m$

Nr. crt.	Cota pct. nodal M_i	Diferenţa $x_i = M_i - M_0$	Lungime	Pondere p_i	$p_i \cdot x_i$	$v_i = M_0 - M_i$ (cm)	$p_i \cdot v_i$	$p_i \cdot v_i^2$
1.	102,50	8	10	0,10	0,80	+6	0,60	3,6
2.	102,42	0	2	0,50	0,00	-2	-1,00	2,00
3.	102,46	4	5	0,20	0,80	+2	0,40	0,80
4.	102,44	2	1	1,00	2,00	0	0	0
Σ.				1,80	3,60			6,40

1. Stabilirea ponderilor:

S-a văzut că $p_i = \frac{const.}{m_i^2}$

dar, în cazul nivelmentului geometric se ştie că: $m_i = a\sqrt{L_i}$

deci: $p_i = \frac{const.}{a^2 L_i}$

Considerând constanta egală cu a^2 pentru comoditatea calculelor, valoarea finală a ponderii este dată de relaţia:

$$p_i = \frac{1}{L_i}$$

2. Calculul mediei ponderate – ca valoare cea mai probabilă a cotei căutate:

$$M = M_0 + \frac{[px]}{[p]} = 102{,}42\,m + \frac{3{,}60}{1{,}80}\,cm = 102{,}44\,m$$

$$M = 102{,}44\,m$$

3. Calculul erorii medii pătratice a unităţii de pondere (sau eroarea pe km):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{6{,}40}{3}} = \pm 1{,}46\,cm$$

4. Calculul erorii medii pătratice a mediei ponderate:

$$e_M = \pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{1{,}46}{\sqrt{1{,}80}} = \pm 1{,}08\,cm$$

Prezentarea rezultatului final:

$$\boxed{M = 102{,}44 \pm 0{,}01\,m}$$

4.3 DETERMINAREA ERORILOR ÎN UNELE OPERAŢII TOPOGRAFICE

4.3.1 Transmiterea erorilor unghiulare într-o drumuire planimetrică:

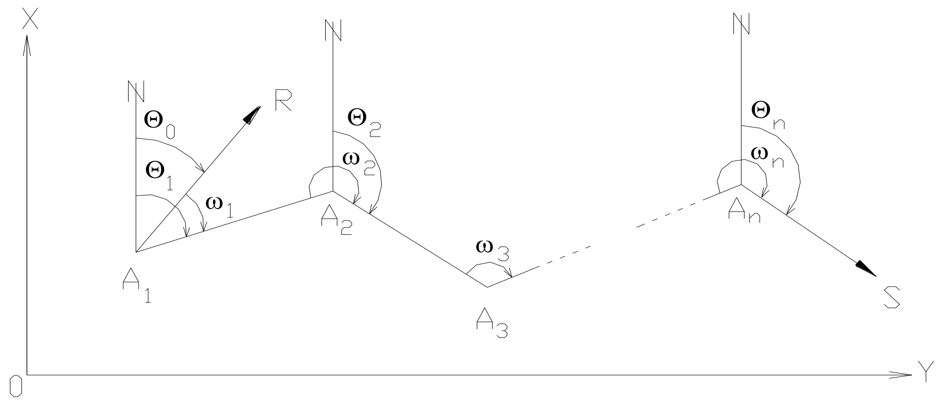


Fig.4.1 Drumuire planimetrică

Fiind dată drumuirea planimetrică din figura de mai sus, în care au fost măsurate unghiurile orizontale $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ şi în care se cunoaşte orientarea iniţială θ_0 (a unei direcţii de referinţă A_1 - R), se cere să se afle eroarea în orientarea unei laturi oarecare (m_θ).

Rezolvare:

Notând cu $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ orientările succesive ale laturilor se poate scrie:

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_1$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 200^g + \omega_2 - 400^g = \theta_0 + \omega_1 + \omega_2 - 200^g \qquad 4.65$$

$$...$$

$$\theta_n = \theta_0 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n \pm k \cdot 200^g$$

unde k este un număr întreg.

Rezultă deci că orientarea laturii finale este funcţie de unghiurile orizontale măsurate $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, adică:

$$\theta = \theta_n(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \qquad 4.66$$

Aplicând eroarea unei funcţii vom avea:

$$m_\theta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 \qquad 4.67$$

Considerăm însă că toate unghiurile au fost măsurate cu aceeaşi precizie, adică $m_1 = m_2 = ... = m_n$, obţinându-se astfel:

$$m_{\theta} = m\sqrt{n} \qquad 4.68$$

Această relaţie poate fi folosită şi pentru stabilirea toleranţei $T = a\sqrt{n}$, unde a reprezintă eroarea limită şi se ia de obicei, a = 2,5m - 3m.

4.3.2 Transmiterea erorilor în nivelmentul trigonometric

În nivelmentul trigonometric se măsoară unghiul de pantă α şi distanţa D în vederea evaluării diferenţelor de nivel. Aparatul folosit este tahimetrul.
Diferenţa de nivel - neglijând influenţa curburii Pământului şi a refracţiei atmosferice va fi:

$$\Delta h = D \cdot tg\alpha \qquad 4.69$$

Eroarea acestei funcţii de mărimi măsurate direct se poate calcula folosind relaţia:

$$m_{\Delta h}^2 = \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial D}\right)^2 \cdot m_D^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot m_\alpha^2 \qquad 4.70$$

Efectuând derivatele parţiale şi înlocuindu-le în formula (4.70) rezultă:

$$m_{\Delta h}^2 = tg_\alpha^2 \cdot m_D^2 + \frac{D^2}{\cos^4\alpha} \cdot m_\alpha^2 \qquad 4.71$$

Eroarea m_α este exprimată în radiani; de obicei aceasta se va exprima în secunde, astfel că:

$m_\alpha{}^{\mathrm{rad}} = \frac{m_\alpha''}{\rho''}$ (ρ'' este factorul de transformare în sistemul sexagesimal şi are valoarea *206265"*)

$m_\alpha{}^{\mathrm{rad}} = \frac{m_\alpha^{cc}}{\rho^{cc}}$ (ρ^{cc} este factorul de transformare în sistemul centesimal şi are valoarea *636620*^{cc})

Expresia (4.71) devine:

$$m_{\Delta h} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot m_D\right)^2 + \left(\frac{m_\alpha''}{\rho''} \cdot D\right)^2} \qquad 4.72$$

Observaţie:
În geodezie unghiul de pantă α este relativ mic, astfel încât $cos^2\alpha \approx 1$;
rezultă că primul termen are pondere mică în raport cu cel de-al doilea, deci *eroarea în nivelmentul trigonometric este proporţională cu distanţa D.*

4.3.3 Transmiterea erorilor în nivelmentul geometric

a) Eroarea pentru un niveleu

Diferenţa de nivel în nivelmentul geometric este dată de diferenţa citirilor (lecturilor) pe miră, înapoi şi înainte:

$$\Delta h = a - b \tag{4.73}$$

Aparatura folosită este nivela şi mira (fig.4.2).
Considerând că nivelmentul se execută de la mijloc şi că $m_a = m_b = m$, adică măsurătorile sunt de aceeaşi precizie, rezultă că eroarea în diferenţa de nivel va fi:

$$m_{\Delta h} = m\sqrt{2} \tag{4.74}$$

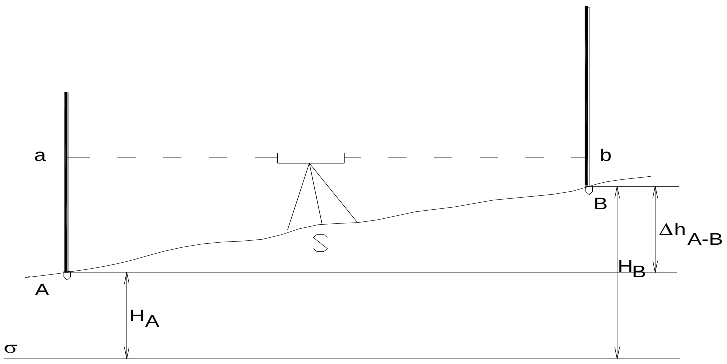


Fig.4.2 Niveleu

b) Eroarea pentru o drumuire de nivelment

Următoarea drumuire de nivelment geometric este compusă din n niveleuri egale (niveleu = distanţa dintre punctele de drumuire).

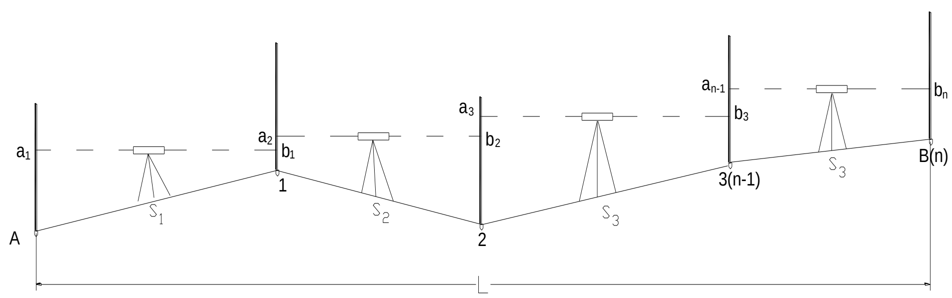


Fig.4.3 Drumuire de nivelment geometric

Diferenţa de nivel totală va fi:

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 + ... + \Delta h_n$$

iar eroarea totală:

$$m_{\Delta H} = m_1 \quad + m_2 \quad + ... + m_n \qquad 4.75$$

Întrucât s-a considerat că toate niveleurile sunt egale rezultă:

$$m_1 = m_2 = ... = m_n = m_h \qquad 4.76$$

Deci: $$m_{\Delta H} = m_h \sqrt{n} \qquad 4.77$$

Dacă se notează cu l, lungimea unei portee (distanţa dintre miră şi aparat), iar cu L lungimea totală a drumuirii, atunci numărul de niveleuri n va fi:

$$n = \frac{L}{2l} \qquad 4.78$$

În acest caz eroarea totală se mai poate exprima sub forma:

$$m_{\Delta H} = m_h \sqrt{\frac{L}{2l}} = \frac{m_h}{\sqrt{2l}} \cdot \sqrt{L} \qquad 4.79$$

Pentru o drumuire dată, executată cu un anumit instrument, de un anumit operator şi cu lungimi de portee egale, putem considera cantitatea $\frac{m_h}{\sqrt{2l}}$ că fiind o constantă notată m_0; relaţia (4.79) devine în acest caz:

$$m_{\Delta H} = m_0 \sqrt{L} \qquad 4.80$$

Dacă L este exprimat în km, atunci m_0 reprezintă eroarea pe kilometru.

4.3.4 Eroarea medie pătratică pentru o distanţă

Dacă notăm cu l lungimea instrumentului de măsurat (panglică, ruletă), şi cu L lungimea totală a distanţei căutate, l se va cuprinde în L de n ori:

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n \;, \qquad \text{(de n ori)} \qquad 4.81$$

unde $l_1 = l_2 = \ldots .. = l_n$ şi deci $L = n\, l$

Eroarea medie pătratică în determinarea distanţei va fi:

$$m_L = m \cdot \sqrt{n} \qquad 4.82$$

dar $n = \frac{L}{l}$, rezultă $$m_L = \frac{m}{\sqrt{l}} \cdot \sqrt{L} \qquad 4.83$$

5. COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

La acest tip de măsurători, valoarea mărimilor pe care dorim să le determinăm se obţine prin intermediul altor mărimi măsurate direct, mărimile măsurate direct şi cele de determinat fiind funcţional dependente între ele.

Cazul general:

Se consideră $M_1^0, M_2^0, ...M_n^0$ ca valori medii ale unor mărimi determinate direct (rezultate din măsurători directe), iar $x_1, x_2, ...x_h$, mărimi ce urmează a fi determinate indirect.
Presupunem de asemenea că relaţia dintre aceste 2 tipuri de mărimi este exprimată de:

$$M_i^0 + v_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_h) \qquad 5.1$$

$i = 1,2,.....n$ şi $n > h$

Relaţia $n > h$ (adică numărul ecuaţiilor să fie mai mare decât numărul necunoscutelor) se impune în vederea depistării eventualelor greşeli cât şi pentru mărirea preciziei. Problema care se pune este, ca din sistemul (5.1) să se deducă cele mai bune valori $x_1, x_2, ...x_h$.

Dacă măsurătorile M_i^0 ar fi perfecte (neafectate de erori), acest sistem s-ar prezenta sub forma:

$$M_i^0 = F_i(X_1,\ X_2, ..., X_h) \qquad 5.2$$

$i = 1,2,.....n$; $n > h$

Acest sistem ar fi compatibil şi rezolvabil în raport cu necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_h$, deci, operaţiile de măsurare s-ar reduce la atâtea măsurători câte necunoscute sunt. În practică însă, măsurătorile de orice natură sunt afectate în mod inerent de erori.
Datorită acestor erori de măsurare, sistemul (5.2) este incompatibil, de aceea mărimilor măsurate direct trebuie să li se aplice nişte corecţii v_i, astfel ca sistemul să devină compatibil în raport cu necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_h$.
Valorile cele mai probabile ale corecţiilor se determină aplicând metoda celor mai mici pătrate. Deci, mărimile v_i reprezintă corecţiile ce trebuiesc aplicate mărimilor măsurate direct, pentru a fi satisfăcute toate ecuaţiile de tipul (5.1) ce pot fi întocmite pentru rezolvarea unei anumite probleme.
Metoda celor mai mici pătrate se ocupă deci cu compensarea erorilor de măsurare, determinându-se valorile cele mai probabile pentru mărimile măsurate, cât şi erorile medii la care ne putem aştepta.

Determinarea acestor valori probabile este condiţionată de minimul sumei pătratelor erorilor luate faţă de o mărime de referinţă (M).

5.1 LINIARIZAREA ECUAŢIILOR

În majoritatea cazurilor funcţiile F_i din relaţia (5.1) nu sunt liniare, compensarea fiind foarte greoaie. Pentru uşurarea calculelor de compensare, aceste ecuaţii se aproximează cu nişte *ecuaţii liniare*, obţinute prin dezvoltare în serie Taylor, în vecinătatea unor valori x_i^0, apropiate de cele adevărate.

Valorile probabile ale necunoscutelor vor fi în acest caz:

$$X_i = X_i^0 + x_i \tag{5.3}$$

unde, $i = 1, 2, ..., n$ şi x_i reprezintă corecţii ce urmează a fi determinate în procesul de compensare şi apoi adăugate valorilor aproximative X_i^0 în vederea obţinerii valorilor celor mai probabile ale mărimilor căutate, X_i .

Aceste corecţii însă, trebuie să fie suficient de mici, astfel încât în dezvoltarea în serie Taylor să putem neglija termenii de ordinul II şi mai mari.

Introducând relaţia (5.3) în (5.1) obţinem:

$$M_i^0 + v_i = F_i\left(X_1^0 + x_1,\ X_2^0 + x_2, ..., X_h^0 + x_h\right) \tag{5.4}$$

Deci, corecţia va avea valoarea:

$$v_i = F_i\left(X_1^0 + x_1,\ X_2^0 + x_2, ..., X_h^0 + x_h\right) - M_i^0 \tag{5.5}$$

Dezvoltând această expresie în serie Taylor şi neglijând termenii de ordinul II şi superiori, rezultă:

$$\begin{aligned} v_i \cong F_i\left(X_1^0, X_2^0, ..., X_h^0\right) - M_i^0 + \\ + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + ... + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right)_0 \cdot x_h \end{aligned} \tag{5.6}$$

($i = 1, 2, ..., n$)

Pentru simplificarea calculelor se fac următoarele notaţii:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 = a_i \qquad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 = b_i \quad .... \quad ....\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right)_0 = h_i \\ F_i\left(X_1^0 + x_1,\ X_2^0 + x_2, ..., X_h^0 + x_h\right) - M_i^0 = l_i \end{gathered} \tag{5.7}$$

Cu aceste notaţii expresia (5.6) devine:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + ...h_i x_h + l_i \qquad 5.8$$

($i = 1,2,.....n$; $n > h$)

Această relaţie poartă denumirea de ***sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţii***.

Observaţii:

- Fiecare măsurătoare generează câte o ecuaţie de corecţie.
- Din expresiile coeficienţilor şi a termenului liber (5.7) se observă că mărimea măsurată direct M_i^0, deci cea care este afectată de erori intervine numai în termenul liber.

Rezultă deci, că eroarea unei ecuaţii de corecţii este egală cu eroarea termenului liber, iar coeficienţii $a_i, b_i, ..., h_i$ se consideră constante lipsite de erori.

- Dacă mărimile măsurate direct M_i^0 sunt determinate cu aceeaşi precizie, atunci şi ecuaţiile sistemului liniar vor fi de aceeaşi precizie.
- Sistemul liniar poate fi înmulţit cu aceeaşi constantă, rezultatul final rămânând neschimbat. În cazul în care ecuaţiile sistemului liniar ar fi înmulţite cu constante diferite, s-ar modifica şi ponderile în mod diferit.
- Sistemele ponderate (de precizii diferite) pot fi reduse la sisteme neponderate, dacă fiecare ecuaţie se multiplică cu $\sqrt{p_i}$, adică:

$$\bar{v}_i = v_i \sqrt{p_i} = a_i \sqrt{p_i} \cdot x_1 + b_i \sqrt{p_i} \cdot x_2 + ... + h_i \sqrt{p_i} \cdot x_h + l_i \sqrt{p_i} \qquad 5.9$$

  Acest nou sistem poartă denumirea de ***sistem de ecuaţii omogenizate*** şi au toate ponderea egală cu *1*.

- Din expresia termenului liber (5.7) rezultă regula practică de calcul a acestuia:

$$F_i\left(X_1^0 + x_1,\ X_2^0 + x_2,\ .....,\ x_h^0 + x_h\right) - M_i^0 = l_i \qquad 5.10$$

Termenul liber = valoare calculată - valoare măsurată

5.2 NORMALIZAREA ECUAŢIILOR

5.2.1 Compensarea măsurătorilor indirecte de aceeaşi precizie

Din sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţii dat de (5.8) în care presupunem că toate ecuaţiile au aceeaşi pondere, valorile cele mai probabile ale corecţiilor se deduc utilizând metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$\left[vv\right] = min. \qquad 5.11$$

Dacă în acest sistem înlocuim valorile corecţiilor v_i obţinem:

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 = (a_1 x_1 + b_1 x_2 + ... + h_1 x_h + l_1)^2 +$$

$$+ (a_2 x_1 + b_2 x_2 + ... + h_2 x_h + l_2)^2 +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ (a_n x_1 + b_n x_2 + ... + h_n x_h + l_n)^2 = minim$$

Aceasta reprezintă o funcţie de x, adică:

$$[vv] = F(x_1, x_{2,} ...., x_h) \qquad 5.12$$

Pentru determinarea minimului acestei funcţii de mai multe variabile, trebuie ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei în raport cu fiecare din necunoscute să fie zero.
Efectuând aceste derivate obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + ... + h_1 x_h + l_1) +$$
$$+ 2a_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + ... + h_2 x_h + l_2) + \qquad 5.13$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ 2a_n(a_n x_1 + b_n x_2 + ... + h_n x_h + l_n) = 0$$

sau: $[av] = 0$ 5.14

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2b_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + ... + h_1 x_h + l_1) +$$
$$+ 2b_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + ... + h_2 x_h + l_2) + \qquad 5.15$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ 2b_n(a_n x_1 + b_n x_2 + ... + h_n x_h + l_n) = 0$$

sau: $[bv] = 0$ 5.16

Analog se calculează şi celelalte derivate, ultima fiind:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = 2h_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + ... + h_1 x_h + l_1) +$$
$$+ 2h_2(a_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + h_2 x_h + l_2) + \qquad 5.17$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ 2h_n(a_n x_1 + b_n x_2 + ... + h_n x_h + l_n) = 0$$

sau: $[hv] = 0$ 5.18

Anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi determină punctele staţionare ale unei funcţii care sunt în acelaşi timp puncte de minim, adică derivata de ordinul II este pozitivă.

Efectuând calculele în (5.13), (5.15), (5.17) şi trecând la notaţiile Gauss, obţinem:

$$\begin{aligned}
&[aa]x_1 + [ab]x_2 + ... + [ah]x_h + [al] = 0 \\
&[ab]x_1 + [bb]x_2 + ... + [bh]x_h + [bl] = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&[ah]x_1 + [bh]x_2 + ... + [hh]x_h + [hl] = 0
\end{aligned} \qquad 5.19$$

Sistemul (5.19) poartă denumirea de ***sistem normal al corecţiilor***.

Matricea coeficienţilor acestui sistem este simetrică, deci nesingulară. Rezultă că sistemul admite soluţie care este unică.

Prin rezolvarea acestui sistem, se determină corecţiile x_i care aplicate valorilor apropiate X_i^0 dau valorile cele mai probabile ale necunoscutelor:

$$X_i = X_i^0 + x_i \qquad 5.20$$

De asemenea, cu ajutorul corecţiilor x_i se pot deduce şi valorile v_i ce vor fi aplicate mărimilor măsurate M_i^0:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + ... + h_i x_h + l_i \qquad 5.21$$

Determinarea practică a coeficienţilor şi a termenilor liberi ai ecuaţiilor normale se face în tabele intermediare de forma:

1.Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor de corecţii

Nr. crt.	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{b_i}$	***…..***	$\boldsymbol{h_i}$	$\boldsymbol{l_i}$	$\boldsymbol{S_i}$	***Control***
1	a_1	b_1	...	h_1	l_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + \ldots + h_1 + l_1$
2	a_2	b_2	...	h_2	l_2	S_2	
...	...	...	...	...	...	...	………
n	a_n	b_n	...	h_n	l_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + \ldots\ldots + h_n + l_n$
Σ	*[a]*	*[b]*	...	*[h]*	*[l]*	*[S]* / Σ_1	$\Sigma_1 = [a] + [b] + \ldots + [h] + [l]$

2.Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor normale

[aa]	*[ab]*	...	*[ah]*	*[al]*	*[aS]*	***Control :****[aS] = [aa] + [ab]+…+ [ah] + [al]*
	[bb]	...	*[bh]*	*[bl]*	*[bS]*	*[bS] = [ab] + [bb]+…+[bh]+ [bl]*
		...	…….	…….	....	…………
			[hh]	*[hl]*	*[hS]*	*[hS] = [ah] + [bh]+ ...+ [hh] + [hl]*
				[ll]	*[lS]*	*control*

5.2.2 Compensarea măsurătorilor indirecte ponderate

În sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţii (5.7) presupunem că ecuaţiile au precizii diferite deci, ponderi diferite.
Valorile cele mai probabile ale corecţiilor în acest caz se obţin utilizând de asemenea metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[pvv] = min. \qquad 5.22$$

Dacă în acest caz înlocuim valorile corecţiilor v_i obţinem:

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + ... + p_n v_n^2 = p_1 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + ... + h_1 x_h + l_1)^2 +$$

$$+ p_2 (a_2 x_1 + b_2 x_2 + ... + h_2 x_h + l_2)^2 + \qquad 5.23$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. +$$
$$+ p_n \left(a_n x_1 + b_n x_2 + ... + h_n x_h + l_n\right)^2 = minim$$

Şi în această situaţie relaţia (5.23) reprezintă o funcţie de x, adică:

$$[pvv] = F\left(x_1, x_{2,} ...., x_h\right) \qquad 5.24$$

Pentru determinarea minimului acestei funcţii de mai multe variabile, trebuie ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei în raport cu necunoscutele să fie zero. Efectuând aceste derivate obţinem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2p_1a_1(a_1x_1 + b_1x_2 + ... + h_1x_h + l_1) +$$
$$+ 2p_2a_2(a_2x_1 + b_2x_2 + ... + h_2x_h + l_2) + \qquad 5.25$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + $$
$$+ 2p_na_n(a_nx_1 + b_nx_2 + ... + h_nx_h + l_n) = 0$$

sau: $[pav] = 0$ 5.26

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2p_1b_1(a_1x_1 + b_1x_2 + ... + h_1x_h + l_1) +$$
$$+ 2p_2b_2(a_2x_1 + b_2x_2 + ... + h_2x_h + l_2) + \qquad 5.27$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + $$
$$+ 2p_nb_n(a_nx_1 + b_nx_2 + ... + h_nx_h + l_n) = 0$$

sau: $[pbv] = 0$ 5.28

Analog se calculează şi celelalte derivate, obţinându-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = 2p_1h_1(a_1x_1 + b_1x_2 + ... + h_1x_h + l_1) +$$
$$+ 2p_2h_2(a_2x_1 + b_2x_2 + ... + h_2x_h + l_2) + \qquad 5.29$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + $$
$$+ 2p_nh_n(a_nx_1 + b_nx_2 + ... + h_nx_h + l_n) = 0$$

sau: $[phv] = 0$ 5.30

Efectuând calculele în (5.25), (5.27), (5.29) şi trecând la notaţiile Gauss, rezultă:

$$\begin{aligned} &[paa]x_1 + [pab]x_2 + ... + [pah]x_h + [pal] = 0 \\ &[pab]x_1 + [pbb]x_2 + ... + [pbh]x_h + [pbl] = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[pah]x_1 + [pbh]x_2 + ... + [phh]x_h + [phl] = 0 \end{aligned} \qquad 5.31$$

Sistemul (5.31) poartă denumirea de ***sistem normal al corecţiilor în cazul măsurătorilor indirecte ponderate.***

Prin rezolvarea acestui sistem, se determină aceleaşi corecţii x_i care, aplicate valorilor apropiate X_i^0 ne dau valorile cele mai probabile ale necunoscutelor:

$$X_i = X_i^0 + x_i \qquad 5.32$$

De asemenea, cu ajutorul corecţiilor x_i se pot deduce ulterior valorile v_i ce vor fi aplicate mărimilor măsurate M_i^0:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + ... + h_i x_h + l_i \qquad 5.33$$

Determinarea practică a coeficienţilor şi termenilor liberi ai ecuaţiilor normale se face în tabele asemănătoare celor de la măsurătorile indirecte de aceeaşi precizie, şi anume:

1.Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor de corecţie

Nr. crt.	p_i	a_i	b_i	**...**	h_i	l_i	S_i	***Control***
1	p_1	a_1	b_1	...	h_1	l_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + ... + h_1 + l_1$
2	p_2	a_2	b_2	...	h_2	l_2	S_2	
...	...	...	...	...	...	...	...	………
n	p_n	a_n	b_n	...	h_n	l_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + ... + h_n + l_n$
Σ	-	*[a]*	*[b]*	...	*[h]*	*[l]*	*[S]* / Σ_1	Σ_1*=[a] + [b] +.....+ [h] + [l]*

2.Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor normale:

[paa]	*[pab]*	....	*[pah]*	*[pal]*	*[paS]*	***Control:*** *[paS] = [paa] + [pab] +...+ [pah] +[pal]*
	[pbb]	....	*[pbh]*	*[pbl]*	*[pbS]*	*[pbS] = [pab] + [pbb] + ...+ [pbh] + [pbl]*
		...	...	...	...	…………
			[phh]	*[phl]*	*[phS]*	*[phS] = [pah] + [pbh] + ...+ [phh] + [phl]*
				[pll]	*[plS]*	*control*

5.3 REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NORMALE

Metodele de rezolvare a sistemelor liniare se împart în două grupe:
1.***Metode exacte***, care dau un algoritm finit pentru calculul soluţiei (exemplu: regula lui Cramer, metoda eliminării succesive a lui Gauss).
2.***Metode iterative***, care permit găsirea soluţiei cu o eroare oricât de mică dar nenulă printr-un proces unic numit proces de iteraţie.
Metodele iterative sunt simple şi comode în cazul în care se folosesc calculatoarele electronice.
Pentru practica geodezică se foloseşte cu succes *rezolvarea sistemelor de ecuaţii normale prin metoda eliminărilor succesive a lui Gauss.*

Principiul metodei:
Considerăm un sistem normal de 3 ecuaţii:

$$\begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [al] = 0 \\ [ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] = 0 \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cl] = 0 \end{aligned} \qquad 5.34$$

Metoda de rezolvare constă în reducerea de necunoscute, prin eliminări succesive:
Din prima ecuaţie a sistemului (5.34) se scoate necunoscuta x_1 şi se introduce în celelalte două:

$$x_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[al]}{[aa]}$$

$$[ab]\left(-\frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[al]}{[aa]}\right) + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] = 0$$

$$-\frac{[ab]^2}{[aa]}x_2 - \frac{[ab][ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[ab][al]}{[aa]} + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] = 0$$

$$\left\{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right\}x_2 + \left\{[bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}x_3 + \left\{[bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}\right\} = 0$$

În cea de-a treia ecuaţie vom obţine: 5.35

$$[ac]\left(-\frac{[ab]}{[aa]}x_2-\frac{[ac]}{[aa]}x_3-\frac{[al]}{[aa]}\right)+[bc]x_2+[cc]x_3+[cl]=0$$

$$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}x_2-\frac{[ac]^2}{[aa]}x_3-\frac{[ac][al]}{[aa]}+[bc]x_2+[cc]x_3+[cl]=0$$

$$\left\{[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right\}x_2+\left\{[cc]-\frac{[ac]^2}{[aa]}\right\}x_3+[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}=0$$

Se fac următoarele notaţii:

$$[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}=[bb.1]$$

$$[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}=[bc.1]$$

$$[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=[bl.1] \qquad 5.36$$

$$[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}=[cc.1];$$

$$[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}=[cl.1]$$

Aceste expresii poartă denumirea de *algoritmi Gauss* de ordinul I .
Cu ajutorul lor, ecuaţiile se vor scrie:

$$\begin{aligned}&[bb.1]x_2+[bc.1]x_3+[bl.1]=0\\&[bc.1]x_2+[cc.1]x_3+[cl.1]=0\end{aligned} \qquad 5.37$$

În continuare, vom elimina necunoscuta x_2 procedând analog:
din prima ecuaţie se scoate x_2 şi se înlocuieşte în cea de-a doua:

$$x_2=-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}x_3-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$$

Rezultă:

$$[bc.1]\left(-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}x_3-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\right)+[cc.1]x_3+[cl.1]=0$$

$$-\frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}x_3-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}+[cc.1]x_3+[cl.1]=0 \qquad 5.38$$

$$\left\{[cc.1]-\frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}\right\}x_3+\left\{[cl.1]-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}\right\}=0$$

Adoptând următoarele notaţii:

$$[cc.1]-\frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}=[cc.2]$$

$$[cl.1]-\frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}=[cl.2]$$

care poartă denumirea de algoritmi Gauss de ordinul II, ecuaţia finală va fi:

$$[cc.2]x_3+[cl.2]=0 \qquad 5.39$$

Deci: $$x_3=-\frac{[cl.2]}{[cc.2]} \qquad 5.40$$

Prin eliminări succesive am reuşit să aducem sistemul la o formă triunghiulară.
Pornind în ordine inversă, se determină apoi x_2 şi x_1.
Toate calculele se fac într-un tabel numit *schema Gauss*
Relaţia de verificare a soluţiilor obţinute:

$$[(S-l)x]=-[l] \qquad 5.41$$

Această relaţie se obţine prin însumarea tuturor ecuaţiilor (5.34), adică a elementelor respective de pe liniile ecuaţiilor din schemă.
Soluţiile se mai pot verifica introducându-le în toate ecuaţiile, pe care trebuie să le satisfacă. Această verificare va fi satisfăcută în limita preciziei de calcul - precizie care depinde de numărul de cifre utilizat în calcule, de numărul ecuaţiilor şi mai ales de conformarea sistemului.

Se prezintă mai jos modul de calcul în schema Gauss:
a) se înscriu coeficienţii ecuaţiilor normale pe liniile:
-pentru ecuaţia I în linia (1)
-pentru ecuaţia II în linia (3)
-pentru ecuaţia III în linia (6)
Datorită faptului că sistemul este simetric e suficient să se înscrie coeficienţii de pe diagonală şi cei de deasupra.
b) Se împarte linia (1) cu coeficientul -$[aa]$, obţinându-se linia (2) care nu reprezintă altceva decât prima ecuaţie eliminatoare (5.35)
c) Linia (4), care reprezintă ecuaţia sistemului redus odată se obţine astfel:
-se ia drept PIVOT elementul din linia (2) coloana (2), adică $-\frac{[ab]}{[aa]}$ se înmulţeşte succesiv cu elementele din linia (1), iar la aceste valori se adaugă coeficienţii din linia (3).

exemplu:

$$[bb.1] = -\frac{[ab]}{[aa]} \times [ab] + [bb]$$

Se va face obligatoriu controlul: $[bb.1] + [bc.1] + [bl.1] = [bs.1]$

Schema Gauss redusă

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	-
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	se face control
$x_1 =$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	-
	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	control
	-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$	control
	$x_2 =$	$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	-
		$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$	control
		-1	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	control
		$x_3 =$			

d) Linia (5) rezultă din linia (4), care se împarte cu $-[bb.1]$ *reprezentând din nou o ecuaţie eliminatoare.*

e) Pentru deducerea algoritmilor Gauss de ordinul II din linia (7) - linie ce reprezintă ecuaţia redusă de două ori 2.72, se procedează astfel:

-se vor considera doi pivoţi şi anume:

elementul din linia (2) coloana (3), adică $-\frac{[ac]}{[aa]}$ şi $-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$. Aceşti pivoţi se înmulţesc succesiv cu elementele din linia de deasupra lor, se adună aceste produse şi apoi se însumează şi cu elementele corespunzătoare din linia (6).

exemplu:

$$[cl.2] = -\frac{[ac]}{[aa]} \times [al] + \left\{ -\frac{[bc.1]}{[bb.1]} \times [bl.1] \right\} + [cl]$$

Controlul obligatoriu al acestei linii (7) este:

$[cc.2]+[cl.2]=[cs.2]$

Linia (8) se deduce din (7), împărţind-o pe aceasta cu -$[cc.2]$.

Se deduc necunoscutele în următoarea ordine:

-din linia (8) rezultă direct $x_3 = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$

-din linia (5) se deduce x_2, iar din linia (2) se determină şi x_1.

5.4 CALCULUL PRECIZIEI

- ***Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători***

Pentru deducerea acestei erori vom reduce mai întâi problema la cazul măsurătorilor directe şi anume:

în cazul măsurătorilor directe, având de determinat o singură necunoscută x, sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţii se poate scrie sub forma:

$$a\,x + l_i = v_i \qquad i = 1,2,...n \tag{5.42}$$

Eroarea medie pătratică a unei singure măsurători, este dată de relaţia cunoscută

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{5.43}$$

iar pentru măsurătorile ponderate, eroarea medie pătratică a unităţii de pondere:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{5.44}$$

La măsurătorile indirecte, sistemul liniar al corecţiilor are forma:

$$\begin{gathered} v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + ... + h_i x_h + l_i \\ i = 1,2,...,n \quad ; \quad n \geq h \end{gathered} \tag{5.45}$$

Pentru a reduce la cazul unei singure necunoscute va trebui ca din sistemul (5.45) să eliminăm $(h-1)$ necunoscute.

Astfel, vom rămâne cu $n-(h-1)$ ecuaţii cu o singură necunoscută. Aplicând formula (2.45), rezultă eroarea medie pătratică a unei singure măsurători, în cazul măsurătorilor indirecte:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-h}} \tag{5.46}$$

În cazul ponderat, eroarea unităţii de pondere:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-h}} \tag{5.47}$$

Pentru fiecare măsurătoare reală M_i în cazul determinărilor ponderate găsim eroarea medie pătratică aferentă m_i:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \tag{5.48}$$

Având în vedere că $\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-h}}$, rezultă:

$$m_i = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-h)}} \tag{5.49}$$

- ***Eroarea medie pătratică a necunoscutelor***

Deoarece necunoscutele x_i au fost descompuse în: $X_i = X_i^0 + x_i$, $i = 1,...,h$
unde valorile X_i^0 au fost alese arbitrar (respectând condiţia ca ele să fie suficient de apropiate de valorile probabile X_i), la o compensare, aceste valori X_i^0 fiind importante, erorile medii pătratice ale necunoscutelor x_i, vor fi egale cu erorile medii pătratice ale corecţiilor.
S-a arătat că eroarea unui termen liber este egală cu eroarea mărimii măsurate M_i^0; pe de altă parte, corecţiile x_i, obţinute prin rezolvarea sistemului normal sunt dependente, ca urmare a prelucrării în bloc a sistemului ansamblului de mărimi măsurate M_i^0. Deci, pentru obţinerea preciziei lor, nu se poate aplica direct formula erorii unei funcţii de mărimi independente. Vom exprima astfel fiecare corecţie x_i ca o funcţie liniară de termeni liberi (care sunt independenţi).
Se consideră sistemul normal:

$$\begin{aligned}
&[paa]x_1 + [pab]x_2 + ... + [pah]x_h + [pal] = 0\\
&[pab]x_1 + [pbb]x_2 + ... + [pbh]x_h + [pbl] = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[pah]x_1 + [pbh]x_2 + ... + [phh]x_h + [phl] = 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Conform regulii lui Cramer, o necunoscută oarecare:

$$-x_j = \frac{\begin{Vmatrix} [paa]..[pal]..[pah] \\ [pab]..[pbl]..[pbh] \\ [pah]..[phl]..[phh] \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} [paa]..[pab]...[pah] \\ [pab]..[pbb]...[pbh] \\ [pah]..[pbh]...[phh] \end{Vmatrix}} \qquad 5.51$$

Dezvoltând determinantul de la numărător după coloana j, apoi notând cu D determinantul şi cu A_{ij} complemenţii algebrici ai sistemului obţinem:

$$-x_j = \frac{1}{D}\left\{[pal]A_{1j} + [pbl]A_{2j} + \ldots. + [phl]A_{hj}\right\} \qquad 5.52$$

numiţi *coeficienţi de pondere,* ei nefiind altceva decât elementele matricei inverse.
Vom obţine:

$$-x_j = \sum_{i=1}^{n}\left(a_iQ_{1j} + b_iQ_{2j} + \ldots.. + h_iQ_{hj}\right)p_il_i \qquad 5.53$$

sau: $$-x_j = \sum_{i=1}^{n}\alpha_il_i \qquad 5.54$$

unde: $\alpha_i = \left(a_iQ_{1j} + b_iQ_{2j} + \ldots. + h_iQ_{hj}\right)p_i$ 5.55

Calculând eroarea funcţiei(5.54), rezultă:

$$m_{xj}^2 = \alpha_1^2m_{l_1}^2 + \alpha_2^2m_{l_2}^2 + \ldots + \alpha_n^2m_{l_n}^2 \qquad 5.56$$

dar: $m_{l_i}^2 = \frac{\mu^2}{p_i}$, deci: $m_{x_j}^2 = \mu^2\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$.... 5.57

Se demonstrează că $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{jj}$, unde Q_{jj} sunt coeficienţi de pondere $(j = 1,2,\ldots,h)$ şi reprezintă elementele de pe diagonala principală a matricei inverse.
Eroarea medie pătratică a unităţii de pondere va fi:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-h}} \qquad 5.58$$

Schema Gauss extinsă pentru rezolvarea sistemului normal şi calculul preciziei

x_1	x_2	x_3	l		*-E*		f	S
$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	-1	0	0	f_1	S_1
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$\frac{1}{[aa]}$	0	0	$-f_1$	$-\frac{S_1}{[aa]}$
$x_1 =$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	0	-1	0	f_2	S_2
	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$\frac{[ab]}{[aa]} = N$	-1	0	$[f_{2.1}]$	$[S_{2.1}]$
	-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{N}{[bb.1]}$	$\frac{1}{[bb.1]}$	0	$-\frac{[f_2.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[S_2.1]}{[bb.1]}$
	$x_2 =$	$[cc]$	$[cl]$	0	0	-1	f_3	S_3
		$[cc.2]$	$[cl.2]$	M	R	-1	$[f_{3.2}]$	$[S_{3.2}]$
		-1	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{M}{[cc.2]}$	$-\frac{R}{[cc.2]}$	$\frac{1}{[cc.2]}$	$-\frac{[f_{3.2}]}{[cc.2]}$	$-\frac{[S_3.2]}{[cc.2]}$
		$x_3 =$	$[ll]$	$Q_{11} =$	$Q_{22} =$	$Q_{33} =$	$Q_F =$	
			$[ll.3]$					

$[vv] =$

Aceşti coeficienţi de pondere pot fi deduşi tot cu ajutorul schemei Gauss astfel:

- în coloane suplimentare ataşate schemei, se înscrie matricea (***-E***).
- se extind operaţiile din faza de reducere şi la aceste coloane.

În fiecare coloană suplimentară se înmulţesc termenii de pe linia roşie (linia care începe cu *-1*) cu elementele de deasupra lor, se însumează şi se iau cu semn schimbat, această valoare reprezentând coeficientul de pondere respectiv.

5.4.1 Eroarea medie pătratică a unei funcţii de mărimi determinate indirect

Fie dată funcţia:

$$F = F(x_1, x_2, ..., x_h) \qquad 5.59$$

în care: $x_1, x_2, ..., x_h$ reprezintă mărimi determinate indirect, în funcţie de mărimile măsurate direct $M_1, M_2, ..., M_n$.

Se pune problema să determinăm eroarea medie pătratică a acestei funcţii datorată erorilor argumentelor x_i. Vom căuta să exprimăm aceste necunoscute x_i în funcţie de termenii liberi l_i ai ecuaţiilor de corecţii, deoarece aceşti termeni liberi sunt

independenţi; ei conţin erori iar eroarea medie pătratică a lor este egală cu eroarea medie pătratică a mărimilor măsurate direct.
(Se caută acest lucru, deoarece necunoscutele x_i sunt mărimi dependente fiind determinate indirect şi în acest caz nu se poate aplica formula transmiterii erorilor definită în cazul măsurătorilor independente).
În general funcţia (5.59) nu este liniară impunându-se aducerea ei la această formă prin dezvoltare în serie Taylor în jurul valorilor aproximative $x_i = x_i^0 + x_i$, unde $(i = 1,2,...,h)$.
Efectuându-se calculele se obţine:

$$F(x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2, ..., x_h^0 + x_h) = F(x_1^0, x_2^0, ..., x_h^0 + \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_0 x_i + t \qquad 5.60$$

unde t reprezintă suma termenilor de ordin superior din dezvoltare care se neglijează.

Se fac notaţiile:

$$F\left(x_1^0, x_2^0, .., x_h^0\right) = f_0$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_0 = f_i \qquad 5.61$$

Relaţia (5.60) devine în acest caz:

$$F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_h x_h \qquad 5.62$$

Corecţiile x_j sunt deduse cu ajutorul regulii Cramer:

$$-x_j = [al] Q_{1j} + [bl] Q_{2j} + ... + [hl] Q_{hj}$$

în care $Q_{ij} = \frac{A_{ij}}{D}$
Punând în evidenţă termenii liberi (cei care conţin erori) se obţine:

$$-x_j = \sum_{i=1}^{h} (a_i Q_{1j} + b_1 Q_{2j} + ... + h_i Q_{hj}) l_i \qquad 5.63$$
$$j = 1,2,...,h$$

Deoarece eroarea unei ecuaţii de corecţii este egală cu eroarea termenului liber, coeficienţii $a_i, b_i, ..., h_i$ pot fi consideraţi drept constante lipsite de erori.
Notăm aceste constante cu:

$$\alpha_i = a_i Q_{11} + b_i Q_{21} + ... + h_i Q_{h_1}$$
$$\beta_i = a_i Q_{12} + b_i Q_{22} + ... + h_i Q_{h_2} \qquad 5.64$$
$$...$$
$$\omega_i = a_i Q_{1h} + b_i Q_{2h} + ... + h_i Q_{h_n}$$

Relaţiile (5.63) devin:

$$\begin{aligned} -x_1 &= [\alpha l] \\ -x_2 &= [\beta l] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_h &= [\omega l] \end{aligned} \qquad 5.65$$

Introducând valorile acestor corecţii x_j în (5.62) rezultă:

$$F = f_0 - \sum_{i=1}^{n} \left(f_1\alpha_i + f_2\beta_i + \ldots\ldots + f_h\omega_i \right) l_i \qquad 5.66$$

Acestei relaţii i se poate aplica formula erorii unei funcţii de mărimi independente:

$$m_F^2 = m^2 \begin{Bmatrix} f_1^2 Q_{11} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + \ldots\ldots + 2 f_1 f_h Q_{1h} + \\ + f_2^2 Q_{12} + \ldots\ldots\ldots \; + 2 f_2 f_h Q_{2h} + \\ + f_h^2 Q_{hh} \end{Bmatrix} \qquad 5.67$$

Trecându-se la algoritmii Gauss:

$$\begin{aligned} m_F^2 = \frac{1}{p_F} = &\left(f_1 Q_{11} + f_2 Q_{12} + \ldots + f_h Q_{1h} \right) f_1 + \\ + &\left(f_1 Q_{12} + f_2 Q_{22} + \ldots + f_h Q_{2h} \right) f_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &\left(f_1 Q_{1h} + f_2 Q_{2h} + \ldots + f_h Q_{hh} \right) f_h \end{aligned} \qquad 5.68$$

$\frac{1}{p_F}$ se notează Q_{FF} iar eroarea funcţiei în acest caz va fi:

$$m_F = \pm\, m \sqrt{Q_{FF}} \qquad 5.69$$

Calculul se poate face şi cu ajutorul schemei Gauss astfel:

- se extinde schema cu o coloană suplimentară notată Q_{FF} şi se trece în dreptul primei ecuaţii coeficientul f_1 , în dreptul celei de-a doua ecuaţii f_2, până la ultima ecuaţie cu coeficientul f_h.
- se extind apoi operaţiile făcute în prima parte a tabelului calculându-se algoritmi şi pentru coloana Q_{FF} după regulile cunoscute.
- în coloana Q_{FF} se înmulţesc elementele de pe linia roşie cu cele de deasupra, se însumează şi se iau cu semnul schimbat.

- valoarea obţinută reprezintă coeficientul de pondere $Q_{FF} = \dfrac{1}{P_F}$, valoare ce se înscrie în partea de jos a coloanei Q_{FF}.

Tabel pentru calculul coeficientului de pondere Q_{FF}

x_1	x_2	x_3	L	Q_{FF}	Σ	*Control*
$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	f_1	Σ_1	-
-1	$-\dfrac{[ab]}{[aa]}$	$-\dfrac{[ac]}{[aa]}$	$-\dfrac{[al]}{[aa]}$	$-\dfrac{f_1}{[aa]}$	$-\dfrac{\Sigma_1}{[aa]}$	control
$x_1 =$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	f_2	Σ_2	-
	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[f_{2.}1]$	$[\Sigma_{2.}1]$	control
	-1	$-\dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[f_2.1]}{[bb.1]}$	$-\dfrac{[\Sigma_2.1]}{[bb.1]}$	control
	$x_2 =$	$[cc]$	$[cl]$	f_3	Σ_3	-
		$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[f_{3.}2]$	$[\Sigma_{3.}2]$	control
		-1	$-\dfrac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\dfrac{[f_3.2]}{[cc.2]}$	$-\dfrac{[\Sigma_3.2]}{[cc.2]}$	control
		$x_3 =$		$Q_{FF} =$		

5.4.2. Elipsa erorilor

La măsurătorile de precizie, pe lângă valorile probabile ale mărimilor măsurate sau deduse indirect ne interesează şi precizia acestora.
Această problemă se pune deci şi în cazul reţelelor geodezice.
Poziţia planimetrică a unui punct în urma compensării depinde de doi parametri: X şi Y, deci avem de-a face cu un sistem bidimensional de încredere care reprezintă o *elipsă*. Erorile medii pătratice m_x şi m_y calculate în urma compensării îşi schimbă însă valorile la o rotaţie a axelor de coordonate ceea ce produce o neuniformitate în aprecierea preciziei.
În acest caz este necesar să se construiască elipsa erorilor, care este independentă de sistemul de axe ales. Cu ajutorul elipsei erorilor putem determina erorile în poziţia punctelor pentru orice direcţie (deci şi pentru direcţia axelor de coordonate) cât şi direcţiile pentru care erorile sunt maxime sau minime.
Semiaxele elipsei şi unghiurile acestora cu axele de coordonate se pot determina cu ajutorul unui sistem rectangular u, v, rotit cu unghiul φ faţă de sistemul iniţial XY (fig.5.1).

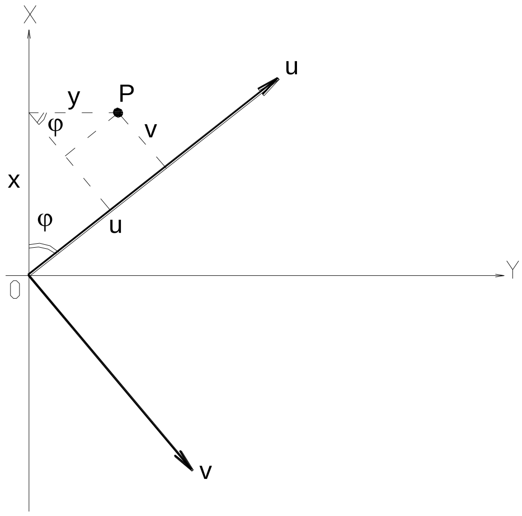


Fig 5.1 Determinarea elementelor elipsei

Coordonatele unui punct P în sistemul uv în funcţie de coordonatele XY vor fi:

$$u = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$
$$v = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \qquad 5.70$$

Se observă că u este o funcţie liniară de X şi Y, mărimi determinate indirect.
Pentru determinarea erorii lui u se aplică formula erorii unei funcţii de mărimi determinate indirect.
Vom avea:

$$Q_{uu} = Q_{xx}\cos^2\varphi + 2Q_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi \qquad 5.71$$

iar eroarea medie: $m_u = \pm m\sqrt{Q_{uu}}$

Valorile maxime sau minime ale funcţiei se obţin pentru $\frac{\partial Q_{uu}}{\partial\varphi} = 0$

Relaţia mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \frac{Q_{xx}-Q_{yy}}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + Q_{xy}\sin 2\varphi$$
$$Q_{uu} = \frac{Q_{xx}+Q_{yy}}{2} + \frac{Q_{xx}-Q_{yy}}{2}\cos 2\varphi + Q_{xy}\sin 2\varphi \qquad 5.72$$

Calculând derivata în raport cu φ se obţine:

$$\frac{\partial Q_{uu}}{\partial \varphi} = -(Q_{xx} - Q_{yy})\sin 2\varphi + 2Q_{xy}\cos 2\varphi = 0 \qquad 5.73$$

de unde rezultă: $$tg\,2\varphi = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \qquad 5.74$$

având soluţiile: (φ) şi $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

Cele două direcţii obţinute sunt ortogonale: (φ) reprezintă unghiul format de axa *OX* cu direcţia semiaxei mari a elipsei; $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ dă valoarea minimă, adică unghiul format de axa *OX* cu semiaxa mică.

Elipsa erorilor reprezintă un invariant al erorilor în poziţia planimetrică a unui punct.

Având construită elipsa erorilor într-un punct putem determina eroarea pe orice direcţie pe cale grafică astfel (fig.5.2):

Se coboară o perpendiculară pe direcţia r tangentă la elipsă, mărimea erorii m_r fiind egală cu segmentul cuprins între centrul elipsei şi piciorul perpendicularei (OP). Analitic, acest segment are valoarea dată de:

$$\begin{aligned} m_r^2 &= a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \\ m_r^2 &= m_{\max}^2\cos^2\varphi + m_{\min}^2\sin^2\varphi \end{aligned} \qquad 5.75$$

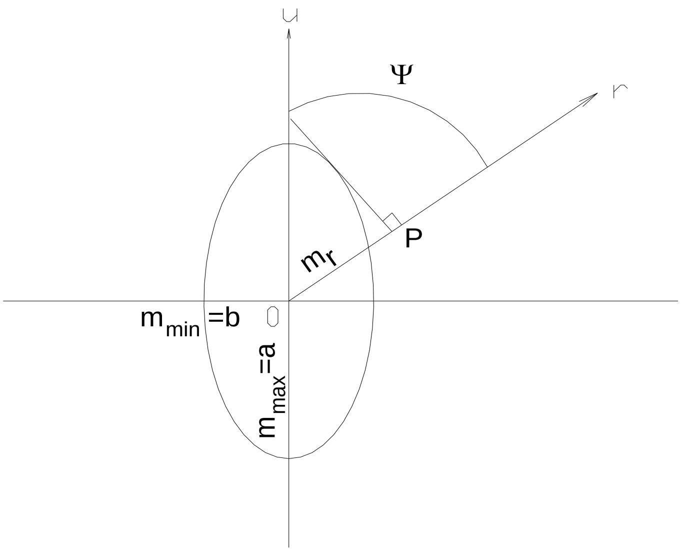


Fig.5.2 Elipsa erorilor

Un caz particular al acestei relaţii este atunci când:

- $\varphi = 0^g$, rezultă $m_r = m_x$
- $\varphi = 100^g$, rezultă $m_r = m_y$

adică proiecţiile elipsei pe direcţia X şi Y (fig.5.3).

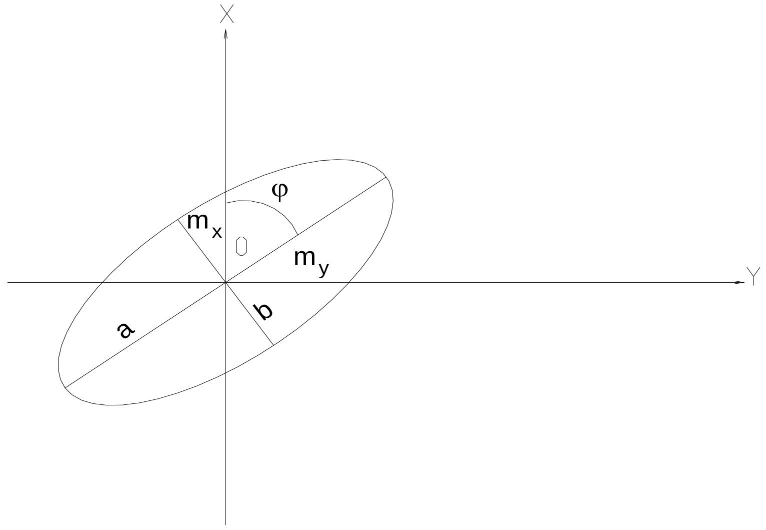


Fig.5. 3 Cazuri particulare ale elipsei

5.4.2.2 Justificarea faptului că domeniul de încredere pentru poziţia planimetrică a unui punct este o elipsă

Forma generală a unei conice este dată de ecuaţia algebrică de gradul II:

$$f(xy) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad 5.76$$

Eroarea pe o direcţie care face unghiul φ cu axele de coordonate s-a văzut că este:

$$Q_{uu} = Q_{xx}\cos^2\varphi + 2Q_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + Q_{yy}\sin^2\varphi \qquad 5.77$$

Din comparaţia celor două relaţii rezultă:

$$x = \cos\varphi$$
$$y = \sin\varphi \qquad 5.78$$

Invarianţii ortogonali ai conicei sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ; \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} , \qquad \eta = a_{11} + a_{22} \qquad 5.79$$

În cazul nostru:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{vmatrix} \qquad \eta = Q_{xx} + Q_{yy} \qquad 5.80$$

Deoarece $Q_{xy} = Q_{yx}$ şi $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$,

vom obţine:

$$\Delta = \delta = \begin{vmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{vmatrix} = Q_{xx}\, Q_{yy} - Q_{xy}{}^{2}$$

$$\eta = Q_{xx} + Q_{yy} \qquad 5.81$$

$\Delta \neq 0$

$\eta\delta < 0 \Rightarrow$ elipsa reală

Reducerea la forma canonică

Forma canonică a unei conice este dată de:

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad 5.82$$

unde S_1 şi S_2 sunt valorile proprii obţinute ca soluţii ale ecuaţiei caracteristice:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{sau:} \quad S^2 - \eta S + \delta = 0$$

Pentru cazul nostru avem:

$$S^2 - \left(Q_{xx} + Q_{yy}\right)S + Q_{xx} Q_{yy} - Q_{xy}^2 = 0 \qquad 5.83$$

Această ecuaţie are soluţiile:

$$S_{1,2} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{xx} + Q_{yy}\right)^2 - 4\left(Q_{xx}\, Q_{yy} - Q_{xy}^2\right)}$$

$$S_{1,2} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(Q_{xx} - Q_{yy}\right)^2 + 4Q_{xy}^2} \qquad 5.84$$

S_1 reprezintă Q_{uu} maxim, *S_2* reprezinta Q_{uu} minim.

Relaţiile de mai sus ne permit să determinăm semiaxele elipsei şi anume:

$$a = \sigma_0 \sqrt{Q_{uu}(\max)}$$
$$b = \sigma_0 \sqrt{Q_{uu}(\min)} \qquad 5.85$$

Soluţiile ecuaţiei $S^2 - \left(Q_{xx} + Q_{yy}\right)S + Q_{xx}Q_{yy} - Q_{xy}^2 = 0$ sunt întotdeauna reale şi pentru că $\Delta = \delta$, ecuaţia canonică se va scrie sub forma:

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 - 1 = 0 \qquad 5.86$$

Conica este o elipsă (reală) ce poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad 5.87$$

Comparând relaţiile 5.86 cu 5.87 rezultă:

$$a^2 = S_1$$
$$b^2 = S_2$$

Unghiul de rotaţie (făcut de axa OX cu axele elipsei) este dat de relaţia din geometria analitică:

$$tg\,2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \qquad 5.88$$

Pentru cazul nostru:

$$tg\,2\varphi = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \qquad 5.89$$

Tabel cu distribuţia valorilor coeficienţilor de pondere

	$Q_{xy} > 0$	$Q_{xy} < 0$
$Q_{xx} - Q_{yy} > 0$	$0 < \varphi < 50^9$	$150^9 < \varphi < 200^9$
$Q_{xx} - Q_{yy} < 0$	$50^9 < \varphi < 100^9$	$150^9 < \varphi < 200^9$

5.5 VERIFICĂRILE PRINCIPALE LA COMPENSAREA PRIN METODA MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

- ***Etapa de liniarizare a ecuaţiilor şi stabilirea valorilor aproximative pentru necunoscute***

Controlul acestei etape se face prin verificarea principală a compensării care constă în determinarea în dublu mod a valorilor mărimilor compensate M_i, şi anume, prin introducerea necunoscutelor $X_i = X_i^0 + x_i$, în ecuaţiile iniţiale, trebuind să se verifice $M_i^0 + v_1 = F_i(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, ..., X_h^0 + x_h)$.

Dacă condiţia de mai sus nu este îndeplinită rezultă că liniarizarea ecuaţiilor după metoda Taylor nu a fost bine făcută sau, valorile aproximative nu au fost alese favorabil, astfel încât termenii de ordinul II şi superiori neglijaţi au valori ce influenţează compensarea. În acest caz compensarea trebuie refăcută.

- ***Etapa de întocmire a ecuaţiilor normale***

Verificarea se face cu ajutorul sumelor pe rânduri aşa cum s-a arătat în tabelul corespunzător.

- ***Etapa de rezolvare a ecuaţiilor normale***

Verificarea se face cu ajutorul sumelor pe rânduri din schema Gauss (în faza de reducere) şi prin introducerea necunoscutelor în sistemul normal (se recomandă relaţia unică: $[(S-l)x] = -[l]$

- ***Etapa de calcul a corecţiilor***

Verificarea se face calculând $[vv]$ prin mai multe metode.

5.6 TRATAREA MATRICIALĂ A MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

Se dă sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţii:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + ... + h_i x_h + l_i \qquad 5.90$$

i =1- n
n > h

a) Cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie

Adoptăm următoarele notaţii:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & ... & h_1 \\ a_2 & b_n & ... & h_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n & b_n & ... & h_n \end{pmatrix} \quad \text{(vectorul coeficienţilor)} \qquad 5.91$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_h \end{pmatrix} \text{(vector coloană al necunoscutelor)} \qquad 5.92$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{(vector coloană al corecţiilor)} \qquad 5.93$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \quad \text{(vector coloană al termenilor liberi)} \qquad 5.94$$

Sistemul liniar iniţial devine având in vedere notaţiile făcute:

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,h)}{A} \cdot \underset{(h,1)}{X} + \underset{(n,1)}{L} \qquad 5.95$$

Punând condiţia de minim impusă de metoda celor mai mici pătrate, rezultă:

$$V^T V \rightarrow minim$$

Deci, derivatele parţiale în raport cu necunoscuta *x* trebuie să fie egale cu zero; cu alte cuvinte minimul acestei funcţii în *x* se află punând condiţia $\nabla f = 0$.

$$(AX + L)^T \cdot (AX + L) \rightarrow \min. \qquad 5.96$$

Derivând, se va obţine: (ţinând cont de proprietatea gradientului)

$$\nabla(f_1, f_2) = (\nabla f_1)^T \cdot f_2 + (\nabla f_2)^T \cdot f_1 \qquad 5.97$$

$$A^T(AX + L) + A^T(AX + L) = 0$$

$$A^T(AX + L) = 0$$

$$A^T AX + A^T L = 0 \Rightarrow X = -\frac{A^T L}{A^T A} =$$

$$= -(A^T A)^{-1} \cdot A^T L = -N^{-1} A^T L \qquad 5.98$$

$$X = -N^{-1} A^T L$$

b) Cazul măsurătorilor ponderate

Pornim de la acelaşi sistem de ecuaţii de corecţii:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \ldots + h_i x_h + l_i \Rightarrow p_i \qquad 5.99$$

$$i=1\text{-}n$$

$$n > h$$

Apare în plus faţă de cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie matricea ponderilor:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad 5.100$$

Sistemul iniţial se va scrie:

$$V = AX + L \qquad 5.101$$

iar condiţia de minim va deveni în acest caz:

$$V^T PV \to \min. \qquad 5.102$$

Deci:

$$(AX + L)^T \cdot P(AX + L) \to \min. \qquad 5.103$$

$$\begin{aligned} &\nabla f = 0 \\ &A^T P(AX + L) + A^T P(AX + L) = 0 \\ &2A^T PAX + 2A^T PL = 0 \\ &X = -\frac{A^T PL}{A^T PA} = -\left(A^T PA\right)^{-1} \cdot A^T PL \\ &X = -N^{-1} A^T PL \end{aligned} \qquad 5.104$$

6. COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR CONDIŢIONATE

Metoda măsurătorilor condiţionate se aplică în general în geodezie, la compensarea reţelelor de sprijin (triangulaţie, trilateraţie, poligonometrie, nivelment).
O reţea de sprijin, de exemplu de triangulaţie, este constituită dintr-o succesiune de figuri geometrice (triunghiuri, patrulatere, poligoane). Pentru realizarea acestei reţele se măsoară unghiuri şi laturi. În general însă, pentru eliminarea greşelilor şi îmbunătăţirea preciziei, nu ne limităm la a măsura un număr de elemente (unghiuri, laturi) strict necesare pentru construirea reţelei respective, ci se măsoară un număr de elemente în plus. Este evident căci între unghiurile măsurate, precum şi între unghiuri şi laturi, există anumite relaţii geometrice impuse de geometria reţelei.
Pentru rezolvarea problemei de compensare este util să se evalueze numărul acestor relaţii cât şi caracterul lor, păstrând însă doar relaţiile independente.
Numărul ecuaţiilor de condiţie independente este egal cu numărul măsurătorilor efectuate în plus (nr. gradelor de libertate).

Exemplu:
Pentru construirea unui triunghi sunt necesare 3 elemente dintre care cel puţin unul liniar. Presupunând că este cunoscută o latură, atunci este necesar şi suficient, pentru construirea triunghiului să se măsoare două unghiuri.
Dacă se măsoară şi cel de-al treilea unghi, atunci ele trebuie să satisfacă condiţia:

$$A + B + C = 200^g \qquad 6.1$$

Având deci o măsurătoare în plus, este necesar să întocmim o ecuaţie de condiţie.
Deoarece valorile obţinute din măsurători sunt afectate în mod inerent de erori, condiţia (6.1) nu va fi riguros satisfăcută, de aceea:

$$A + B + C - 200^g = w \qquad 6.2$$

unde, discordanţa w reprezintă *neînchiderea* în triunghi ca urmare a erorilor de măsurare.

Pentru a satisface condiţia (6.1) este necesar ca valorile măsurate, afectate de erori să fie modificate cu anumite cantităţi, numite corecţii (v_i).
Vom avea astfel:

$$(A + v_A) + (B + v_B) + (C + v_C) - 200^g = 0 \qquad 6.3$$

Ţinând seama de (6.2),se obţine ecuaţia de condiţie a corecţiilor:

$$v_A + v_B + v_c + w = 0 \qquad 6.4$$

6.1 CAZUL GENERAL

Se consideră n mărimi $X_1, X_2, ...X_n$ pentru determinarea cărora s-au efectuat măsurători directe, găsindu-se rezultatele $l_1, l_2, ...l_n$. Presupunem că cele n necunoscute $X_1, X_2, ...X_n$, trebuie să satisfacă r relaţii de condiţie independente între ele (rezultă deci că numărul mărimilor măsurate în plus este r):

$$\begin{gathered} f_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \\ f_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \end{gathered} \qquad 6.5$$

Valorile măsurate direct $l_1, l_2, ..., l_n$ nu vor satisface riguros acest sistem, astfel încât prin înlocuirea necunoscutelor $X_1, X_2, ..., X_n$ prin $l_1, l_2, ..., l_n$ vom obţine rezultate diferite de zero:

$$\begin{gathered} f_i(l_1, l_2, ..., l_n) = w_i \\ (i = 1, 2, ...r) \end{gathered} \qquad 6.6$$

Mărimile w_i poartă denumirea de discordanţe, nepotriviri sau *termeni liberi*.

Problema care se pune este de a găsi corecţiile $v_1, v_2, ..., v_n$ care, aplicate mărimilor măsurate $l_1, l_2, ..., l_n$, să facă să dispară aceste mici discordanţe. Deci, pentru a fi satisfacut sistemul (6.6) trebuie să avem:

$$\begin{gathered} X_i = l_i + v_i \;, \\ (i = 1, 2, ...n) \end{gathered} \qquad 6.7$$

Ecuaţiile sistemului (6.5) pot fi liniare sau nu.

În primul caz considerăm că ele sunt de forma:

$$\begin{gathered} a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n + a_0 = 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_n X_n + b_0 = 0 \\ .... \\ r_1 X_1 + r_2 X_2 + ... + r_n X_n + r_0 = 0 \end{gathered} \qquad 6.8$$

Ţinând seama de relaţia 6.7, acestea devin:

$$\begin{aligned} &a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0 \\ &b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0 \\ &.. \\ &r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r = 0 \end{aligned} \qquad 6.9$$

unde:

$$\begin{aligned} &w_1 = a_1 l_1 + a_2 l_2 + ... + a_n l_n + a_0 = 0 \\ &w_2 = b_1 l_1 + b_2 l_2 + ... + b_n l_n + b_0 = 0 \\ &.. \\ &w_r = r_1 l_1 + r_2 l_2 + ... + r_n l_n + r_0 = 0 \end{aligned} \qquad 6.10$$

În cazul în care ecuaţiile sistemului 6.5 nu sunt liniare, se procedează la liniarizarea acestora. Ţinând seama că mărimile v_i sunt relativ mici, ecuaţiile se dezvoltă în serie Taylor, neglijându-se termenii de ordinul II şi superior.
Substituind relaţia 6.7 în 6.5 se obţine**:**

$$f_i\left(l_1 + v_1 ,\ l_2 + v_2 ,\ .....l_n + v_n\right) = 0 \qquad 6.11$$

Relaţie, care dezvoltată în serie Taylor conduce la**:**

$$f_i\left(l_1 ,\ l_2 ,\ .....l_n\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial l_k}\right)\cdot v_k + t = 0 \qquad 6.12$$

t reprezintă termenii de ordinul II şi superior, care se neglijează.
Făcând notaţiile:

$$f_i\left(l_1,\ l_2, ..., l_n\right) = w_i, \qquad (i = 1,\ 2, ...r)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial l_i}\right)_0 = a_i \qquad \left(\frac{\partial f_2}{\partial l_i}\right)_0 = b_i \qquad \left(\frac{\partial f_r}{\partial l_i}\right)_0 = r_i \qquad 6.13$$

se obţine:

$$\begin{aligned} &a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0 \\ &b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0 \\ &.. \\ &r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r = 0 \end{aligned} \qquad 6.14$$

Acest sistem poartă denumirea de *sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor.* Mărimea w reprezintă termenul liber al ecuaţiei de condiţie fiind în acelaşi timp valoarea ecuaţiei pentru mărimile măsurate. Această observaţie este utilă pentru calculul practic al termenului liber al ecuaţiilor de condiţie.

6.2 ECUAŢIILE NORMALE ALE CORELATELOR

În sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie (14) întrucât numărul ecuaţiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor ($r < n$), sistemul este nedeterminat, gradul de nedeterminare fiind *(n-r).*
Pentru rezolvarea problemei, deci pentru determinarea tuturor corecţiilor v_i, vom folosi metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[vv] = \min . \qquad 6.15$$
$$[pvv] = \min .$$

(în cazul măsurătorilor ponderate).
Corecţiile de determinat v_i, trebuind să satisfacă atât condiţia de minim (6.15) cât şi sistemul liniar, avem de-a face cu o problemă de *minim condiţionat*, care se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange.

6.2.1 Măsurători condiţionate de aceeaşi precizie

Funcţia Lagrange, introdusă în acest scop are forma:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, .., v_n, k_1, k_2, ..., k_r) = v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 - \\ - 2k_1(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1) - \\ - 2k_2(b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2) - \\ .... \\ - 2k_r(r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r) = \min .\end{aligned} \qquad 6.16$$

În expresia acestei funcţii, parametri k_i se numesc *multiplicatori Lagrange sau corelate Gauss.*
Punctele staţionare libere ale funcţiei se determină, anulând derivatele parţiale în număr de ($n + r$) ale funcţiei φ în raport cu $v_1, v_2, ..., v_n$, $k_1, k_2, ..., k_r$.
Punctele de extrem legate ale funcţiei (6.16) se găsesc printre punctele staţionare libere.
Efectuând derivatele parţiale ale funcţiei obţinem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = 2v_i - 2a_i k_1 - 2b_i k_2 ..... - 2r_i k_r = 0 \qquad 6.17$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0 \qquad 6.18$$

....

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r = 0$$

Sistemul (6.17) se mai poate scrie sub forma:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + ... + r_i k_r \qquad (i = 1, 2, ...n) \qquad 6.19$$

În sistemele (6.17) şi (6.18) avem *(n+r)*ecuaţii şi (*(n+r)*) necunoscute, deci se pot rezolva.
Substituind valorile corecţiilor v_i date de (6.19) în sistemul (6.18) şi efectuând calculele, rezultă:

$$a_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + ... + r_1 k_r) + a_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + ... + r_2 k_r) + ...$$
$$+ a_n(a_n k_1 + b_n k_2 + .. + r_n k_r) + w_1 = 0$$

....

$$r_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + ... + r_1 k_r) + r_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + ... + r_2 k_r) + ...$$
$$+ r_n(a_n k_1 + b_n k_2 + ... + r_n k_r) + w_r = 0$$

sau

$$a_1 a_1 k_1 + a_1 b_1 k_2 + ... + a_1 r_1 k_r + a_2 a_2 k_1 + a_2 b_2 k_2 + ... + a_2 r_2 k_r + ... + a_n a_n k_1 + a_n b_n k_2$$
$$+ ... + a_n r_n k_r + w_1 = 0$$

$$a_1 b_1 k_1 + b_1 b_1 k_2 + ... + b_1 r_1 k_r + a_2 b_2 k_1 + b_2 b_2 k_2 + ... + b_2 r_2 k_r + ... + a_n b_n k_1 + b_n b_n k_2$$
$$+ ... + b_n r_n k_r + w_2 = 0$$

$$a_1 r_1 k_1 + b_1 r_1 k_2 + ... + r_1 r_1 k_r + a_2 r_2 k_1 + b_2 r_2 k_2 + ... + r_2 r_2 k_r + ... + a_n r_n k_1 + b_n r_n k_2$$
$$+ ... + r_n r_n k_r + w_r = 0$$

Trecând la sumele Gauss se va obţine:

$$\begin{aligned}
&[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + \ldots\ldots + [ar]\,k_r + w_1 = 0 \\
&[ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + \ldots\ldots + [br]\,k_r + w_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[ar]\,k_1 + [br]\,k_2 + \ldots\ldots + [rr]\,k_r + w_r = 0
\end{aligned} \qquad 6.20$$

Sistemul(6.20) având r ecuaţii liniare şi r necunoscute, reprezintă *sistemul normal al corelatelor.*

Matricea sistemului normal al corelatelor fiind simetrică şi pozitiv definită, are inversă. Deci, sistemul are soluţie şi aceasta este unică.

Rezolvând sistemul cu una din metodele cunoscute se determină corelatele $k_1, k_2, ..., k_r$.

Introducând valorile găsite pentru corelatele k în sistemul (6.19), se determină valorile cele mai probabile ale corecţiilor v. Aceste corecţii se aplică apoi mărimilor măsurate direct, l_i conform relaţiei:

$$X_i = l_i + v_i\,,$$

rezultând valorile compensate ale mărimilor X_i.

6.2.1.1 Calculul practic al coeficienţilor ecuaţiilor normale

Pornind de la un sistem format din 3 ecuaţii de condiţie a corecţiilor:

$$\begin{aligned}
&a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + w_1 = 0 \\
&b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + w_2 = 0 \\
&c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n + w_3 = 0
\end{aligned} \qquad 6.21$$

sistemul normal al corelatelor va fi:

$$\begin{aligned}
&[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0 \\
&[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 = 0 \\
&[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 = 0
\end{aligned} \qquad 6.22$$

Deducerea practică a coeficienţilor ecuaţiilor din sistem cât şi calculele de control respective, este arătată în tabelul de mai jos:

Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor

Nr. crt.	a_i	b_i	c_i	S_i	Notaţii şi controale
1 2 .... n	a_1 a_2 ....a_n	b_1 b_2 .... b_n	c_1 c_2 .... c_n	S_1 S_2 .... S_n	$S_1 = a_1 + b_1 + c_1$ $S_2 = a_2 + b_2 + c_2$ .... $S_n = a_n + b_n + c_n$
Σ	*[a]*	*[b]*	*[c]*	Σ *[S]*	Σ = *[a]*+*[b]*+*[c]* = *[S]*

Tabelul coeficienţilor sistemului normal

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[aS]$	$[aS] = [aa] + [ab] + [ac]$
	$[bb]$	$[bc]$	$[bS]$	$[bS] = [ab] + [bb] + [bc]$
		$[cc]$	$[cS]$	$[cS] = [ac] + [bc] + [cc]$

6.2.2 Măsurători condiţionate de precizii diferite (ponderate)

În acest caz ca şi în situaţia măsurătorilor de aceeaşi precizie, corecţiile v_i ce urmează a fi determinate, trebuie să satisfacă atât condiţia $[pvv] = \min$. cât şi sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor (6.14):
Este deci tot o problemă de minim condiţionat.
Funcţia Lagrange în acest caz va fi de tipul:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, ..., v_n, k_1, k_2, ..., k_r) = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + ... + p_n v_n^2 - \\ - 2k_1(a_1 v_1 + a\ v_2 + ... + a_n v_n + w_1) \\ - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2) \\ .... \\ - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r) = \min.\end{aligned} \qquad 6.23$$

Efectuând derivatele parţiale în raport cu v şi k şi punând de asemenea condiţia ca acestea să fie nule, se obţine:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = 2 p_i v_i - 2 a_i k_1 - 2 b_i k_2 ..... - 2 r_i k_r = 0 \qquad 6.24$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0$$

$$sau: \ [av] + w_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \qquad 6.25$$

$$sau: [bv] + w_2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + w_r = 0$$

$$sau: [rv] + w_r = 0$$

Ecuaţiile (6.24) mai pot fi scrise sub forma:

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_1 + b_i k_2 + \ldots + r_i k_r\right), \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad 6.26$$

Relaţiile (6.25) şi (6.26) formează un sistem de $(n+r)$ ecuaţii cu $(n+r)$ necunoscute. Pentru a elimina o parte din necunoscute se substituie necunoscutele v_i din (6.24) în (6.25). Efectuând calculele şi grupând convenabil termenii se obţine sistemul normal al corelatelor în cazul ponderat:

$$\frac{a_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r\right) + \frac{a_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r\right) + \ldots$$

$$+ \frac{a_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + \ldots + r_n k_r\right) + w_1 = 0$$

$$\frac{b_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r\right) + \frac{b_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r\right) + \ldots$$

$$+ \frac{b_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + \ldots + r_n k_r\right) + w_2 = 0$$

....

$$\frac{r_1}{p_1}\left(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots + r_1 k_r\right) + \frac{r_2}{p_2}\left(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + r_2 k_r\right) + \ldots$$

$$+ \frac{r_n}{p_n}\left(a_n k_1 + b_n k_2 + \ldots + r_n k_r\right) + w_r = 0$$

Efectuând calculele:

$$\frac{a_1a_1}{p_1}k_1 + \frac{a_1b_1}{p_1}k_2 + ... + \frac{a_1r_1}{p_1}k_r + \frac{a_2a_2}{p_2}k_1 + \frac{a_2b_2}{p_2}k_2 + ... + \frac{a_2r_2}{p_2}k_r + ...$$
$$+ \frac{a_na_n}{p_n}k_1 + \frac{a_nb_n}{p_n}k_2 + ... + \frac{a_nr_n}{p_n}k_r + w_1 = 0$$

$$\frac{a_1b_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1b_1}{p_1}k_2 + .. + \frac{b_1r_1}{p_1}k_r + \frac{a_2b_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2b_2}{p_2}k_2 + ... + \frac{b_2r_2}{p_2}k_r + ...$$
$$+ \frac{a_nb_n}{p_n}k_1 + \frac{b_nb_n}{p_n}k_2 + ... + \frac{b_nr_n}{p_n}k_r + w_2 = 0$$

....

$$\frac{a_1r_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1r_1}{p_1}k_2 + ... + \frac{r_1r_1}{p_1}k_r + \frac{a_2r_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2r_2}{p_2}k_2 + ... + \frac{r_2r_2}{p_2}k_r + ...$$
$$+ \frac{a_nr_n}{p_n}k_1 + \frac{b_nr_n}{p_n}k_2 + ... + \frac{r_nr_n}{p_n}k_r + w_r = 0$$

Trecând la notaţiile Gauss, vom obţine forma sistemului normal al corelatelor în cazul ponderat:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_1 = 0\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_2 = 0\\
&\quad ....\\
&\left[\frac{ar}{p}\right]k_1 + \left[\frac{br}{p}\right]k_2 + ... + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0
\end{aligned} \qquad 6.27$$

Acest sistem se poate rezolva, matricea ataşată fiind nesingulară ($\Delta \neq 0$).
Soluţiile obţinute (corelatele k) permit determinarea celorlalte necunoscute (corecţiile v) din (6.26).
În cazul sistemelor mici, determinarea coeficienţilor sistemului normal al corelatelor se face conform următoarelor tabele:

Tabelul coeficienţilor ecuaţiilor de corecţie şi al ponderilor

Nr. crt.	$1/p_i$	a_i	b_i	c_i	S_i	Control
1	$1/p_1$	a_1	b_1	c_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + c_1$
2	$1/p_2$	a_2	b_2	c_2	S_2	$S_2 = a_2 + b_2 + c_2$
.....	.....	.....	.....	....	....	....
n	$1/p_n$	a_n	b_n	c_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + c_n$
Σ	-	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[S]$ / Σ	$\Sigma = [a]+[b]+[c] = [S]$

Tabelul coeficienţilor sistemului normal

$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{aS}{p}\right]$	$\left[\frac{aS}{p}\right] = \left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right]$
	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bS}{p}\right]$	$\left[\frac{bS}{p}\right] = \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{bb}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right]$
		$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cS}{p}\right]$	$\left[\frac{cS}{p}\right] = \left[\frac{ac}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \left[\frac{cc}{p}\right]$

6.3 REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII NORMALE ALE CORELATELOR

Metodele de rezolvare a acestor sisteme sunt aceleaşi ca la rezolvarea sistemelor normale de la măsurătorile indirecte.

Necunoscutele x_i de la măsurătorile indirecte devin corelatele k_i, iar termenii liberi $[al]$, $[bl]$, etc . devin w_1, w_2, etc.
Schema Gauss redusă pentru rezolvarea unui sistem de 3 ecuaţii, spre exemplu, are următoarea formă:

k_1	k_2	k_3	w	S	*Control*
[aa]	[ab]	[ac]	w_1	S_1	-
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-w_1/[aa]$	$-S_1/[aa]$	control
$k_1=\ldots\ldots$	[bb]	[bc]	w_2	S_2	-
	[bb.1]	[bc.1]	$[w_{2.1}]$	$[S_{2.1}]$	control
	-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[w_{2.1}]}{[bb.1]}$	$-\frac{[S_{2.1}]}{[bb.1]}$	control
	$k_2=\ldots\ldots$	[cc]	W_3	S_3	-
		[cc.2]	$[w_{3.2}]$	$[S_{3.2}]$	control
		-1	$-\frac{[w_{3.2}]}{[cc.2]}$	$-\frac{[S_{3.2}]}{[cc.2]}$	control
		$k_3=\ldots\ldots$			

Verificarea soluţiilor se face printr-o relaţie unică de forma:

$$[(S-w)\ k] = -[w] \qquad 6.28$$

Verificări de calcul

a) ***Controlul (verificarea) calculului corecţiilor:***

Relaţiile de calcul a corecţiilor sunt:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + .. + r_i k_r \quad \text{sau} \quad v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_1 + b_i k_2 + .. + r_i k_r\right)$$

Dacă se însumează toate relaţiile din primul caz se obţine:

$$[v] = [a]k_1 + [b]k_2 + ... + [r]k_r \qquad 6.29$$

sau, pentru al doilea caz:

$$[pv] = [a]k_1 + [b]k_2 + ... + [r]k_r \qquad 6.30$$

Acestea constituie cele două relaţii de control pentru calculul corect al corecţiilor.

În afară de acestea, este necesar ca aceste corecţii v_i să satisfacă ecuaţiile liniare de condiţie a corecţiilor:

$$\begin{aligned} & a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0 \\ & b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0 \\ & \quad .... \\ & r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r = 0 \end{aligned} \qquad 6.31$$

b) Verificarea liniarizării şi a calculului termenilor liberi

c) Verificarea rezolvării sistemului normal al corelatelor

În faza de reducere la forma triunghiulară, controlul se face pe rânduri, aşa cum se arată în schema Gauss.
Pentru verificarea deducerii corecte a corelatelor k_i, acestea pot fi introduse în ecuaţiile sistemului normal pe care trebuie să le satisfacă în limita preciziei de calcul, sau, mai economic, prin relaţia unică: [($S - w$) k] = - [w].

d) Verificarea calculării sumei pătratelor corecţiilor

$$[pvv] = -[kw]$$

e) Controlul principal al compensării

Se aplică mărimilor măsurate l_i, corecţiile v_i, adică :

$$X_i = l_i + v_i,$$

şi acestea se introduc în ecuaţiile de corecţie iniţiale pe care trebuie să le satisfacă.
Dacă nu se întâmplă acest lucru, înseamnă că liniarizarea nu s-a făcut corect (deci, unii coeficienţi sunt greşiţi) sau termenii liberi nu au fost corect stabiliţi.

O particularitate a compensării prin metoda măsurătorilor condiţionate, o constituie faptul că în cazul întocmirii sau liniarizării greşite a unei (unor) ecuaţii, deşi corecţiile obţinute în urma compensării nu sunt cele juste, se verifică toate ecuaţiile de condiţie, cu excepţia celor greşit întocmite.
Această particularitate ne ajută să localizăm greşeala, deci să o depistăm mai uşor.
Dacă doar termenul liber al unei (unor) ecuaţii a fost stabilit greşit - numai ca semn - atunci, în controlul final, în loc de a se anula discordanţa respectivă, ea se dublează.

f) Obţinerea unui ordin de mărime uniform al coeficienţilor ecuaţiilor normale

În cazul în care coeficienţii unei (unor) ecuaţii liniare de condiţie a corecţiilor sunt prea mari (mici), aceştia pot fi multiplicaţi cu o astfel de valoare numerică, încât coeficienţii obţinuţi să fie de acelaşi ordin de mărime cu coeficienţii celorlalte ecuaţii. Se va avea însă grijă să fie multiplicat şi termenul liber al ecuaţiei respective, cu acelaşi coeficient. Se va obţine astfel o matrice a coeficienţilor mai bine conformată, propagarea erorilor de calcul fiind în acest caz mai favorabilă.

Corecţia corespunzătoare ecuaţiei care a fost multiplicată cu un anumit coeficient, va rezulta împărţită cu acest coeficient. Corecţiile v_i pot fi calculate cu aceşti coeficienţi şi corelate transformate, fără a mai reveni la cei iniţiali, întrucât rezultatul este acelaşi:

Presupunem că am multiplicat cu coeficientul α ecuaţia 1, adică:

$$\alpha \cdot (a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1) = 0$$

În urma rezolvării sistemului normal, corelata corespunzătoare primei ecuaţii va rezulta:

$$k_1^{'} = \frac{k_1}{\alpha}$$

Corecţiile v_i se calculează apoi cu relaţia:

$$v_i = a_i k_1^{'} + b_i k_2^{'} + ... + r_i k_r^{'}$$

sau, în cazul de mai sus:

$$v_i = a_i \alpha \frac{k_1}{\alpha} + b_i \alpha \frac{k_2}{\alpha} + ... + r_i \alpha \frac{k_r}{\alpha}$$

adică: $v_i = a_i\, k_1 + b_{\,i} k_2 + ... + r_i k_r$

Dacă în ecuaţiile de condiţie numai neînchiderile (termenii liberi) sunt mult mai mari sau mult mai mici decât coeficienţii ecuaţiilor, atunci aceştia se pot înmulţi cu o constantă convenabil aleasă.

g) Stabilirea numărului incorect al ecuaţiilor de condiţie

► dacă s-a omis una sau mai multe ecuaţii de condiţie, compensarea se poate face formal. În acest caz valorile compensate $l_i + v_i$ care se obţin, nu vor îndeplini toate condiţiile care trebuie să fie impuse. Compensarea este în acest caz incompletă şi este necesar să fie refăcută, după completarea cu ecuaţiile omise.

► dacă se introduc ecuaţii de condiţie în plus, atunci acestea nu sunt independente. Determinantul coeficienţilor ecuaţiilor normale va fi nul, iar corelatele aferente ecuaţiilor în plus, nedeterminate (de forma $\frac{0}{0}$).

6.4 COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR ETEROGENE

Dacă mai multe mărimi de natură diferită (unghiuri, lungimi, diferenţe de nivel) urmează a fi compensate în comun , problema se poate trata în două moduri:

- se calculează corecţiile omogenizate, care sunt adimensionale şi neponderate. Omogenizarea corecţiilor se obţine dacă se împart relaţiile care dau corecţiile în funcţie de corelate cu erorile unităţilor de pondere, adică:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + ... + r_i k_r$$

$$(i = 1.....n)$$

$$\frac{v'}{\mu'} \;,\; \frac{v''}{\mu''}$$

- se ţine seama că în cazul ponderilor $p' = \frac{const.}{\mu'^2}$, $p'' = \frac{const.}{\mu''^2}$

folosindu-se întotdeauna aceeaşi constantă.

Unitatea de măsură pentru μ va fi aceeaşi ca cea pentru v şi respectiv w.

Observaţie:

Accentul ’şi ” desemnează o anumită natură de măsurători**.**

6.4.1 Transformarea măsurătorilor condiţionate în indirecte şi invers

6.4.1.1 Trecerea de la măsurători condiţionate la măsurători indirecte

Fie sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor:

$$\begin{aligned}
&a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1 = 0\\
&b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2 = 0\\
&...\\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r = 0
\end{aligned} \qquad 6.32$$

Din acest sistem de r ecuaţii cu n necunoscute ($r < n$), putem exprima primele r corecţii în funcţie de celelalte (n-r). Dacă vom nota cele (n-r) corecţii cu $x_1, x_2, ..., x_n$ se va obţine:

$$\begin{aligned}
v_1 &= A_1 x_1 + B_1 x_2 + ... + U_1 x_u + L_1\\
v_2 &= A_2 x_1 + B_2 x_2 + ... + U_2 x_u + L_2\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_r &= A_r x_1 + B_r x_2 + ... + U_r x_u + L_r\\
v_{r+1} &= x_1\\
v_{r+2} &= \qquad x_2\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= \qquad\qquad\qquad x_u
\end{aligned} \qquad 6.33$$

Am obţinut deci un sistem de n ecuaţii cu u necunoscute [u =(n - r)] care se tratează identic ca la capitolul de măsurători indirecte.

6.4.1.2 Trecerea de la măsurători indirecte la măsurători condiţionate

Trecerea se realizează în modul următor:

- se elimină în anumite condiţii cele u necunoscute din sistemul liniar al ecuaţiilor de corecţie printr-o metodă oarecare, rămânând încă (n - u) ecuaţii, numai în funcţie de corecţiile v care se consideră ca ecuaţii de condiţie.

Observaţii:
Deşi transformările sunt posibile în ambele sensuri, acestea nu se recomandă a fi efectuate, trebuind să se stabilească de la început metoda prin care se urmăreşte să se facă compensarea, rezultatele fiind însă aceleaşi. Un criteriu de alegere îl constituie numărul de ecuaţii normale rezultate.
Mijloacele moderne de calcul au schimbat optica, preferându-se metoda măsurătorilor indirecte, care se pretează la un grad mai mare de automatizare.

6.5 EVALUAREA PRECIZIEI ÎN CAZUL MĂSURĂTORILOR CONDIŢIONATE

- *Eroarea medie pătratică a unei mărimi măsurate*

Din reducerea sistemului (6.32 la sistemul de măsurători indirecte (6.33), rezultă pentru calculul erorii medii pătratice a unei mărimi măsurate:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-(n-r)}} \quad \text{adică,}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \qquad 6.34$$

unde, $[vv]$ reprezintă suma pătratelor erorilor aparente, iar r este numărul măsurătorilor efectuate în plus, sau numărul gradelor de libertate ale reţelei.

- *Eroarea medie pătratică a unităţii de pondere*

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \qquad 6.35$$

unde, p reprezintă ponderea, adică gradul de încredere pe care îl avem în determinarea respectivă.

Suma pătratelor corecţiilor se va calcula, pentru control, în dublu mod:

- în sistemul:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + ... + r_i k_r \qquad 6.36$$

se calculează individual fiecare corecţie, se ridică la pătrat şi apoi se face suma acestora, rezultând $[vv]$.

- calculul sumei $[vv]$ în funcţie de corelate:

Multiplicând ecuaţiile sistemului (6.36) cu $v_1, v_2, ..., v_n$ şi însumând se obţine:

$$[vv] = [av]k_1 + [bv]k_2 + ... + [rv]k_r \qquad 6.37$$

dar, din sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corelatelor avem:

$$[av] = -w_1 \quad ; \quad [bv] = -w_2 \quad ; \; .....; \quad [rv] = -w_r$$

Înlocuind aceste valori în (6.37) rezultă:

$$[vv] = -[kw] \qquad 6.38$$

Această relaţie se poate calcula foarte simplu cu ajutorul schemei Gauss.

- calculul sumei $[vv]$cu ajutorul algoritmilor Gauss:

Vom considera 3 ecuaţii normale scrise sub formă redusă:

$$\begin{aligned}
&[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0 \\
&\qquad\qquad [bb.1]k_2 + [bc.1]k_3 + (w_2.1) = 0 \\
&.. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad [cc.2]k_3 + (w_3.2) = 0
\end{aligned} \qquad 6.39$$

Expresiile corelatelor deduse din acest sistem vor fi:

$$\begin{aligned}
k_3 &= -\frac{(w_3.2)}{[cc.2]} \\
k_2 &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}k_3 - \frac{[w_2.1]}{[bb.1]} \\
k_1 &= -\frac{[ab]}{[aa]}k_2 - \frac{[ac]}{[aa]}k_3 - \frac{w_1}{[aa]}
\end{aligned} \qquad 6.40$$

Relaţia unică de control $[vv] = -[kw]$ o vom scrie pentru cazul a trei ecuaţii:

$$[vv] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - k_3 w_3 \qquad 6.41$$

Înlocuind în (6.41 corelata k_1 dată de (6.40) se obţine:

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} - \left\{ w_2 - \frac{[ab]}{[aa]} w_1 \right\} k_2 - \left\{ w_3 - \frac{[ac]}{[aa]} w_1 \right\} k_3$$

sau, folosind notaţiile Gauss (algoritmii de ordinul II):

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} - [w_2.1]k_2 - [w_3.2]k_3 \qquad 6.42$$

Se înlocuieşte în continuare k_2 dat de (6.40) :

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]}{[bb.1]} - \left\{ [w_3.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [w_2.1] \right\} k_3$$

$$sau \qquad 6.43$$

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]}{[bb.1]} - [w_3.1]k_3$$

Înlocuind mai sus şi corelata k_3, se obţine:

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} \qquad 6.44$$

Această relaţie exprimă suma pătratelor corecţiilor în funcţie de algoritmii Gauss. Aceasta se poate calcula direct din schema Gauss.

- *Eroarea medie pătratică individuală*

$$m_i = \pm \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n \cdot p_i}} \qquad 6.45$$

- *Eroarea medie pătratică a necunoscutelor*

$$m_x = \pm m \sqrt{Q_{xx}}\ , \qquad 6.46$$

unde: Q_{xx} reprezintă coeficientul de pondere aferent necunoscutei şi se obţine direct din schema Gauss.

6.6 APLICAŢIE PRACTICĂ

Să se compenseze unghiurile unui triunghi plan şi să se deducă precizia lor după compensare, cunoscându-se din măsurători de aceeaşi precizie următoarele valori medii:

$$\alpha^{'} = 47^{g}15^{c}17^{cc}$$

$$\beta^{'} = 73^{g}43^{c}50^{cc}$$

$$\gamma^{'} = 794145^{cc}$$

Rezolvare

Neînchiderea unghiulară va fi egală cu:

$$w = \alpha^{'} + \beta^{'} + \gamma^{'} - 200^{g} = +12^{cc}$$

Ecuaţia de condiţie a figurii este:

$$\alpha + \beta + \gamma - 200^{g} = 0$$

Dar:

$\alpha = \alpha^{'} + v_{\alpha}$

$\beta = \beta^{'} + v_{\beta}$

$\gamma = \gamma^{'} + v_{\gamma}$

Deci, se poate scrie ecuaţia de condiţie finală:

$$v_{\alpha} + v_{p} + v_{\gamma} + 12^{cc} = 0$$

Având o singură ecuaţie de condiţie → vom avea o singură corelată *k*, deci sistemul de ecuaţii normale ale corelatelor se va reduce şi el la o singură ecuaţie normală şi anume:

$$[aa]k + w = 0$$

adică:

$$3k + 12^{cc} = 0 \rightarrow k = -4^{cc}$$

Aplicând formulele generale ale corecţiilor în funcţie de corelate avem:

$v_1 = a_1 k$
$v_2 = a_2 k$
$v_3 = a_3 k$

şi obţinem:

$$v_1 = k = -\frac{w}{3}$$
$$v_2 = k = -\frac{w}{3}$$
$$v_3 = k = -\frac{w}{3}$$

Deci: $v_1 = v_2 = v_3 = -4^{cc}$

Controlul corecţiilor se face folosind relaţia:

$$[vv] = -[k \cdot w]$$
$$48 = -(-4 \cdot 12)$$
$$48 = 48$$

Valorile compensate ale unghiurilor triunghiului plan vor fi:

$$\alpha = \alpha' + v_\alpha = 47.15.13$$
$$\beta = \beta' + v_\beta = 73.43.46$$
$$\gamma = \gamma' + v_\gamma = 79.41.41$$

Control: $\alpha + \beta + \gamma = 200^g.00.00$

Precizia este dată de:

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm\sqrt{\frac{[w]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{48}{1}} = \pm 6^{cc},9$$

6.7. EROAREA UNEI FUNCŢII DE MĂRIMI CONDIȚIONATE COMPENSATE

Se consideră funcţia:

$$F = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n \qquad 6.47$$

în care f_i sunt constante, iar x_i sunt valorile probabile ale mărimilor compensate.
Se cere să se determine eroarea medie pătratica a acestei funcţii.
Nu este posibilă aplicarea formulei erorii unei funcţii sub forma:

$$m_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial M_1}\right)_0^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial M_2}\right)_0^2 \cdot m_2^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial M_n}\right)_0^2 \cdot m_n^2 \qquad 6.48$$

dată de legea de propagare a erorilor, deoarece mărimile x_i nu sunt independente ($X_i = l_i + v_i$), iar corecţiile v_i sunt deasemenea dependente între ele, depinzând de mărimile măsurate direct l_i, mărimi care la rândul lor sunt independente.
De aceea, va fi necesar ca aceste corecţii să fie exprimate în functie de l_i.
Dependenţa între corecţiile v_i şi termenii k_i este exprimată prin relaţiile:

$$v_i = a_ik_1 + b_ik_2 + c_ik_3 \qquad 6.49$$

în cazul unui sistem cu trei necunoscute.
Deci:

$$v_i = v_i(k_1, k_2, k_3) \qquad 6.50$$

La rândul lor, corelatele k_i sunt funcţie de discordanţele ω_i:

$$\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 &= 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 &= 0 \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cr]k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned} \qquad 6.51$$

adică:

$$k_i = k_i(w_1, w_2, w_3) \qquad 6.52$$

Conform relaţiei (6.10),

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1l_1 + a_2l_2 + ... + a_nl_n + a_0 = 0 \\ w_2 &= b_1l_1 + b_2l_2 + ... + b_nl_n + b_0 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_r &= r_1l_1 + r_2l_2 + ... + r_nl_n + r_0 = 0 \end{aligned} \qquad 6.53$$

care se mai poate scrie şi sub forma:

$$\begin{gathered} w_1 = [al] + a_0 \\ w_2 = [bl] + b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_3 = [cl] + c_0 \end{gathered} \qquad 6.54$$

Rezultă că aceste corelate k_i sunt funcţie de termenii liberi l_i.
Dacă în funcţia iniţiala (6.47) se introduc valorile mărimilor x_i date de ($X_i = l_i + v_i$), se obţine:

$$F = f_1(l_1 + v_1) + f_2(l_2 + v_2) + \ldots.. + f_n(l_n + v_n) \qquad 6.55$$

sau:

$$F = [f\ l] + [f\ v] \qquad 6.56$$

Corecţiile v_i date de relaţia (6.49) şi înlocuite în (6.56) conduc la expresia:

$$F = [fl] + [af]k_1 + [bf]k_2 + [cf]k_3 + \ldots.. \qquad 6.57$$

Pentru exprimarea dependenţei dintre corecţiile v_i şi termenii l_i se va folosi *metoda coeficienţilor auxiliari nedeterminaţi* (calculele făcute în mod direct fiind foarte laborioase).

Astfel:
înmulţim prima ecuaţie a sistemului normal (6.51) cu coeficientul auxiliar q_1, a doua ecuaţie cu q_2, iar a treia cu q_3 şi le adunăm apoi cu relaţia (6.57):

$$\begin{aligned} [aa]\, q_1 k_1 + [ab] q_1 k_2 + [ac]\, q_1 k_3 + q_1 w_1 = 0 \\ [ab] q_2 k_1 + [bb] q_2 k_2 + [bc] q_2 k_3 + q_2 w_2 = 0 \\ [ac]\, q_3 k_1 + [bc]\, q_3 k_2 + [cr]\, q_3 k_3 + q_3 w_3 = 0 \end{aligned} \qquad 6.58$$

$$+ [fl] + [af]k_1 + [bf]k_2 + [cf]k_3 + \ldots..$$

Asupra coeficienţilor auxiliari putem face următoarele combinaţii, astfel încât:

$$\begin{aligned} [aa]\, q_1 + [ab]\, q_2 + [ac]\, q_3 + [af] = 0 \qquad & \Rightarrow coeficient\ ul\ lui\ k_1 \\ [ab]\, q_1 + [bb]\, q_2 + [bc]\, q_3 + [bf] = 0 \qquad & \Rightarrow coeficient\ ul\ lui\ k_2 \\ [ac]\, q_1 + [bc]\, q_2 + [cc]\, q_3 + [cf] = 0 \qquad & \Rightarrow coeficient\ ul\ lui\ k_3 \end{aligned} \qquad 6.59$$

În acest fel relaţia (6.57) devine:

$$F = [fl] + w_1 q_1 + w_2 q_2 + w_3 q_3 ..... \qquad 6.60$$

Substituind valorile neânchiderilor w_i, se obţine :

$$F = [fl] + q_1 \{[al] + a_0\} + q_2 \{[bl] + b_0\} + q_3 \{[cl] + c_0\} \qquad 6.61$$

Dând factor comun termenul l_i, rezultă:

$$F = [(f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3) l_i] + q_1 a_0 + q_2 b_0 + q_3 c_0 \qquad 6.62$$

Notând: $f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 = g_i$ 6.63

$$q_1 a_0 + q_2 b_0 + q_3 c_0 = g_0 \qquad 6.64$$

Rezultă:

$$F = [gl] + g_0 \qquad 6.65$$

Acestei relaţii i se poate aplica formula erorii unei funcţii, deoarece mărimile l_i sunt independente:

$$m_F^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial l_i} \right)^2 \cdot m_{l_i}^2 \qquad 6.66$$

Ţinând seama că $\frac{\partial F}{\partial l_i} = g_i$ şi considerând măsurătorile de aceeaşi precizie, adică, $m_{l_1} = m_{l_2} = ... = m_{l_n} = m$,

rezultă:

$$m_F = \pm m \sqrt{Q_{FF}} \qquad 6.67$$

sau:

$$\frac{m_F^2}{m^2} = Q_{FF} = [gg] \qquad 6.68$$

Trebuie deci să ridicăm la pătrat relaţiile (6.63) şi să le însumăm:

$$\begin{aligned} Q_{FF} = [gg] = [ff] + [aa] q_1^2 + [bb] q_2^2 + [cc] q_3^2 + \\ + 2[af] q_1 + 2[bf] q_2 + 2[cf] q_3 + 2[ab] q_1 q_2 \\ + 2[ac] q_1 q_3 + 2[bc] q_2 q_3 \end{aligned} \qquad 6.69$$

sau

$$
\begin{aligned}
Q_{FF} &= [ff] + q_1\{[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + [af]\} + \\
&+ q_2\{[ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + [bf]\} + \\
&+ q_3\{[ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + [cf]\} + \\
&+ [af]q_1 + [bf]q_2 + [cf]q_3
\end{aligned}
\qquad 6.70
$$

Dacă în relatia (6.70) se ţine seama de condiţiile impuse pentru determinarea coeficienţilor auxiliari (6.59), rezultă:

$$Q_{FF} = [ff] + [af]q_1 + [bf]q_2 + [cf]q_3 \qquad 6.71$$

Urmează a se substitui în (6.71) valorile coeficienţilor q_i, deduşi din sistemul (6.59), sistem pe care îl vom scrie sub forma redusă:

$$
\begin{aligned}
[aa]\,q_1 + [ab]\,q_2 + [ac]\,q_3 + [af] &= 0 \\
[bb.1]\,q_2 + [bc.1]\,q_3 + [bf.1] &= 0 \\
[cc.2]\,q_3 + [cf.2] &= 0
\end{aligned}
\qquad 6.72
$$

Din acest sistem rezultă:

$$
\begin{aligned}
q_3 &= -\frac{[cf.2]}{[cc.2]} \\
q_2 &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}q_3 - \frac{[bf.1]}{[bb.1]} \\
q_1 &= -\frac{[ab]}{[aa]}q_2 - \frac{[ac]}{[aa]}q_3 - \frac{[af]}{[aa]}
\end{aligned}
\qquad 6.73
$$

Înlocuind (6.73) în (6.72) şi ţinând seama de expresiile algoritmilor Gauss se obţine :

$$Q_{FF} = [ff.3] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]}{[bb.1]} - \frac{[cf.2]}{[cc.2]} \qquad 6.74$$

O altă metodă de determinare a coeficientului de pondere Gauss este următoarea:

- dacă în sistemul (6.59) notăm:

$$N = \begin{Vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{Vmatrix} \quad ; q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Vmatrix} \quad ; \quad B = \begin{Vmatrix} a_f \\ b_f \\ c_f \end{Vmatrix} \qquad 6.75$$

sistemul se va scrie sub formă matricială:

$$Nq + B = 0 \qquad 6.76$$

Din acest sistem rezultă:

$$q^{-1} = -N^{-1}B = QB \qquad 6.77$$

Observaţii:

- Mărimile măsurate şi cele compensate se deosebesc prin aceea că mărimile măsurate sunt independente (aşa au fost considerate în acest capitol), iar mărimile compensate sunt dependente (în matricea de varianţă - covarianţă, coeficienţii dreptunghiulari sunt diferiţi de zero)
- În cazul în care nu ar fi fost efectuată o compensare, coeficientul de pondere al funcţiei: $F = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n$ ar fi fost doar $Q_{FF} = [ff]$.

Ceilalţi termeni care apar în relaţia (6.74) reprezintă influenţa compensării.
Inversa ponderii şi deci eroarea medie pătratică devine mai mică însă prin compensare deci, se obţine o precizie mai bună.

6.8 TRATAREA MATRICIALĂ A MĂSURĂTORILOR CONDIŢIONATE

Considerăm sistemul liniar al ecuaţiilor de condiţie a corecţiilor:

$$\begin{aligned} &a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + w_1 = 0 \\ &b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n + w_2 = 0 \\ &.. \\ &r_1v_1 + r_2v_2 + ... + r_nv_n + w_r = 0 \end{aligned} \qquad 6.78$$

Se fac următoarele notaţii:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ r_1 & r_2 & ... & r_n \end{Vmatrix} \quad ; V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{Vmatrix} \quad ; \quad W = \begin{Vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ ... \\ W_r \end{Vmatrix} \qquad 6.79$$

Sistemul se va scrie matricial sub forma:

$$AV + W = 0 \qquad 6.80$$

Deoarece numărul ecuaţiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor, pentru rezolvarea problemei se va folosi metoda celor mai mici pătrate, adică $[vv]$ = min. în cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie şi $[pvv]$ = min. în cazul măsurătorilor ponderate.
Aceste condiţii sunt exprimate matricial astfel:

$$[vv] = V^T V$$
$$[pvv] = V^T p\, V \qquad 6.81$$

în care matricea p are forma:

$$p = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{Vmatrix} \qquad 6.82$$

Având o problemă de minim condiţionat, funcţia Lagrange introdusă va fi de forma:

a) cazul măsurătorilor de aceeaşi precizie

$$\varphi = V^T V - 2k^T (AV + W) = \min. \qquad 6.83$$

derivată din:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, .., v_n, k_1, k_2, ..., k_r) = {} & v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2 - \\ & - 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + w_1) - \\ & - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2) - \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r)\end{aligned}$$

Pentru a determina minimul funcţiei, trebuie ca:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial k^T} = 0 \qquad 6.84$$

Efectuând derivatele parţiale se obţine:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = V + (V^T)^T - (2k^T A)^T = 0$$
$$2V - 2A^T k = 0 \qquad 6.85$$
$$V = A^T k$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k^T} = -2(AV + W) = 0 \qquad \Rightarrow \quad AV + W = 0 \qquad 6.86$$

dacă în relaţia (6.86) ţinem seama de (6.85):

$$AA^T k + W = 0 \qquad 6.87$$

Relaţia (6.87) reprezintă *sistemul normal scris sub formă matricială*.
Rezolvarea sistemului impune efectuarea următoarelor notaţii:

$$AA^T = N \qquad 6.88$$

deci:

$$Nk + W = 0 \qquad 6.89$$

Înmulţim la stânga cu N^{-1} şi ţinem seama că $N^{-1}N = E$ (matricea unitate):

$$N^{-1}Nk + N^{-1}W = 0 \qquad 6.90$$

Rezultă:

$$k = -N^{-1}W \qquad 6.91$$

Revenim la relaţia (6.85) unde, $V = A^T k$
Înlocuind valorile corelatelor k din (6.91), rezultă:

$$V = -A^T N^{-1} W \qquad 6.92$$

Cu ajutorul acestei formule se determină corecţiile v şi mai departe valorile compensate

$$X_i = l_i + v_i \qquad 6.93$$

b) cazul măsurătorilor ponderate

Pornim de la condiţia de minim impusă de metoda celor mai mici pătrate:

$$V^T p\, V = min. \qquad 6.94$$

Funcţia Lagrange în acest caz va avea forma:

$$\phi = V^T p\, V - 2k^T (AV + W) = \min \qquad 6.95$$

derivată din:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, v_2, ..., v_n, k_1, k_2, ..., k_r) = {} & p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + ... + p_n v_n^2 - \\ & - 2k_1(a_1 v_1 + a\ v_2 + ... + a_n v_n + w_1) \\ & - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n + w_2) \\ & \quad .... \\ & - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n + w_r)\end{aligned}$$

Condiţia de minim implică:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = 0 \qquad ; \frac{\partial \phi}{\partial K^T} = 0 \qquad 6.96$$

Efectuând derivatele parţiale obţinem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = pV + (V^T p)^T - 2(K^T A)^T = 0$$

$$2pV - 2A^T k = 0 \qquad 6.97$$

$$p^{-1} pV = A^T k$$

$$p^{-1} pV = p^{-1} A^T k$$

de unde:

$$V = p^{-1} A^T k \qquad 6.98$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k^T} = -2(AV + W) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad AV + W = 0 \qquad 6.99$$

Înlocuind pe V din relaţia (6.98) în (6.99) obţinem *sistemul normal* sub forma:

$$A p^{-1} A^T k + W = 0 \qquad 6.100$$

Notăm $A p^{-1} A^T = N$ 6.101

deci: $N k + W = 0$ 6.102

Înmulţim la stânga tot sistemul cu N^{-1}:

$$\underbrace{N^{-1} N}_{E} k + N^{-1} W = 0 \qquad 6.103$$

$$k = -N^{-1} W \qquad 6.104$$

Cu ajutorul corelatelor k se deduc apoi corecţiile din (6.98):

$$V = -p^{-1} A^T N^{-1} W \qquad 6.105$$

Mergând mai departe, se vor determina valorile compensate ale măsurătorilor:

$$X_i = l_i + v_i \qquad 6.106$$

BIBLIOGRAFIE (SELECTIV)

- BOTEZ M. - Teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate, Ed. Did.şi Ped. Bucureşti 1961
- CRISTESCU N., NEAMŢU M. ş.a. - Topografie, Editura Did.şi Pedagogică Bucureşti 1980
- DIMA N. - Teoria erorilor şi principiul celor mai mici pătrate, Editura Universităţii Tehnice, Petroşani, 1992
- DRAGOMIR V., GHIŢĂU D., MIHĂILESCU M., ROTARU M. - Teoria figurii Pământului, Editura Tehnică 1977
- FOTESCU N. - Teoria erorilor de măsurare şi metoda celor mai mici pătrate, ICB 1975
- FOTESCU N., SĂVULESCU C-tin. - Îndrumător pentru lucrări practice la teoria erorilor, ICB, 1988
- GHIŢĂU D. - Geodezie şi gravimetrie geodezică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1983
- GRECEA C. - Evaluări topo-geodezice între prezent şi viitor, Zilele academice timişene ed.VII, , Timişoara, Fac. de Hidrotehnică, 2001
- GRECEA C. - Geodezie, Ed. Mirton, Timişoara, 2005
- ***Manualul inginerului geodez, Editura Tehnică, Bucureşti 1973
- MOINEAGU C., NEGURĂ I., URSEANU V. - Statistica, Ed. Şt.şi Enciclopedică, Bucureşti 1976
- NISTOR Gh. - Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice, UT Gh. Asachi Iaşi, 1995
- NISTOR Gh. - Teoria prelucrării măsurătorilor geodezice – lucrări practice, UT Gh. Asachi Iaşi, 1998
- ***Colectiv Măsurători Terestre şi Cadastru-Facultatea de C-ţii Timişoara - Complemente de Măsurători Terestre, vol.1-2, ediţia 2006, Editura Politehnica, Timişoara, 2006