

FUNCTIILE GEODEZIEI

Până în urmă cu câteva decenii, se considera că geodezia ocupă spațiul delimitat de prima definiție dată de Helmert geodeziei și anume: „Geodezia este știința măsurării și reprezentării suprafeței Pământului.” Apoi, cei implicați în acest gen de activități au început să înțeleagă că această definiție nu reflectă în totalitate rolul pe care îl joacă geodezia contemporană și au început să caute un nou cadru. Această căutare a culminat cu noua definiție a geodeziei, și anume: *Geodezia este disciplina care se ocupă cu măsurarea și reprezentarea Pământului, inclusiv a câmpului său gravitațional, într-un spațiu tridimensional cu variație temporală.*

Ca majoritatea disciplinelor științifice, geodezia este împărțită în sub-discipline: geodezia geometrică, geodezia fizică, geodezia matematică, geodezia dinamică. Progresul științei a dat naștere, în ultimul timp, la noi destinații precum: geodezia satelitară, geodezia inerțială, geodezia maritimă, geodezia spațială și chiar geodezia orizontală și verticală. Geodezia poate fi considerată ca având trei funcții principale și, corespunzător lor, trei subdiscipline:

- poziționarea
- câmpul gravitațional al pământului
- variațiile temporale (în poziție precum și în câmpul gravitațional)

Poziționarea, sau determinarea poziției unui punct, constituie aspectul geodeziei pe care îl înțelegem cel mai bine. Punctele pot fi poziționate individual sau ca parte a unei întregi rețele de puncte; pozițiile căutate pot fi ori absolute (față de un sistem de coordonate) ori relative (față de alte puncte).

Cunoașterea geometriei câmpului gravitațional este necesară pentru a face posibilă transformarea observațiilor geodezice realizate în spațiul fizic (afectate de forța de gravitație) în spațiul geometric în care sunt de obicei definite pozițiile.

Variațiile temporale ale pozițiilor și câmpului gravitațional rezultă din deformările Pământului și câmpului său gravitațional atribuite unui număr de cauze. În geodezie ceea ce produce aceste mișcări este irelevant, fie că este vorba de marea terestre, solicitările asupra scoarței terestre și reculul, forțe tectonice sau alte fenomene, încă necunoscute. Studiul acestor cauze aparține geofizicii, dar aspectele geometrice cad în sarcina geodeziei.

Alți specialiști au împărțit funcțional geodezia pe baza acelorași criterii; de exemplu, Comitetul SUA pentru Geodezie arată că scopurile principale ale geodezi pot fi rezumate după cum urmează:

- înființarea și întreținerea de rețele tridimensionale de control geodezic, naționale și globale, pe Pământ, recunoscând aspectele legate de variațiile temporale ale acestor rețele
- măsurarea și reprezentarea fenomenelor geodinamice (mișcarea polilor, marea terestre și mișcarea scoarței)
- determinarea câmpului gravitațional al Pământului, inclusiv variațiile temporale.

Instrumentul principal de cunoaștere a lumii materiale îl constituie observarea și în cadrul acesteia, măsurarea. Operația de măsurare reprezintă un proces experimental de obținere a informației sub forma unui raport numeric, între valoarea mărimii fizice măsurate și valoarea unei alte mărimi de același gen considerată drept unitate de măsură.

Scopul unei cercetări științifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a fi puse în slujba activității umane. Pentru aceasta, este necesară îmbinarea cercetării științifice cu aplicația tehnică – practică, fără de care orice speculație abstractă devine sterilă.

Pentru realizarea acestui deziderat, prima condiție în alegerea mărimilor fizice, înțelegând prin aceasta și mărimile care intervin în tehnică și în practică, este ca ele să fie măsurabile.

Informațiile, care constituie baza concretă de date necesară rezolvării problemelor geodezice, fotogrammetrice și topografice, provin din observațiile efectuate asupra unor mărimi cu care se lucrează frecvent și care, în principal, sunt reprezentate de măsurătorile de unghiuri și distanțe. **Calitatea** informațiilor obținute din aceste măsurători este funcție directă de **volumul** observațiilor și de **precizia** instrumentelor de măsurat.

Se impune așadar, ca pornind de la scopul pentru care sunt efectuate măsurătorile să se stabilească valorile corespunzătoare ca mărime și precizie, luând în considerare aspectul economic referitor la volumul strict necesar și suficient al observațiilor care se impun.

Teoria erorilor de măsurare sau teoria prelucrării măsurătorilor geodezice intervine cu succes și rezolvă favorabil aceste aspecte.

IMPORTANȚA TEORIEI ERORILOR PENTRU PRACTICA MĂSURĂTORILOR TERESTRE

Algoritmii de prelucrare prezintă o importanță deosebită pentru practica măsurătorilor terestre, datorită volumului impresionant de observații ce trebuie executate, prelucrate și compensate în vederea obținerii valorilor lor celor mai probabile, ca și pentru evaluarea cât mai corectă și mai completă a preciziei.

Cunoscându-se cât mai exact mărimile erorilor medii ale fiecărui argument măsurabil în parte, se poate determina eroarea medie a unei funcții de aceste argumente. În acest fel, se poate rezolva problema inversă a erorilor de măsurare, în cadrul căreia, față de o eroare maximă impusă apriori unei funcții ce urmează a se determina, se va stabili încă din faza de proiect, care trebuie să fie erorile maxime cu care se vor măsura pe teren argumentele componente. Aceasta dă posibilitatea stabilirii preciziei optime de măsurare, cu avantaje economice importante. Astfel, la realizarea unei rețele de triangulație, necesară ridicărilor topografice, a unei rețele de microtriangulație, necesară pentru urmărirea comportării unei construcții etc., studiul preciziei de determinare a poziției punctelor rețelei se face încă din faza de proiectare, funcție de configurația rețelei și de precizia cu care se vor executa măsurătorile pe teren. Acest studiu urmărește ca erorile în poziția punctelor, să se încadreze în toleranțele impuse anticipat. La sfârșit, prin compararea erorilor post-compensate cu erorile stabilite anticipat, se va putea aprecia corectitudinea studiului făcut.

Studiul erorilor de măsurare și a algoritmilor de compensare prezintă o importanță cu totul deosebită în acele domenii ale măsurătorilor terestre (Geodezie, Fotogrammetrie, Topografie aplicată în construcții), în care exigențele impuse în privința preciziei sunt deosebit de ridicate.

Se subliniază faptul că de fiecare dată în practica măsurătorilor terestre trebuie avută în vedere precizia optimă necesară. Aceasta deoarece o precizie exagerată produce cheltuieli inutile de forță de muncă, de mijloace materiale și de timp, iar o precizie insuficientă duce la o calitate slabă a rezultatelor obținute din măsurători.

Introducerea automatizării în prelucrarea observațiilor constituie un salt calitativ important, cu consecințe remarcabile și în domeniul măsurătorilor terestre, ca și în studiul erorilor de măsurare.

Teoria matematică a informației formulează legile generale ale comenzii, controlului și comunicațiilor și stabilește principiile de codificare, prelucrare, păstrare și transmitere a informației, asociindu-se cu tehnica de calcul automat. Această nouă direcție constituie o etapă superioară în dezvoltarea metodelor de prelucrare a rezultatelor obținute din măsurători.

1. MĂSURĂTORI EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE

Lucrările efectuate în rețelele geodezice de sprijin au ca obiectiv final determinarea coordonatelor punctelor rețelei într-un anumit sistem de referință. Pentru a realiza acest obiectiv în rețelele geodezice se efectuează diferite măsurători, a căror natură depinde de tipul și destinația rețelei. Prin urmare, într-o rețea dată nu pot fi întâlnite toate tipurile de măsurători geodezice posibile.

1. Unghiuri și direcții azimutale

Unghiurile și direcțiile azimutale pot determina o rețea de triangulație din punct de vedere geometric. Pentru un triunghi ABC , în care latura AB este cunoscută, ar fi necesar și suficient să se cunoască unghiurile din punctele A și B .

În lucrările de triangulație această determinare reprezintă un caz izolat, măsurându-se aproape întotdeauna și unghiul din punctul C (fig. 1.a). În acest fel, măsurătorile unghiulare din punctele A , B , C sunt caracterizate printr-un „grad de libertate” care poate fi anulat de necesitatea ca unghiurile *compensate* să satisfacă o anumită *condiție geometrică*.

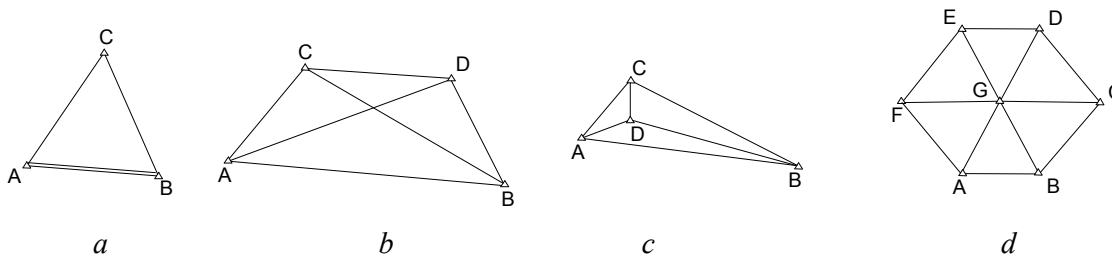


Fig. 1. Figuri elementare, componente ale rețelilor de triangulație

a – triunghi geodezic; b – patrulater geodezic; c,d – poligoane cu punct central.

Introducerea unor măsurători unghiulare suplimentare (fig. 1. b,c,d) conduce la crearea de noi grade de libertate în rețea, reclamând respectarea de către valorile compensate a unui număr corespunzător de condiții geometrice.

2. Lungimi

Lungimile măsurate determină scara rețelei de triangulație. În acest scop ar fi strict necesară cunoașterea unei singure lungimi, orice măsurătoare suplimentară conducând, ca și în cazul precedent, la necesitatea respectării unei noi condiții geometrice.

Lungimile din rețelele de triangulație pentru care se acceptă ponderea $p = \infty$ se numesc **baze geodezice**. Asemenea valori provin din măsurători precise, efectuate cu firul de invar sau cu ajutorul instrumentelor electronice. Se pot introduce și valori finite pentru ponderi, urmând ca valoarea cea mai probabilă a acestor lungimi să fie determinată prin compensarea rețelei de triangulație.

Este de menționat că măsurătorile de lungimi micșorează propagarea erorilor longitudinale din rețelele de triangulație.

În rețelele de triangulație de ordin inferior lungimile pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente eventual în rețea și care sunt considerate **puncte vechi**.

3. Azimute astronomice

În cazul rețelelor geodezice, azimutele astronomice α se vor transforma în azimute geodezice A , pe baza ecuației *Laplace*, determinând orientarea rețelei de triangulație.

Utilizarea azimutelor *Laplace* este specifică rețelelor mari de triangulație, denumite și *rețele astronomico - geodezice*. Deoarece aceste rețele se realizează cu o precizie superioară rețelelor de stat, micșorarea posibilelor erori de rotație ale întregii rețele se poate realiza prin măsurarea unor azimute *Laplace*, la capetele rețelei.

Prin relații matematice, azimutele Laplace pot fi reduse la planul de proiecție transformându-se în orientări θ .

În rețelele de ordin inferior, orientările θ pot fi calculate din coordonatele punctelor de ordin superior existente eventual în rețea, și care sunt considerate puncte vechi.

4. Coordonate astronomice

Coordonatele astronomice Φ, Λ se transformă în coordonate geodezice B și L prin intermediul relațiilor:

$$B = \phi - \xi \quad 1.1$$

$$L = \Lambda - \eta \sec \phi$$

în care:

B → latitudine geodezică → unghiul format de normala în punctul P cu planul ecuatorului terestru

L → longitudine geodezică → unghiul diedru format de planul meridianului geodezic al punctului P cu planul meridianului geodezic al punctului *Greenwich*

Φ → latitudine astronomică → unghiul format de verticala punctului P cu planul ecuatorului

Λ → longitudine astronomică → unghiul diedru format de planul meridianului astronomic al punctului P cu planul meridianului astronomic *Greenwich* (meridian origine).

Ele pot determina poziția rețelei de triangulație pe elipsoidul de referință.

Coordonatele punctelor de ordin superior sunt preluate de regulă ca *elemente fixe* la prelucrarea rețelelor de ordin inferior.

5. Unghiuri zenitale

Determinarea altitudinilor în rețelele de triangulație se realizează de cele mai multe ori prin metoda nivelmentului trigonometric care presupune măsurători de unghiuri zenitale.

Prelucrarea observațiilor zenitale se efectuează, în mod obișnuit, independent de prelucrarea unghiurilor azimutale și a lungimilor. În cadrul geodeziei tridimensionale, prelucrarea tuturor acestor măsurători se execută însă în bloc.

6. Diferențe de nivel

Rețeaua nivelmentului de stat, precum și alte rețele de nivelment sunt determinate prin măsurători de diferențe de nivel. Metoda nivelmentului geometric este mult mai precisă în comparație cu metoda nivelmentului trigonometric, însă mult mai laborioasă. De aceea, metoda este puțin utilizată în cadrul rețelelor geodezice planimetrice (triangulație, trilateratie), numai unde accesul la punctele geodezice prin nivelment geometric nu este prea dificil.

7. Măsurători gravimetrice

În cadrul rețelelor gravimetrice se fac determinări absolute și relative ale accelerației gravitației. Determinări relative intervin și în rețelele de nivelment geometric, fiind necesare la calculul corecțiilor specifice sistemului de altitudini folosit.

Deși nu în mod direct, determinările gravimetrice intervin și în rețelele de triangulație de ordin superior, la calculul componentelor astrono-geodezice ale deviației verticalei ξ_{ag}, η_{ag} , precum și al undulațiilor cvasigeoidului ζ necesare la reducerea observațiilor geodezice la suprafața elipsoidului de referință.

2. METODA PROIECTĂRII

Pentru aducerea punctelor rețelelor existente pe suprafața fizică a Pământului, pe suprafața de referință (elipsoidul) s-au propus și folosit mai multe metode, dintre care **metoda proiectării** are cea mai mare aplicabilitate.

În această metodă se procedează la aducerea elementelor măsurate (unghiuri, direcții, lungimi etc.) pe suprafața elipsoidului, prin aplicarea unor corecții. Există două posibilități în acest sens și anume:

Metoda Pizzetti, propune ca punctul P de pe suprafața fizică a Pământului (fig.2) să fie proiectat, mai întâi, cu ajutorul verticalei V , pe suprafața geoidului în P_1 urmând ca apoi, cu ajutorul normalei N_1 la elipsoid, să fie proiectat în P_2 pe suprafața elipsoidului de referință. Metoda introduce complicații însemnate, prin faptul că presupune cunoașterea curburilor verticalelor necesare la stabilirea corecțiilor în prima etapă a proiectării și de aceea nu a cunoscut până în prezent o aplicabilitate practică deosebită.

Metoda Bruns-Helmert, propune ca punctul P de pe suprafața fizică a Pământului să fie proiectat în P' pe suprafața elipsoidului, direct cu ajutorul normalei N_2 la această suprafață. Această metodă este mult mai practică și a fost aplicată sub conducerea lui *F.N.Krasovski*, la realizarea triangulației rusești, precum și a altor triangulații europene.

Coordonatele tuturor punctelor triangulației de stat din țara noastră sunt determinate prin metoda proiectării *Bruns-Helmert*.

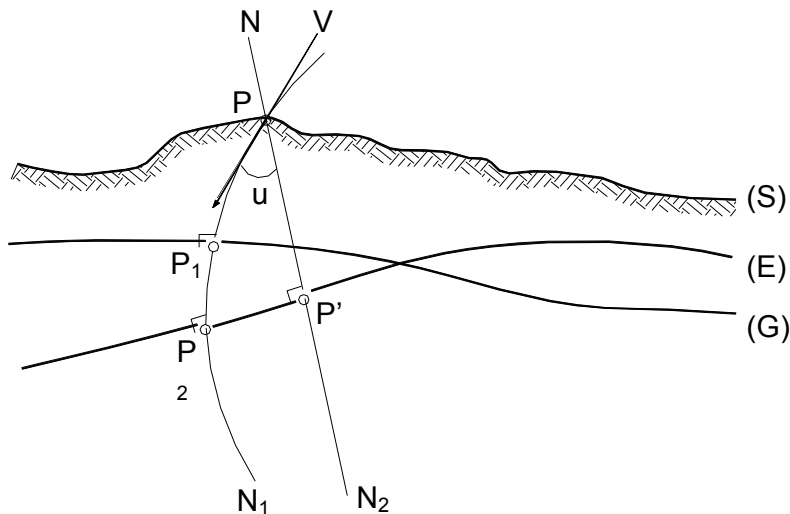


Fig. 2. Reprezentarea punctelor prin metoda proiectării

În România, începând cu anul 1930, s-a utilizat elipsoidul *Hayford*, iar din anul 1951 se utilizează elipsoidul *Krasovski*.

Dimensiunile unor elipsoizi de referință

Denumirea elipsoidului de referință	Anul determinării	Semiaxa mare a[m]	Turtirea numerică f	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6377397,155	1:299,1285	1873-1916
Clarke	1880	6378243,000	1:293,465	1916-1930
Hayford	1909	6378388,000	1:297,0	1930-1951
Krasovski	1940	6378245,000	1:298,3	1951-prezent
Sistemul geodezic de referință 1980	1980	6378137,000	1:298,257	
WGS' 84	1984	6378137,000	1:298,257	în prezent

3. REZOLVAREA PROBLEMELOR GEODEZICE PE ELIPSOIDUL DE REFERINȚĂ

3.1 REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR ELIPSOIDICE MICI

Se presupun observațiile unghiulare și distanțele măsurate în rețelele geodezice de sprijin reduse la suprafața elipsoidului de referință.

Pentru situațiile curent întâlnite în practica geodezică, unde distanțele $s < 60$ km, triunghiurile geodezice (denumite triunghiuri elipsoidice mici) sunt rezolvate ca triunghiuri sferice, considerându-se că acestea sunt amplasate pe sfere medii Gauss de raze R_{B_i} , unde B_i sunt latitudinile geodezice ale centrelor de greutate ale triunghiurilor respective. În asemenea cazuri, nu se apelează la utilizarea directă a formulelor trigonometriei sferice, ci se aplică metode de calcul specifice geodeziei.

3.2 EXCESUL SFERIC

Suma unghiurilor α, β, γ într-un triunghi sferic (presupuse ca neafectate de erori de măsurare) este întotdeauna mai mare decât 200^g .

Diferența rezultată este denumită *exces sferic*:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 200^g \quad 1.2$$

Între unghiurile măsurate și reduse pe suprafața elipsoidului de referință notate $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ și unghiurile compensate prin metoda celor mai mici pătrate, α, β, γ , există relațiile:

$$\alpha = \alpha^0 + v_\alpha; \quad \beta = \beta^0 + v_\beta; \quad \gamma = \gamma^0 + v_\gamma \quad 1.3$$

în care cu $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ s-au notat corecțiile obținute din compensare, pe baza unor ecuații de condiție de forma:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + w = 0 \quad 1.4$$

Astfel, suma unghiurilor măsurate și reduse pe elipsoid diferă față de 200^g nu numai prin excesul sferic, ci și printr-o cantitate w , datorită erorilor de măsurare:

$$\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 200^g = \varepsilon + w \quad 1.5$$

Când se rezolvă triunghiuri izolate (ceea ce intervine rar în practica geodezică) se consideră:

$$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = -w/3 \quad 1.6$$

ceea ce nu este posibil în cazul compensării riguroase a unei rețele geodezice.

În ambele situații este necesară cunoașterea excesului sferic ε pentru a se putea efectua calculele de compensare și de rezolvare a triunghiurilor geodezice.

În *figura 3* se observă că suprafețele fusurilor sferice (AA) , (BB) și (CC) corespunzătoare unghiurilor α, β, γ considerate, se pot exprima în funcție de suprafața triunghiului sferic ABC , notată S :

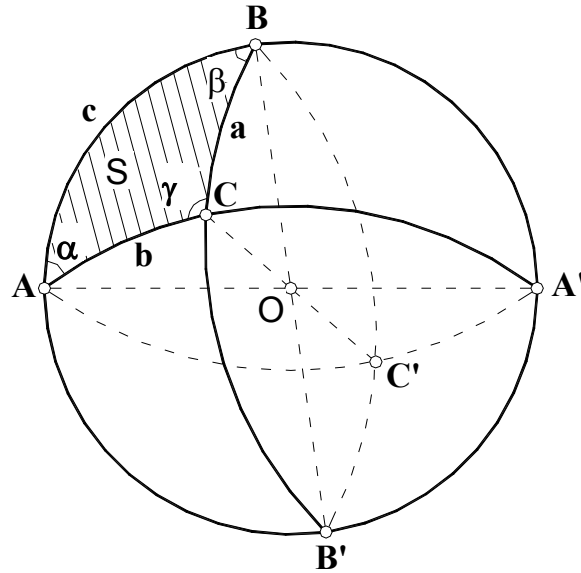


Fig. 3. Excesul sferic

$$(AA) = S + BCA'; \quad (BB) = S + ACB'; \quad (CC) = S + ABC'$$

astfel încât, prin adunarea celor trei relații:

$$(AA) + (BB) + (CC) = 3S + 2\pi R^2 - S = 2(S + \pi R^2) \quad 1.7$$

Pe de altă parte:

$$(AA) = \frac{A^g}{400^g} 4\pi R^2; \quad (BB) = \frac{B^g}{400^g} 4\pi R^2; \quad (CC) = \frac{C^g}{400^g} 4\pi R^2$$

adică:

$$(AA) + (BB) + (CC) = \frac{2\pi R^2}{200^g} (A^g + B^g + C^g) \quad 1.8$$

Unde, $(A^g + B^g + C^g) \equiv (\alpha^g + \beta^g + \gamma^g)$.

Prin egalarea relațiilor (1.7) și (1.8) se obține:

$$2\pi R^2 (A^g + B^g + C^g - 200^g) = 400^g + 2S,$$

și dacă se notează cu ε expresia din paranteză, iar cu $\rho^{cc} = 200\,000^{cc} / \pi$, atunci se va obține expresia de calcul pentru excesul sferic:

$$\varepsilon^{cc} = \frac{S}{R^2} \rho^{cc} \quad 1.9$$

Pentru calcule în triunghiuri geodezice mici, suprafața sferică S se poate înlocui cu suprafața triunghiului plan $A'B'C'$ corespunzător, notată S' :

$$\varepsilon^{cc} \approx \frac{S'}{R^2} \rho^{cc} = \rho^{cc} \frac{a'b' \sin C'}{2R^2} = \rho^{cc} \frac{a'c' \sin B'}{2R^2} = \rho^{cc} \frac{b'c' \sin A'}{2R^2}, \quad 1.10$$

unde A', B', C' (respectiv α', β', γ' din figură) sunt unghiurile triunghiului plan.

Ceea ce trebuie reținut este faptul că într-un triunghi elipsoidic mic întotdeauna suma unghiurilor este 200^g plus excesul sferic.

Observație:

Din tabelele elipsoidului de referință Krasovski se poate extrage coeficientul:

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}, \quad 1.11$$

valabil pentru gradația sexagesimală, în funcție de latitudinea medie a vârfurilor triunghiului ABC , astfel că:

$$\varepsilon'' \approx fab \sin \gamma' = fac \sin \beta' = fbc \sin \alpha' \quad 1.12$$

Pentru laturi mai mari de 60 km, excesul sferic se poate calcula cu formula (Bagratuni 1962, Jordan 1958):

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{S'}{R^2} \left(1 + \frac{m^2}{8R^2} \right) \quad 1.13$$

unde cu m^2 s-a notat:

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad 1.14$$

Exemplificări referitoare la ordinul de mărime pe care îl poate avea excesul sferic în funcție de lungimea laturii s sunt prezentate în tabelul 1.

În același tabel se pot urmări modificările aduse de formula (1.13) asupra formulei (1.10) pentru cazul triunghiurilor geodezice cu laturi mai mari de 60 km. S-au avut în vedere triunghiuri echilaterale iar latitudinea medie a vârfurilor triunghiurilor a fost considerată 46^0 .

3.3 REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR GEODEZICE MICI CU METODA LEGENDRE

Una din metodele cele mai folosite pentru rezolvarea triunghiurilor geodezice mici se bazează pe utilizarea teoremei Legendre (sau metoda dezvoltărilor în serie), publicată de acesta în anul 1787:

“Un triunghi sferic mic se poate rezolva ca un triunghi plan, dacă se păstrează egalitatea laturilor celor două triunghiuri, iar unghiurile triunghiului plan se obțin prin micșorarea fiecărui unghi sferic cu câte o treime din excesul sferic.”

Pentru demonstrarea acestei teoreme se scrie formula cosinusului în triunghiul sferic ABC (fig.4):

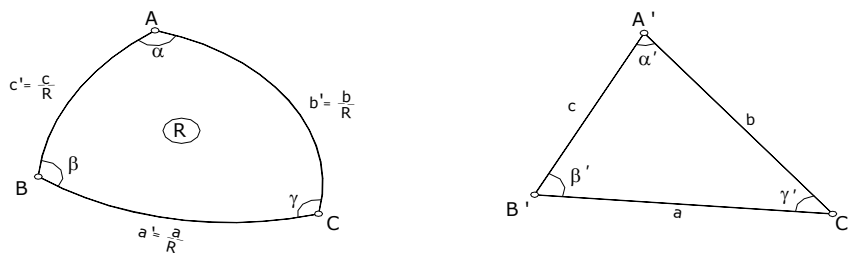


Fig.4. Teorema Legendre

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha, \quad 1.15$$

care poate fi dezvoltată în serie folosind relații de forma:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots; \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots, \quad 1.16$$

obținându-se:

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R^2bc} \quad 1.17$$

În triunghiul plan $A'B'C'$, cu unghiurile α', β', γ' și aceleași laturi a, b, c rezultă din teorema *Pitagora* generalizată:

$$\cos \alpha' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad 1.18$$

și ca urmare:

$$\sin^2 \alpha' = -\frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4b^2c^2} \quad 1.19$$

Din ultimele trei relații rezultă:

$$\cos \alpha = \cos \alpha' - \frac{bc}{6R^2} \sin^2 \alpha' \quad 1.20$$

Din egalitatea: $\alpha = \alpha' + (\alpha - \alpha')$ se obține prin dezvoltare în serie:

$$\cos \alpha \approx \cos \alpha' - (\alpha - \alpha') \sin \alpha', \quad 1.21$$

adică:

$$(\alpha - \alpha')^{cc} = \rho^{cc} \frac{bc \sin \alpha'}{6R^2} = \frac{1}{3} \frac{S'}{R^2} \rho^{cc} \approx \frac{\varepsilon^{cc}}{3} \quad 1.22$$

Relații similare se pot obține și pentru diferențele $\beta - \beta'$; $\gamma - \gamma'$, ceea ce constituie demonstrația teoremei *Legendre*.

Aproximațiile generate de dezvoltările în serie (1.16), (1.21), (1.22), limitează domeniul de aplicabilitate a rezolvărilor triunghiurilor geodezice cu teorema *Legendre* până la distanțe $s < 60km$.

Deci, etapele care trebuie să fie urmărite pentru a putea rezolva un triunghi elipsoidic mic prin metoda *Legendre* constau în:

- calculul excesului sferic cu una dintre relațiile (10)
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidic mic prin calcularea neînchiderii și repartizarea ei, în mod egal, celor trei unghiuri
- calculul unghiurilor în triunghiul plan prin corectarea celor de pe elipsoid cu o treime din excesul sferic
- calculul celorlalte laturi în triunghiul plan care, conform teoremei, sunt egale cu cele din triunghiul sferic

Un exemplu de rezolvare a triunghiurilor geodezice cu teorema *Legendre* se prezintă în tabelul 5.2.

Tabelul 1

Lungimea laturii (s) km	10	20	30	40	50	60	Cu formula (5.9)			Cu formula (5.12)		
							80	100	150	80	100	150
Excesul Sferic ε''	0,219	0,878	1,976	3,5119	5,4873	7,9018	14,04762	21,94941	49,38618	14,04790	21,95003	49,38959

Tabelul 2

Calculul excesului sferic ε	Vârful	Unghiul măsurat și redus pe elipsoid [g c cc]	Corecția $-\omega/3$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul elipsoidic mic [g c cc]	$-\frac{\varepsilon}{3}$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul plan [g c cc]	Sinusul unghiului în triunghiul plan	Lungimea laturii în triunghiurile plan și elipsoidic mic [m]	Denumirea laturii
$a=28\,597,567$ m $B=44^0,34'$ $f=25,354 \cdot 10^{-10}$ $\varepsilon = 3^{cc},612$	A B C	91 78 42,661 58 45 51,130 49 76 13,328	-1,169 -1,169 -1,169	91 78 41,492 58 45 49,961 49 76 12,159	-1,204 -1,204 -1,204	91 78 40,288 58 45 48,757 49 76 10,955	0,99168380 0,79451413 0,70444825	28597,567 22911,709 20314,445	a b c
		200 00 07,119 $\varepsilon + \omega = 7^{cc},119$	-3,507	200 00 03,612	-3,612	200 00 00,00	Modulul= $a / \sin \alpha'$	= 28837,3844 m	

Primul tabel exemplifică valorile excesului sferic funcție de lungimea laturii.

Al doilea tabel reprezintă un exemplu de rezolvare a triunghiurilor geodezice cu *Teorema Legendre*.

3.4 REZOLVAREA TRIUNGHURIILOR GEODEZICE MICI CU METODA ADITAMENTELOR (Soldner)

Cu *metoda aditamentelor*, introdusă de *J.G. Soldner* în anul 1810, un triunghi geodezic mic oarecare (aproximat ca triunghi sferic) se rezolvă prin intermediul unui triunghi plan, ale cărui unghiuri sunt egale cu unghiurile triunghiului geodezic (reduse pe elipsoid) modificându-se însă laturile acestuia din urmă.

Metoda aditamentelor a cunoscut o mai mică aplicabilitate în comparație cu metoda *Legendre*, însă situația s-a schimbat ca urmare a posibilităților actuale de măsurare directă a distanțelor în rețelele geodezice de sprijin.

Din teorema sinusurilor, în triunghiurile sferic ABC și plan $A'B'C'$, format în modul menționat mai înainte, rezultă (fig. 5):

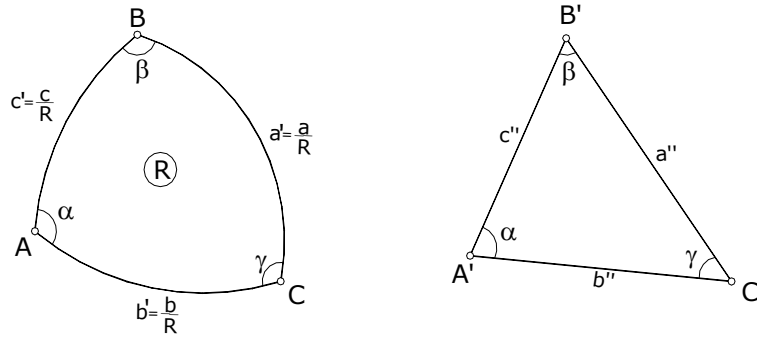


Fig.5. Teorema Soldner

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \frac{b}{R}}, \quad \text{respectiv} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a'}{b'}, \quad 1.23$$

de unde:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6R^2} + \dots}{b - \frac{b^3}{6R^2} + \dots} \quad 1.24$$

Această ecuație este îndeplinită numai atunci când:

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad \text{și} \quad b' = b - \frac{b^3}{6R^2}, \quad 1.25$$

sau în general:

$$s' = s - \frac{s^3}{6R^2}, \quad 1.26$$

Mărimea:

$$A_s = \frac{s^3}{6R^2} \quad 1.27$$

cu care trebuie modificată latura s din triunghiul sferic pentru a se obține lungimea corespondentă s' în triunghiul plan intermediar se numește *aditament liniar*.

Se poate demonstra că pentru calculul aditamentelor în cazul triunghiurilor geodezice mici ($s < 60 \text{ km}$), este suficient să se utilizeze o valoare medie pentru curbura totală $K = 1/R^2$,

pentru teritoriile care acoperă 5° în latitudine spre nord și spre sud (aproximativ 1000 km în total pe direcția nord – sud). Astfel, pentru țara noastră se poate considera:

$$R = R_{46^\circ} = 6\,378\,957\text{m}, \text{ pentru care } \frac{1}{6R^2} = 4,0959 \cdot 10^{-15} \quad 1.28$$

În cazul unor distanțe s mai mari de 60 km se poate extinde dezvoltarea în serie inițială, astfel încât:

$$s' = s - \frac{s^3}{6R^2} + \frac{s^5}{120R^4} - \dots \quad 1.29$$

Termenii corectivi introduși în ultimele relații nu aduc contribuții esențiale, așa cum rezultă și din tabelul 3.

Deci, etapele care trebuie urmărite pentru rezolvarea triunghiurilor elipsoidice mici prin metoda aditamentelor constau în:

- calculul excesului sferic cu una din relațiile (10)
- compensarea unghiurilor în triunghiul elipsoidic mic prin calcularea neînchiderii și repartizarea ei în mod egal celor trei unghiuri:

$$w = (A^* + B^* + C^*) - (200^g + \varepsilon)$$

$$A = A^* - w/3 ; B = B^* - w/3 ; C = C^* - w/3$$

unde, cu A^* , B^* , C^* s-au notat valorile unghiurilor reduse pe suprafața elipsoidului de referință.

- calculul aditamentului liniar al laturii a și apoi a valorii în triunghiul plan
- calculul celorlalte două laturi ale triunghiului plan
- cu aceste valori calculate se determină aditamentele liniare ale celorlalte două laturi și apoi mărimea lor în triunghiul elipsoidic mic

Pentru exemplificarea rezolvării unui triunghi geodezic mic cu metoda aditamentelor s-a reluat exemplul din tabelul 2, calculele efectuându-se în tabelul 4.

Tabelul 3

Lungimea laturii (s) _{km}	10	20	30	40	50	60	Cu formula (5.26)			Cu formula (5.28)		
							80	100	150	80	100	150
Aditament liniar [mm]	4,1	32,8	110,6	262,1	512,0	884,7	2097,1	4095,9	13823,6	2097,1	4095,9	13823,2

Tabelul 4

Calculul excesului sferic și al aditamentelor	Vârful	Unghiul măsurat și redus pe elipsoid [g c cc]	Corecția $-\omega/3$ [cc]	Unghiul compensat în triunghiul elipsoidic mic [g c cc]	Sinusul unghiului în triunghiul elipsoidic mic	Latura în triunghiul plan [m]	Aditamentul [m]	Latura în triunghiul elipsoidic mic [m]	Latura
$a = 28\,597,567\ m$ $B = 44^{\circ}34'$ $f'' = 25,354 \cdot 10^{-10}$ $\varepsilon^{cc} = 3,612$ $A_a = 0,0958\ m$ $A_b = 0,0493\ m$ $A_c = 0,0344\ m$	A B C	91 78 42,661 58 45 51,130 49 76 13,328	-1,169 -1,169 -1,169	91 78 47,492 58 45 49,961 49 76 12,159	0,99168405 0,79451528 0,70444959	28597,4710 22911,6599 20314,4106	0,0958 0,0493 0,0344	28597,567 22911,709 20314,445	a b c
		200 00 07,119 $\varepsilon + \omega = 7^{cc},119$	-3,507	200 00 03,612					Modul = $a' / \sin \alpha' = 28 \cdot 837,2807$

4. REȚELE DE SPRIJIN PLANIMETRICE

1. Rețeaua geodezică de stat
2. Rețeaua de triangulație locală
3. Rețeaua de ridicare

1. Rețeaua geodezică de stat

Rețeaua geodezică de stat este constituită din puncte de triangulație geodezică de patru ordine și din puncte de poligonometrie. Această rețea se prezintă sub forma unei rețele compacte de triunghiuri combinate cu patrulater cu ambele diagonale observate, având scopul științific principal de stabilire a formei și dimensiunilor elipsoidului pământesc. Pe lângă acest scop științific, valabil întotdeauna, ea ajută evoluția tehnică, astfel încât:

- a) servește ca osatură a hărții României la scară mică;
- b) servește ca bază de pornire pentru executarea planurilor cadastrale la scară medie;
- c) stă la baza rețelelor de sprijin locale și de ridicare pentru planuri la scări mari pentru toate lucrările de urbanism, drumuri, căi ferate, căi navigabile, baraje, canale de irigații, etc.;
- d) servește la calculul orientării tunelurilor și galeriilor.

Dezvoltarea generală a impus necesitatea unor planuri la scări din ce în ce mai mari, care necesită rețele de sprijin din ce în ce mai precise.

Rețeaua de triangulație a României, conform instrucțiunilor din 1962, are patru ordine, realizând o densitate medie de 1 punct / 20 km².

a) Rețeaua de ordinul I are punctele dispuse în vârfurile unor triunghiuri, pe cât posibil echilaterale, asigurând o lungime a laturilor în medie de 25 km în regiunile de munte și 20 km în regiunile de șes, densitatea obținută fiind de 1 punct / 500 km². În interiorul fiecărui triunghi de ordinul I se introduc punctele de ordinul II, în mod obișnuit trei puncte, laturile triunghiurilor de ordinul II fiind circa ½ din cele ale triunghiului de ordinul I.

b) Rețeaua de ordinul II are punctele dispuse în vârfurile unor triunghiuri cu laturile de 13 km și asigură o densitate de 1 punct / 150 km².

c) Rețeaua de ordinul III se obține prin îndesirea punctelor în așa fel încât în interiorul fiecărui triunghi de ordinul II să avem circa trei puncte de ordinul III. În cazul rețelei de triangulație de ordinul III, laturile triunghiurilor sunt de 8 km și asigură o densitate de 1 punct / 50 km². Coordonatele acestor puncte se determină legându-se de puncte de ordinul II sau de ordinul II și I.

d) Rețeaua de ordinul IV se obține introducând în interiorul triunghiurilor de ordinul III, punctele de ordinul IV astfel încât distanța între acestea să fie de circa 4 km iar densitatea lor de 1 punct / 20 km². Densitatea de 1 punct / 20 km² este cu totul insuficientă pentru a putea ridica suprafețele topografice. Pentru a ne putea apropia cât mai mult de punctele de detaliu și a putea face ridicarea suprafețelor cât mai fidel, se impune mărirea numărului de puncte. Pentru aceasta se realizează rețele de triangulație locală și rețele de ridicare.

2. Rețeaua de triangulație locală

Pe suprafețe topografice care nu depășesc câteva sute de km², unde nu există rețea geodezică de stat, sau aceasta nu este folosibilă din punct de vedere al densității, se realizează o triangulație locală. Prin metoda triangulației locale se determină coordonatele unui număr de puncte prin intermediul rețelei de triunghiuri ale căror vârfuri sunt materializate în teren. Distanța dintre puncte este cuprinsă între 0,5 și 3 km. Forma rețelei de triangulație este funcție de forma suprafeței pe care o avem de ridicat, putând avea după caz rețea de triunghiuri formând un poligon cu punct central, patrulater cu vize pe ambele diagonale, lanț de

triunghiuri, lanț de patrulatere sau o combinație între acestea. În cazul suprafețelor cu un contur circular se alcătuiește o rețea în formă de poligon cu punct central (fig.6), în care se măsoară toate unghiurile și o bază ($\overline{AB}=B_1$); pe baza acestor elemente măsurate, care vor fi compensate, se vor calcula orientările laturilor și coordonatele punctelor.

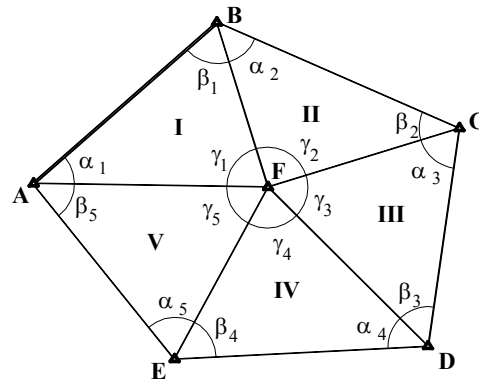


Fig. 6. Poligon cu punct central

În cazul în care suprafața pe care o avem de ridicat este mult mai lungă decât lată, se va folosi patrulaterul cu ambele diagonale vizate (fig.7), lanțul de triunghiuri (fig.8) sau o combinație dintre acestea.

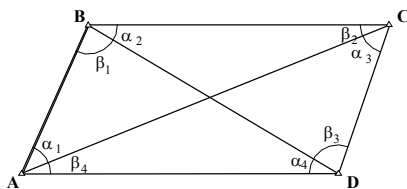


Fig. 7. Patrulater cu diagonale vizate

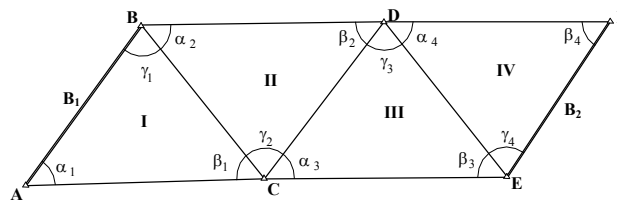


Fig. 8. Lanț de triunghiuri

Și în aceste forme de rețele se vor măsura toate unghiurile, măsurarea unei singure baze nemaifiind suficientă, deoarece nu se poate face închiderea tot pe baza de pornire. Pentru aceasta se va mai măsura cel puțin o bază de închidere (B_2). Dacă lanțul de triunghiuri este foarte lung, se obișnuiește ca după fiecare 10 - 15 triunghiuri să fie măsurată o bază de închidere.

O triangulație locală, indiferent de forma acesteia, necesită următoarele operații principale :

a) Operații preliminare care constau din:

- întocmirea proiectului rețelei pe o hartă topografică;
- recunoașterea terenului pe care urmează să fie executată această triangulație locală;
- definitivarea proiectului de triangulație în conformitate cu situația din teren;
- marcarea și semnalizarea punctelor rețelei de triangulație.

b) Efectuarea măsurătorilor care constă din:

- măsurarea tuturor unghiurilor;
- măsurarea unei baze sau a unor baze de triangulație;
- determinarea orientării bazei de pornire sau a unei laturi din rețeaua de triangulație, orientare care se poate determina prin metode astronomice sau magnetice.

c) Calculul triangulației care constă din:

- compensarea elementelor măsurate;
- calculul laturilor rețelei de triangulație;
- calculul orientării laturilor;
- calculul coordonatelor punctelor de triangulație.

3. Rețeaua de ridicare

Prin punctele rețelei geodezice de stat și din triangulațiile locale, se ajunge la o densitate a acestora mult prea mică pentru a constitui o rețea de sprijin pentru ridicarea detaliilor în vederea întocmirii de planuri la scări mari (1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500). De asemenea, prin rețelele locale de triangulație se ajunge la puncte situate la o distanță de 0,5 - 3 km, mult prea îndepărtate între ele pentru a putea face ridicarea detaliilor. Pentru a ridica punctele de detaliu, trebuie să creăm în teren puncte de sprijin situate la o distanță de 100 - 250 m. Mărirea numărului de puncte prin metoda triangulației nu este potrivită, deoarece s-ar produce cheltuieli și muncă inutilă pe de o parte, iar pe de altă parte, în majoritatea cazurilor, nici natura terenului nu ar permite acest lucru datorită acoperirii cu diferite detalii și a reliefului acestuia.

Prin rețeaua de ridicare se înțelege rețeaua creată în scopul asigurării numărului de puncte necesare ridicărilor topografice; ea este alcătuită din puncte de: intersecție înainte, înapoi, laterală și drumuire care se sprijină în determinarea lor pe puncte din rețelele determinate anterior. Densitatea rețelei de ridicare se stabilește în raport cu scopul lucrărilor și scara de redactare a planurilor topografice, conform instrucțiunilor tehnice de lucru.

5. ALGORITMI PENTRU COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

La acest tip de măsurători, valoarea mărimilor pe care dorim să le determinăm se obține prin intermediul altor mărimi măsurate direct, mărimile măsurate direct și cele de determinat fiind funcțional dependente între ele.

Cazul general:

Se consideră $M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0$ ca valori medii ale unor mărimi determinate direct (rezultate din măsurători directe), iar x_1, x_2, \dots, x_h , mărimi ce urmează a fi determinate indirect.

Presupunem de asemenea că relația dintre aceste 2 tipuri de mărimi este exprimată de:

$$M_i^0 + v_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_h) \quad 5.1$$

$i = 1, 2, \dots, n$ și $n > h$

Relația $n > h$ (adică numărul ecuațiilor să fie mai mare decât numărul necunoscutelor) se impune în vederea depistării eventualelor greșeli cât și pentru mărirea preciziei. Problema care se pune este, ca din sistemul (5.1) să se deducă cele mai bune valori x_1, x_2, \dots, x_h .

Dacă măsurătorile M_i^0 ar fi perfecte (neafectate de erori), acest sistem s-ar prezenta sub forma:

$$M_i^0 = F_i(X_1, X_2, \dots, X_h) \quad 5.2$$

$i = 1, 2, \dots, n$; $n > h$

Acest sistem ar fi compatibil și rezolvabil în raport cu necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_h , deci, operațiile de măsurare s-ar reduce la atâtea măsurători câte necunoscutute sunt. În practică însă, măsurătorile de orice natură sunt afectate în mod inerent de erori.

Datorită acestor erori de măsurare, sistemul (5.2) este incompatibil, de aceea mărimilor măsurate direct trebuie să li se aplice niște corecții v_i , astfel ca sistemul să devină compatibil în raport cu necunoscututele x_1, x_2, \dots, x_h .

Valorile cele mai probabile ale corecțiilor se determină aplicând metoda celor mai mici pătrate. Deci, mărimile v_i reprezintă corecțiile ce trebuie aplicate mărimilor măsurate direct, pentru a fi satisfăcute toate ecuațiile de tipul (5.1) ce pot fi întocmite pentru rezolvarea unei anumite probleme.

Metoda celor mai mici pătrate se ocupă deci cu compensarea erorilor de măsurare, determinându-se valorile cele mai probabile pentru mărimile măsurate, cât și erorile medii la care ne putem aștepta.

Determinarea acestor valori probabile este condiționată de minimul sumei pătratelor erorilor luate față de o mărime de referință (M).

5.1 LINIARIZAREA ECUAȚIILOR

În majoritatea cazurilor funcțiile F_i din relația (5.1) nu sunt liniare, compensarea fiind foarte greoaie. Pentru ușurarea calculelor de compensare, aceste ecuații se aproximează cu niște *ecuații liniare*, obținute prin dezvoltare în serie Taylor, în vecinătatea unor valori x_i^0 , apropiate de cele adevărate.

Valorile probabile ale necunoscutelor vor fi în acest caz:

$$X_i = X_i^0 + x_i \quad 5.3$$

unde, $i = 1, 2, \dots, n$ și x_i reprezintă corecții ce urmează a fi determinate în procesul de compensare și apoi adăugate valorilor aproximative X_i^0 în vederea obținerii valorilor celor mai probabile ale mărimilor căutate, X_i .

Aceste corecții însă, trebuie să fie suficient de mici, astfel încât în dezvoltarea în serie Taylor să putem neglija termenii de ordinul II și mai mari.

Introducând relația (5.3) în (5.1) obținem:

$$M_i^0 + v_i = F_i(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \dots, X_h^0 + x_h) \quad 5.4$$

Deci, corecția va avea valoarea:

$$v_i = F_i(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \dots, X_h^0 + x_h) - M_i^0 \quad 5.5$$

Dezvoltând această expresie în serie Taylor și neglijând termenii de ordinul II și superiori, rezultă:

$$v_i \cong F_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_h^0) - M_i^0 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right)_0 \cdot x_h \quad 5.6$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

Pentru simplificarea calculelor se fac următoarele notații:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_0 = a_i \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_0 = b_i \quad \dots \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_h}\right)_0 = h_i \quad 5.7$$

$$F_i(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \dots, X_h^0 + x_h) - M_i^0 = l_i$$

Cu aceste notații expresia (5.6) devine:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + h_i x_h + l_i \quad 5.8$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $n > h$)

Această relație poartă denumirea de **sistemul liniar al ecuațiilor de corecții**.

Observații:

- Fiecare măsurătoare generează câte o ecuație de corecție.
- Din expresiile coeficienților și a termenului liber (5.7) se observă că mărimea măsurată direct M_i^0 , deci cea care este afectată de erori intervine numai în termenul liber.

Rezultă deci, că eroarea unei ecuații de corecții este egală cu eroarea termenului liber, iar coeficienții a_i, b_i, \dots, h_i se consideră constante lipsite de erori.

- Dacă măsurimile măsurate direct M_i^0 sunt determinate cu aceeași precizie, atunci și ecuațiile sistemului liniar vor fi de aceeași precizie.
- Sistemul liniar poate fi înmulțit cu aceeași constantă, rezultatul final rămânând neschimbat. În cazul în care ecuațiile sistemului liniar ar fi înmulțite cu constante diferite, s-ar modifica și ponderile în mod diferit.
- Sistemele ponderate (de precizii diferite) pot fi reduse la sisteme neponderate, dacă fiecare ecuație se multiplică cu $\sqrt{p_i}$, adică:

$$\bar{v}_i = v_i \sqrt{p_i} = a_i \sqrt{p_i} \cdot x_1 + b_i \sqrt{p_i} \cdot x_2 + \dots + h_i \sqrt{p_i} \cdot x_h + l_i \sqrt{p_i} \quad 5.9$$

Acest nou sistem poartă denumirea de *sistem de ecuații omogenizate* și au toate ponderea egală cu l .

- Din expresia termenului liber (5.7) rezultă regula practică de calcul a acestuia:

$$F_i(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \dots, x_h^0 + x_h) - M_i^0 = l_i \quad 5.10$$

Termenul liber = valoare calculată - valoare măsurată

5.2 NORMALIZAREA ECUAȚIILOR

5.2.1 Compensarea măsurătorilor indirecte de aceeași precizie

Din sistemul liniar al ecuațiilor de corecții dat de (5.8) în care presupunem că toate ecuațiile au aceeași pondere, valorile cele mai probabile ale corecțiilor se deduc utilizând metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[vv] = \min. \quad 5.11$$

Dacă în acest sistem înlocuim valorile corecțiilor v_i obținem:

$$\begin{aligned} [vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = & (a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1)^2 + \\ & + (a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2)^2 + \\ & + \dots + \\ & + (a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n)^2 = \min \end{aligned}$$

Aceasta reprezintă o funcție de x , adică:

$$[vv] = F(x_1, x_2, \dots, x_h) \quad 5.12$$

Pentru determinarea minimumului acestei funcții de mai multe variabile, trebuie ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției în raport cu fiecare din necunoscute să fie zero.

Efectuând aceste derivate obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} = & 2a_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1) + \\ & + 2a_2(a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_n(a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n) = 0 \end{aligned} \quad 5.13$$

$$\text{sau: } [av] = 0 \quad 5.14$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2} = & 2b_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1) + \\ & + 2b_2(a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2) + \\ & + \dots + \\ & + 2b_n(a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n) = 0 \end{aligned} \quad 5.15$$

$$\text{sau: } [bv] = 0 \quad 5.16$$

Analog se calculează și celelalte derivate, ultima fiind:

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = 2h_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1) +$$

$$+ 2h_2(a_1x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2) +$$

$$+ \dots +$$

$$+ 2h_n(a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n) = 0$$

5.17

sau: $[hv] = 0$ 5.18

Anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi determină punctele staționare ale unei funcții care sunt în același timp puncte de minim, adică derivata de ordinul II este pozitivă.

Efectuând calculele în (5.13), (5.15), (5.17) și trecând la notațiile Gauss, obținem:

$$[aa]x_1 + [ab]x_2 + \dots + [ah]x_h + [al] = 0$$

$$[ab]x_1 + [bb]x_2 + \dots + [bh]x_h + [bl] = 0$$

$$\dots$$

$$[ah]x_1 + [bh]x_2 + \dots + [hh]x_h + [hl] = 0$$

5.19

Sistemul (5.19) poartă denumirea de **sistem normal al corecțiilor**.

Matricea coeficienților acestui sistem este simetrică, deci nesingulară. Rezultă că sistemul admite soluție care este unică.

Prin rezolvarea acestui sistem, se determină corecțiile x_i care aplicate valorilor apropiate X_i^0 dau valorile cele mai probabile ale necunoscutelor:

$$X_i = X_i^0 + x_i$$

5.20

De asemenea, cu ajutorul corecțiilor x_i se pot deduce și valorile v_i ce vor fi aplicate mărimilor măsurate M_i^0 :

$$v_i = a_ix_1 + b_ix_2 + \dots + h_ix_h + l_i$$

5.21

Determinarea practică a coeficienților și a termenilor liberi ai ecuațiilor normale se face în tabele intermediare de forma:

1. Tabelul coeficienților ecuațiilor de corecții

<i>Nr. crt.</i>	a_i	b_i	h_i	l_i	S_i	Control
1	a_1	b_1	...	h_1	l_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + \dots + h_1 + l_1$
2	a_2	b_2	...	h_2	l_2	S_2	
...
n	a_n	b_n	...	h_n	l_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + \dots + h_n + l_n$
Σ	$[a]$	$[b]$...	$[h]$	$[l]$	$[S]$ Σ_i	$\Sigma_i = [a] + [b] + \dots + [h] + [l]$

2. Tabelul coeficienților ecuațiilor normale

$[aa]$	$[ab]$...	$[ah]$	$[al]$	$[aS]$	Control : $[aS] = [aa] + [ab] + \dots + [ah] + [al]$
	$[bb]$...	$[bh]$	$[bl]$	$[bS]$	$[bS] = [ab] + [bb] + \dots + [bh] + [bl]$
	
			$[hh]$	$[hl]$	$[hS]$	$[hS] = [ah] + [bh] + \dots + [hh] + [hl]$
				$[ll]$	$[lS]$	control

5.2.2 Compensarea măsurătorilor indirecte ponderate

În sistemul liniar al ecuațiilor de corecții (5.7) presupunem că ecuațiile au precizii diferite deci, ponderi diferite.

Valorile cele mai probabile ale corecțiilor în acest caz se obțin utilizând de asemenea metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$[pvv] = \min. \tag{5.22}$$

Dacă în acest caz înlocuim valorile corecțiilor v_i obținem:

$$\begin{aligned}
 [pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = p_1 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + h_1 x_h + l_1)^2 + \\
 + p_2 (a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + h_2 x_h + l_2)^2 + \dots + \\
 + p_n (a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + h_n x_h + l_n)^2 = \min
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Și în această situație relația (5.23) reprezintă o funcție de x , adică:

$$[pvv] = F(x_1, x_2, \dots, x_h) \tag{5.24}$$

Pentru determinarea minimumului acestei funcții de mai multe variabile, trebuie ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției în raport cu necunoscutele să fie zero. Efectuând aceste derivate obținem:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2p_1 a_1 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + h_1 x_h + l_1) + \\
 + 2p_2 a_2 (a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + h_2 x_h + l_2) + \dots + \\
 + 2p_n a_n (a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + h_n x_h + l_n) = 0
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\text{sau: } [pav] = 0 \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2} = & 2p_1b_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1) + \\ & + 2p_2b_2(a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2) + \\ & + \dots + \\ & + 2p_nb_n(a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n) = 0 \end{aligned} \quad 5.27$$

$$\text{sau: } [pbv] = 0 \quad 5.28$$

Analog se calculează și celelalte derivate, obținându-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_h} = & 2p_1h_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + h_1x_h + l_1) + \\ & + 2p_2h_2(a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + h_2x_h + l_2) + \\ & + \dots + \\ & + 2p_nh_n(a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + h_nx_h + l_n) = 0 \end{aligned} \quad 5.29$$

$$\text{sau: } [phv] = 0 \quad 5.30$$

Efectuând calculele în (5.25), (5.27), (5.29) și trecând la notațiile Gauss, rezultă:

$$\begin{aligned} [paa]x_1 + [pab]x_2 + \dots + [pah]x_h + [pal] &= 0 \\ [pab]x_1 + [pbb]x_2 + \dots + [pbh]x_h + [pbl] &= 0 \\ \dots & \\ [pah]x_1 + [pbh]x_2 + \dots + [phh]x_h + [phl] &= 0 \end{aligned} \quad 5.31$$

Sistemul (5.31) poartă denumirea de **sistem normal al corecțiilor în cazul măsurătorilor indirecte ponderate**.

Prin rezolvarea acestui sistem, se determină aceleași corecții x_i care, aplicate valorilor apropiate X_i^0 ne dau valorile cele mai probabile ale necunoscutelor:

$$X_i = X_i^0 + x_i \quad 5.32$$

De asemenea, cu ajutorul corecțiilor x_i se pot deduce ulterior valorile v_i ce vor fi aplicate mărimilor măsurate M_i^0 :

$$v_i = a_ix_1 + b_ix_2 + \dots + h_ix_h + l_i \quad 5.33$$

Determinarea practică a coeficienților și termenilor liberi ai ecuațiilor normale se face în tabele asemănătoare celor de la măsurătorile indirecte de aceeași precizie, și anume:

1. Tabelul coeficienților ecuațiilor de corecție

Nr. crt.	p_i	a_i	b_i	...	h_i	l_i	S_i	Control
1	p_1	a_1	b_1	...	h_1	l_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + \dots + h_1 + l_1$
2	p_2	a_2	b_2	...	h_2	l_2	S_2	
...
n	p_n	a_n	b_n	...	h_n	l_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + \dots + h_n + l_n$
Σ	-	$[a]$	$[b]$...	$[h]$	$[l]$	$[S]$ Σ_1	$\Sigma_1 = [a] + [b] + \dots + [h] + [l]$

2. Tabelul coeficienților ecuațiilor normale:

$[paa]$	$[pab]$	$[pah]$	$[pal]$	$[paS]$	Control: $[paS] = [paa]$ + $[pab]$ + ... + $[pah]$ + $[pal]$
	$[pbb]$	$[pbh]$	$[pbl]$	$[pbS]$	$[pbS] = [pab] + [pbb]$ + ... + $[pbh] + [pbl]$
	
			$[phh]$	$[phl]$	$[phS]$	$[phS] = [pah] + [pbh]$ + ... + $[phh] + [phl]$
				$[pll]$	$[plS]$	control

5.3 REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NORMALE

Metodele de rezolvare a sistemelor liniare se împart în două grupe:

1. **Metode exacte**, care dau un algoritm finit pentru calculul soluției (exemplu: regula lui Cramer, metoda eliminării succesive a lui Gauss).

2. **Metode iterative**, care permit găsirea soluției cu o eroare oricât de mică dar nenulă printr-un proces unic numit proces de iterație.

Metodele iterative sunt simple și comode în cazul în care se folosesc calculatoarele electronice.

Pentru practica geodezică se folosește cu succes rezolvarea sistemelor de ecuații normale prin metoda eliminărilor succesive a lui Gauss.

Principiul metodei:

Considerăm un sistem normal de 3 ecuații:

$$\begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [al] &= 0 \\ [ab]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] &= 0 \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cl] &= 0 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Metoda de rezolvare constă în reducerea de necunoscute, prin eliminări succesive:

Din prima ecuație a sistemului (5.34) se scoate necunoscuta x_1 și se introduce în celelalte două:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[al]}{[aa]} \\ [ab] \left(-\frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[al]}{[aa]} \right) + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] &= 0 \\ -\frac{[ab]^2}{[aa]}x_2 - \frac{[ab][ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[ab][al]}{[aa]} + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bl] &= 0 \\ \left\{ [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \right\} x_2 + \left\{ [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \right\} x_3 + \left\{ [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

În cea de-a treia ecuație vom obține:

5.35

$$\begin{aligned}
 [ac] \left(-\frac{[ab]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}x_3 - \frac{[al]}{[aa]} \right) + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cl] &= 0 \\
 -\frac{[ab][ac]}{[aa]}x_2 - \frac{[ac]^2}{[aa]}x_3 - \frac{[ac][al]}{[aa]} + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cl] &= 0 \\
 \left\{ [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \right\} x_2 + \left\{ [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} \right\} x_3 + [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} &= 0
 \end{aligned}$$

Se fac următoarele notații:

$$\begin{aligned}
 [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} &= [bb.1] \\
 [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} &= [bc.1] \\
 [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} &= [bl.1] \\
 [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} &= [cc.1]; \\
 [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} &= [cl.1]
 \end{aligned}$$

5.36

Aceste expresii poartă denumirea de *algoritmi Gauss* de ordinul I. Cu ajutorul lor, ecuațiile se vor scrie:

$$\begin{aligned}
 [bb.1]x_2 + [bc.1]x_3 + [bl.1] &= 0 \\
 [bc.1]x_2 + [cc.1]x_3 + [cl.1] &= 0
 \end{aligned}$$

5.37

În continuare, vom elimina necunoscuta x_2 procedând analog:

din prima ecuație se scoate x_2 și se înlocuiește în cea de-a doua:

$$x_2 = -\frac{[bc.1]}{[bb.1]}x_3 - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
 [bc.1] \left(-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}x_3 - \frac{[bl.1]}{[bb.1]} \right) + [cc.1]x_3 + [cl.1] &= 0 \\
 -\frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}x_3 - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]} + [cc.1]x_3 + [cl.1] &= 0 \\
 \left\{ [cc.1] - \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]} \right\} x_3 + \left\{ [cl.1] - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]} \right\} &= 0
 \end{aligned}$$

5.38

Adoptând următoarele notații:

$$[cc.1] - \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]} = [cc.2]$$

$$[cl.1] - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]} = [cl.2]$$

care poartă denumirea de algoritmi Gauss de ordinul II, ecuația finală va fi:

$$[cc.2]x_3 + [cl.2] = 0 \quad 5.39$$

$$\text{Deci: } x_3 = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]} \quad 5.40$$

Prin eliminări succesive am reușit să aducem sistemul la o formă triunghiulară.

Pornind în ordine inversă, se determină apoi x_2 și x_1 .

Toate calculele se fac într-un tabel numit *schema Gauss*

Relația de verificare a soluțiilor obținute:

$$[(S-l)x] = -[l] \quad 5.41$$

Această relație se obține prin însumarea tuturor ecuațiilor (5.34), adică a elementelor respective de pe liniile ecuațiilor din schemă.

Soluțiile se mai pot verifica introducându-le în toate ecuațiile, pe care trebuie să le satisfacă.

Această verificare va fi satisfăcută în limita preciziei de calcul - precizie care depinde de numărul de cifre utilizat în calcule, de numărul ecuațiilor și mai ales de conformarea sistemului.

Se prezintă mai jos modul de calcul în schema Gauss:

a) se înscriu coeficienții ecuațiilor normale pe liniile:

-pentru ecuația I în linia (1)

-pentru ecuația II în linia (3)

-pentru ecuația III în linia (6)

Datorită faptului că sistemul este simetric e suficient să se înscrie coeficienții de pe diagonală și cei de deasupra.

b) Se împarte linia (1) cu coeficientul $-[aa]$, obținându-se linia (2) care nu reprezintă altceva decât prima ecuație eliminatoare (5.35)

c) Linia (4), care reprezintă ecuația sistemului redus odată se obține astfel:

-se ia drept PIVOT elementul din linia (2) coloana (2), adică $-\frac{[ab]}{[aa]}$ se înmulțește succesiv cu

elementele din linia (1), iar la aceste valori se adaugă coeficienții din linia (3).

exemplu:

$$[bb.1] = -\frac{[ab]}{[aa]} \times [ab] + [bb]$$

Se va face obligatoriu controlul: $[bb.1] + [bc.1] + [bl.1] = [bs.1]$

Schema Gauss redusă

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	-
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	se face control
$x_1 =$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	-
	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$	control
-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}$		control
$x_2 =$	$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$		-
	$[cc.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$		control
-1	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$-\frac{[cs.2]}{[cc.2]}$			control
			$x_3 =$		

d) Linia (5) rezultă din linia (4), care se împarte cu $-[bb.1]$ reprezentând din nou o ecuație eliminatoare.

e) Pentru deducerea algoritmilor Gauss de ordinul II din linia (7) - linie ce reprezintă ecuația redusă de două ori 2.72, se procedează astfel:

-se vor considera doi pivoți și anume:

elementul din linia (2) coloana (3), adică $-\frac{[ac]}{[aa]}$ și $-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$. Acești pivoți se înmulțesc

succesiv cu elementele din linia de deasupra lor, se adună aceste produse și apoi se însumează și cu elementele corespunzătoare din linia (6).

exemplu:

$$[cl.2] = -\frac{[ac]}{[aa]} \times [al] + \left\{ -\frac{[bc.1]}{[bb.1]} \times [bl.1] \right\} + [cl]$$

Controlul obligatoriu al acestei linii (7) este:

$$[cc.2] + [cl.2] = [cs.2]$$

Linia (8) se deduce din (7), împărțind-o pe aceasta cu $-[cc.2]$.

Se deduc necunoscutele în următoarea ordine:

-din linia (8) rezultă direct $x_3 = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$

-din linia (5) se deduce x_2 , iar din linia (2) se determină și x_1 .

5.6 TRATAREA MATRICEALĂ A MĂSURĂTORILOR INDIRECTE

Se dă sistemul liniar al ecuațiilor de corecții:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + h_i x_h + l_i \quad 5.90$$

$$i = 1 - n$$

$$n > h$$

a) Cazul măsurătorilor de aceeași precizie

Adoptăm următoarele notații:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & h_n \end{pmatrix} \quad (\text{vectorul coeficienților}) \quad 5.91$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_h \end{pmatrix} \quad (\text{vector coloană al necunoscutelor}) \quad 5.92$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (\text{vector coloană al corecțiilor}) \quad 5.93$$

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \quad (\text{vector coloană al termenilor liberi}) \quad 5.94$$

Sistemul liniar inițial devine având în vedere notațiile făcute:

$$V_{(n,1)} = A_{(n,h)} \cdot X_{(h,1)} + L_{(n,1)} \quad 5.95$$

Punând condiția de minim impusă de metoda celor mai mici pătrate, rezultă:

$$V^T V \rightarrow \text{minim}$$

Deci, derivatele parțiale în raport cu necunoscuta x trebuie să fie egale cu zero; cu alte cuvinte minimumul acestei funcții în x se află punând condiția $\nabla f = 0$.

$$(AX + L)^T \cdot (AX + L) \rightarrow \text{min.} \quad 5.96$$

Derivând, se va obține: (ținând cont de proprietatea gradientului)

$$\nabla(f_1, f_2) = (\nabla f_1)^T \cdot f_2 + (\nabla f_2)^T \cdot f_1 \quad 5.97$$

$$\begin{aligned}
A^T(AX + L) + A^T(AX + L) &= 0 \\
A^T(AX + L) &= 0 \\
A^T AX + A^T L = 0 &\Rightarrow X = -\frac{A^T L}{A^T A} = \\
&= -(A^T A)^{-1} \cdot A^T L = -N^{-1} A^T L \\
X &= -N^{-1} A^T L
\end{aligned}
\tag{5.98}$$

b) Cazul măsurătorilor ponderate

Pornim de la același sistem de ecuații de corecții:

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \dots + h_i x_n + l_i \Rightarrow p_i \tag{5.99}$$

$$i = l - n$$

$$n > h$$

Apare în plus față de cazul măsurătorilor de aceeași precizie matricea ponderilor:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}
\tag{5.100}$$

Sistemul inițial se va scrie:

$$V = AX + L \tag{5.101}$$

iar condiția de minim va deveni în acest caz:

$$V^T P V \rightarrow \min. \tag{5.102}$$

Deci:

$$(AX + L)^T \cdot P(AX + L) \rightarrow \min. \tag{5.103}$$

$$\nabla f = 0$$

$$A^T P(AX + L) + A^T P(AX + L) = 0$$

$$2A^T PAX + 2A^T PL = 0 \tag{5.104}$$

$$X = -\frac{A^T PL}{A^T PA} = -(A^T PA)^{-1} \cdot A^T PL$$

$$X = -N^{-1} A^T PL$$

6. ALGORITMI PENTRU COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR CONDIȚIONATE

Metoda măsurătorilor condiționate se aplică în general în geodezie, la compensarea rețelelor de sprijin (triangulație, trilateratie, poligonometrie, nivelment).

O rețea de sprijin, de exemplu de triangulație, este constituită dintr-o succesiune de figuri geometrice (triunghiuri, patrulatere, poligoane). Pentru realizarea acestei rețele se măsoară unghiuri și laturi. În general însă, pentru eliminarea greșelilor și îmbunătățirea preciziei, nu ne limităm la a măsura un număr de elemente (unghiuri, laturi) strict necesare pentru construirea rețelei respective, ci se măsoară un număr de elemente în plus. Este evident căci între unghiurile măsurate, precum și între unghiuri și laturi, există anumite relații geometrice impuse de geometria rețelei.

Pentru rezolvarea problemei de compensare este util să se evalueze numărul acestor relații cât și caracterul lor, păstrând însă doar relațiile independente.

Numărul ecuațiilor de condiție independente este egal cu numărul măsurătorilor efectuate în plus (nr. gradelor de libertate).

Exemplu:

Pentru construirea unui triunghi sunt necesare 3 elemente dintre care cel puțin unul liniar. Presupunând că este cunoscută o latură, atunci este necesar și suficient, pentru construirea triunghiului să se măsoare două unghiuri.

Dacă se măsoară și cel de-al treilea unghi, atunci ele trebuie să satisfacă condiția:

$$A + B + C = 200^g \quad 6.1$$

Având deci o măsurătoare în plus, este necesar să întocmim o ecuație de condiție.

Deoarece valorile obținute din măsurători sunt afectate în mod inerent de erori, condiția (6.1) nu va fi riguros satisfăcută, de aceea:

$$A + B + C - 200^g = w \quad 6.2$$

unde, discordanța w reprezintă *neînchiderea* în triunghi ca urmare a erorilor de măsurare.

Pentru a satisface condiția (6.1) este necesar ca valorile măsurate, afectate de erori să fie modificate cu anumite cantități, numite corecții (v_i).

Vom avea astfel:

$$(A + v_A) + (B + v_B) + (C + v_C) - 200^g = 0 \quad 6.3$$

Ținând seama de (6.2), se obține ecuația de condiție a corecțiilor:

$$v_A + v_B + v_C + w = 0 \quad 6.4$$

Cazul general

Se consideră n mărimi X_1, X_2, \dots, X_n pentru determinarea cărora s-au efectuat măsurători directe, găsindu-se rezultatele l_1, l_2, \dots, l_n . Presupunem că cele n necunoscute X_1, X_2, \dots, X_n , trebuie să satisfacă r relații de condiție independente între ele (rezultă deci că numărul mărimilor măsurate în plus este r):

$$\begin{aligned}
 f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\
 f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_r(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Valorile măsurate direct l_1, l_2, \dots, l_n nu vor satisface riguros acest sistem, astfel încât prin înlocuirea necunoscutelor X_1, X_2, \dots, X_n prin l_1, l_2, \dots, l_n vom obține rezultate diferite de zero:

$$\begin{aligned}
 f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) &= w_i \\
 (i = 1, 2, \dots, r)
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Mărimile w_i poartă denumirea de discordanțe, nepotriviri sau *termeni liberi*.

Problema care se pune este de a găsi corecțiile v_1, v_2, \dots, v_n care, aplicate mărimilor măsurate l_1, l_2, \dots, l_n , să facă să dispară aceste mici discordanțe. Deci, pentru a fi satisfăcut sistemul (6.6) trebuie să avem:

$$\begin{aligned}
 X_i &= l_i + v_i, \\
 (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Ecuatiile sistemului (6.5) pot fi liniare sau nu.

În primul caz considerăm că ele sunt de forma:

$$\begin{aligned}
 a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + a_0 &= 0 \\
 b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n + b_0 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_1 X_1 + r_2 X_2 + \dots + r_n X_n + r_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Ținând seama de relația 6.7, acestea devin:

$$\begin{aligned}
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\
 b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

unde:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n + a_0 = 0 \\
 w_2 &= b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_n l_n + b_0 = 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 w_r &= r_1 l_1 + r_2 l_2 + \dots + r_n l_n + r_0 = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

În cazul în care ecuațiile sistemului 6.5 nu sunt liniare, se procedează la liniarizarea acestora.

6.1 LINIARIZAREA ECUAȚIILOR

Ținând seama că mărimile v_i sunt relativ mici, ecuațiile se dezvoltă în serie Taylor, neglijându-se termenii de ordinul II și superior.

Substituind relația 6.7 în 6.5 se obține:

$$f_i(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n) = 0
 \tag{6.11}$$

Relație, care dezvoltată în serie Taylor conduce la:

$$f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial l_k} \right) \cdot v_k + t = 0 \tag{6.12}$$

t reprezintă termenii de ordinul II și superior, care se neglijează.

Făcând notațiile:

$$f_i(l_1, l_2, \dots, l_n) = w_i, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial l_i} \right)_0 = a_i \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial l_i} \right)_0 = b_i \quad \left(\frac{\partial f_r}{\partial l_i} \right)_0 = r_i \tag{6.13}$$

se obține:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r &= 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Acest sistem poartă denumirea de *sistemul liniar al ecuațiilor de condiție a corecțiilor*. Mărimea w reprezintă termenul liber al ecuației de condiție fiind în același timp valoarea ecuației pentru mărimile măsurate. Această observație este utilă pentru calculul practic al termenului liber al ecuațiilor de condiție.

6.2 NORMALIZAREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE

În sistemul liniar al ecuațiilor de condiție (14) întrucât numărul ecuațiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor ($r < n$), sistemul este nedeterminat, gradul de nedeterminare fiind $(n-r)$.

Pentru rezolvarea problemei, deci pentru determinarea tuturor corecțiilor v_i , vom folosi metoda celor mai mici pătrate, adică:

$$\begin{aligned} [vv] &= \min. \\ [pvv] &= \min. \end{aligned} \tag{6.15}$$

(în cazul măsurătorilor ponderate).

Corecțiile de determinat v_i , trebuind să satisfacă atât condiția de minim (6.15) cât și sistemul liniar, avem de-a face cu o problemă de *minim condiționat*, care se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange.

6.2.1 Măsurători condiționate de aceeași precizie

Funcția Lagrange, introdusă în acest scop are forma:

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2, \dots, v_n, k_1, k_2, \dots, k_r) &= v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 - \\ &\quad - 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1) - \\ &\quad - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2) - \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r) = \min. \end{aligned} \tag{6.16}$$

În expresia acestei funcții, parametri k_i se numesc *multiplicatori Lagrange sau corelate Gauss*.

Punctele staționare libere ale funcției se determină, anulând derivatele parțiale în număr de $(n+r)$ ale funcției ϕ în raport cu $v_1, v_2, \dots, v_n, k_1, k_2, \dots, k_r$.

Punctele de extrem legate ale funcției (6.16) se găsesc printre punctele staționare libere.

Efectuând derivatele parțiale ale funcției obținem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = 2v_i - 2a_i k_1 - 2b_i k_2 \dots - 2r_i k_r = 0 \quad 6.17$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 = 0 \quad 6.18$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r = 0$$

Sistemul (6.17) se mai poate scrie sub forma:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad 6.19$$

În sistemele (6.17) și (6.18) avem $(n+r)$ ecuații și $(n+r)$ necunoscute, deci se pot rezolva.

Substituind valorile corecțiilor v_i date de (6.19) în sistemul (6.18) și efectuând calculele, rezultă:

$$a_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + a_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots$$

$$+ a_n(a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_1 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_1(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + r_2(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots$$

$$+ r_n(a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_r = 0$$

sau

$$a_1 a_1 k_1 + a_1 b_1 k_2 + \dots + a_1 r_1 k_r + a_2 a_2 k_1 + a_2 b_2 k_2 + \dots + a_2 r_2 k_r + \dots + a_n a_n k_1 + a_n b_n k_2$$

$$+ \dots + a_n r_n k_r + w_1 = 0$$

$$a_1 b_1 k_1 + b_1 b_1 k_2 + \dots + b_1 r_1 k_r + a_2 b_2 k_1 + b_2 b_2 k_2 + \dots + b_2 r_2 k_r + \dots + a_n b_n k_1 + b_n b_n k_2$$

$$+ \dots + b_n r_n k_r + w_2 = 0$$

$$a_1 r_1 k_1 + b_1 r_1 k_2 + \dots + r_1 r_1 k_r + a_2 r_2 k_1 + b_2 r_2 k_2 + \dots + r_2 r_2 k_r + \dots + a_n r_n k_1 + b_n r_n k_2$$

$$+ \dots + r_n r_n k_r + w_r = 0$$

Trecând la sumele Gauss se va obține:

$$\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + \dots + [ar]k_r + w_1 &= 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + \dots + [br]k_r + w_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [ar]k_1 + [br]k_2 + \dots + [rr]k_r + w_r &= 0 \end{aligned} \quad 6.20$$

Sistemul (6.20) având r ecuații liniare și r necunoscute, reprezintă *sistemul normal al corelatelor*.

Matricea sistemului normal al corelatelor fiind simetrică și pozitiv definită, are inversă. Deci, sistemul are soluție și aceasta este unică.

Rezolvând sistemul cu una din metodele cunoscute se determină corelatele k_1, k_2, \dots, k_r .

Introducând valorile găsite pentru corelatele k în sistemul (6.19), se determină valorile cele mai probabile ale corecțiilor v . Aceste corecții se aplică apoi mărimilor măsurate direct, l_i conform relației:

$$X_i = l_i + v_i,$$

rezultând valorile compensate ale mărimilor X_i .

6.2.1.1 Calculul practic al coeficienților ecuațiilor normale

Pornind de la un sistem format din 3 ecuații de condiție a corecțiilor:

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n + w_1 &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n + w_2 &= 0 \\ c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n + w_3 &= 0 \end{aligned} \quad 6.21$$

sistemul normal al corelatelor va fi:

$$\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 &= 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 &= 0 \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned} \quad 6.22$$

Deducerea practică a coeficienților ecuațiilor din sistem cât și calculele de control respective, este arătată în tabelul de mai jos:

Tabelul coeficienților ecuațiilor de condiție a corecțiilor

Nr. crt.	a _i	b _i	c _i	S _i	Notății și control
1	a ₁	b ₁	c ₁	S ₁	S ₁ = a ₁ + b ₁ + c ₁
2	a ₂	b ₂	c ₂	S ₂	S ₂ = a ₂ + b ₂ + c ₂
.....a
.	n	b _n	c _n	S _n	S _n = a _n + b _n + c _n
n					
Σ	[a]	[b]	[c]	Σ	Σ = [a] + [b] + [c] = [S]
				[S]	

Tabelul coeficienților sistemului normal

[aa]	[ab]	[ac]	[aS]	[aS] = [aa] + [ab] + [ac]
	[bb]	[bc]	[bS]	[bS] = [ab] + [bb] + [bc]
		[cc]	[cS]	[cS] = [ac] + [bc] + [cc]

6.2.2 Măsurători condiționate de precizii diferite (ponderate)

În acest caz ca și în situația măsurătorilor de aceeași precizie, corecțiile v_i ce urmează a fi determinate, trebuie să satisfacă atât condiția $[pvv] = \min.$ cât și sistemul liniar al ecuațiilor de condiție a corecțiilor (6.14):

Este deci tot o problemă de minim condiționat.

Funcția Lagrange în acest caz va fi de tipul:

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2, \dots, v_n, k_1, k_2, \dots, k_r) = & p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 - \\ & - 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1) \\ & - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2) \\ & \dots \dots \dots \\ & - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r) = \min. \end{aligned} \quad 6.23$$

Efectuând derivatele parțiale în raport cu v și k și punând de asemenea condiția ca acestea să fie nule, se obține:

$$\frac{\partial \phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2a_i k_1 - 2b_i k_2 \dots - 2r_i k_r = 0 \quad 6.24$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 = 0$$

$$\text{sau : } [av] + w_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_2} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 = 0 \quad 6.25$$

$$\text{sau : } [bv] + w_2 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k_r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r = 0$$

$$\text{sau : } [rv] + w_r = 0$$

Ecuațiile (6.24) mai pot fi scrise sub forma:

$$v_i = \frac{1}{p_i}(a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 6.26$$

Relațiile (6.25) și (6.26) formează un sistem de $(n+r)$ ecuații cu $(n+r)$ necunoscute. Pentru a elimina o parte din necunoscute se substituie necunoscutele v_i din (6.24) în (6.25). Efectuând calculele și grupând convenabil termenii se obține sistemul normal al corelatelor în cazul ponderat:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{p_1}(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{a_2}{p_2}(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots \\ & + \frac{a_n}{p_n}(a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_1 = 0 \\ & \frac{b_1}{p_1}(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{b_2}{p_2}(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots \\ & + \frac{b_n}{p_n}(a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \frac{r_1}{p_1}(a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r) + \frac{r_2}{p_2}(a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r) + \dots \\ & + \frac{r_n}{p_n}(a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r) + w_r = 0 \end{aligned}$$

Efectuând calculele:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 a_1}{p_1} k_1 + \frac{a_1 b_1}{p_1} k_2 + \dots + \frac{a_1 r_1}{p_1} k_r + \frac{a_2 a_2}{p_2} k_1 + \frac{a_2 b_2}{p_2} k_2 + \dots + \frac{a_2 r_2}{p_2} k_r + \dots \\ & + \frac{a_n a_n}{p_n} k_1 + \frac{a_n b_n}{p_n} k_2 + \dots + \frac{a_n r_n}{p_n} k_r + w_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 b_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1 b_1}{p_1} k_2 + \dots + \frac{b_1 r_1}{p_1} k_r + \frac{a_2 b_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2 b_2}{p_2} k_2 + \dots + \frac{b_2 r_2}{p_2} k_r + \dots \\ & + \frac{a_n b_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n b_n}{p_n} k_2 + \dots + \frac{b_n r_n}{p_n} k_r + w_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \frac{a_1 r_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1 r_1}{p_1} k_2 + \dots + \frac{r_1 r_1}{p_1} k_r + \frac{a_2 r_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2 r_2}{p_2} k_2 + \dots + \frac{r_2 r_2}{p_2} k_r + \dots \\ & + \frac{a_n r_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n r_n}{p_n} k_2 + \dots + \frac{r_n r_n}{p_n} k_r + w_r = 0 \end{aligned}$$

Trecând la notațiile Gauss, vom obține forma sistemului normal al corelatelor în cazul ponderat:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[\frac{ab}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{ar}{p} \right] k_r + w_1 &= 0 \\
 \left[\frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bb}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{br}{p} \right] k_r + w_2 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left[\frac{ar}{p} \right] k_1 + \left[\frac{br}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{rr}{p} \right] k_r + w_r &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

Acest sistem se poate rezolva, matricea atașată fiind nesingulară ($\Delta \neq 0$).
 Soluțiile obținute (corelatele k) permit determinarea celorlalte necunoscute (corecțiile v) din (6.26).

În cazul sistemelor mici, determinarea coeficienților sistemului normal al corelatelor se face conform următoarelor tabele:

Tabelul coeficienților ecuațiilor de corecție și al ponderilor

Nr. crt.	$1/p_i$	a_i	b_i	c_i	S_i	Control
1	$1/p_1$	a_1	b_1	c_1	S_1	$S_1 = a_1 + b_1 + c_1$
2	$1/p_2$	a_2	b_2	c_2	S_2	$S_2 = a_2 + b_2 + c_2$
.....
n	$1/p_n$	a_n	b_n	c_n	S_n	$S_n = a_n + b_n + c_n$
Σ	-	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[S]$ Σ	$\Sigma = [a] + [b] + [c] = [S]$

Tabelul coeficienților sistemului normal

$\left[\frac{aa}{p} \right]$	$\left[\frac{ab}{p} \right]$	$\left[\frac{ac}{p} \right]$	$\left[\frac{aS}{p} \right]$	$\left[\frac{aS}{p} \right] = \left[\frac{aa}{p} \right] + \left[\frac{ab}{p} \right] + \left[\frac{ac}{p} \right]$
	$\left[\frac{bb}{p} \right]$	$\left[\frac{bc}{p} \right]$	$\left[\frac{bS}{p} \right]$	$\left[\frac{bS}{p} \right] = \left[\frac{ab}{p} \right] + \left[\frac{bb}{p} \right] + \left[\frac{bc}{p} \right]$
		$\left[\frac{cc}{p} \right]$	$\left[\frac{cS}{p} \right]$	$\left[\frac{cS}{p} \right] = \left[\frac{ac}{p} \right] + \left[\frac{bc}{p} \right] + \left[\frac{cc}{p} \right]$

6.3 REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NORMALE ALE CORELATELOR

Metodele de rezolvare a acestor sisteme sunt aceleași ca la rezolvarea sistemelor normale de la măsurătorile indirecte .

Necunoscutele x_i de la măsurătorile indirecte devin corelatele k_i , iar termenii liberi $[a]$, $[b]$, etc . devin $w_1, w_2, \text{etc.}$

Schema Gauss redusă pentru rezolvarea unui sistem de 3 ecuații, spre exemplu, are următoarea formă:

k_1	k_2	k_3	w	S	Control
[aa]	[ab]	[ac]	w_1	S_1	-
-1	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-w_1/[aa]$	$-S_1/[aa]$	control
$k_1 = \dots$	[bb]	[bc]	w_2	S_2	-
	[bb.1]	[bc.1]	$[w_{2.1}]$	$[S_{2.1}]$	control
	-1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[w_{2.1}]}{[bb.1]}$	$-\frac{[S_{2.1}]}{[bb.1]}$	control
	$k_2 = \dots$	[cc]	w_3	S_3	-
		[cc.2]	$[w_{3.2}]$	$[S_{3.2}]$	control
		-1	$-\frac{[w_{3.2}]}{[cc.2]}$	$-\frac{[S_{3.2}]}{[cc.2]}$	control
		$k_3 = \dots$			

Verificarea soluțiilor se face printr-o relație unică de forma:

$$[(S - w) k] = - [w] \quad 6.28$$

Verificări de calcul

a) Controlul (verificarea) calculului corecțiilor:

Relațiile de calcul a corecțiilor sunt:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r \quad \text{sau} \quad v_i = \frac{1}{p_i} (a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r)$$

Dacă se însumează toate relațiile din primul caz se obține:

$$[v] = [a]k_1 + [b]k_2 + \dots + [r]k_r \quad 6.29$$

sau, pentru al doilea caz:

$$[pv] = [a]k_1 + [b]k_2 + \dots + [r]k_r \quad 6.30$$

Acestea constituie cele două relații de control pentru calculul corect al corecțiilor.

În afară de acestea, este necesar ca aceste corecții v_i să satisfacă ecuațiile liniare de condiție a corecțiilor:

$$\begin{aligned}
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\
 b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

b) Verificarea liniarizării și a calculului termenilor liberi

c) Verificarea rezolvării sistemului normal al corelatelor

În faza de reducere la forma triunghiulară, controlul se face pe rânduri, așa cum se arată în schema Gauss.

Pentru verificarea deducerii corecte a corelatelor k_i , acestea pot fi introduse în ecuațiile sistemului normal pe care trebuie să le satisfacă în limita preciziei de calcul, sau, mai economic, prin relația unică: $[(S - w) k] = - [w]$.

d) Verificarea calculării sumei pătratelor corecțiilor

$$[pvv] = -[kw]$$

e) Controlul principal al compensării

Se aplică mărimilor măsurate l_i , corecțiile v_i , adică :

$$X_i = l_i + v_i,$$

și acestea se introduc în ecuațiile de corecție inițiale pe care trebuie să le satisfacă. Dacă nu se întâmplă acest lucru, înseamnă că liniarizarea nu s-a făcut corect (deci, unii coeficienți sunt greșiți) sau termenii liberi nu au fost corect stabiliți.

O particularitate a compensării prin metoda măsurătorilor condiționate, o constituie faptul că în cazul întocmirii sau liniarizării greșite a unei (unor) ecuații, deși corecțiile obținute în urma compensării nu sunt cele juste, se verifică toate ecuațiile de condiție, cu excepția celor greșit întocmite.

Această particularitate ne ajută să localizăm greșeala, deci să o depistăm mai ușor. Dacă doar termenul liber al unei (unor) ecuații a fost stabilit greșit - numai ca semn - atunci, în controlul final, în loc de a se anula discordanța respectivă, ea se dublează.

6.4 ALGORITMI PENTRU COMPENSAREA MĂSURĂTORILOR ETEROGENE

Dacă mai multe mărimi de natură diferită (unghiuri, lungimi, diferențe de nivel) urmează a fi compensate în comun, problema se poate trata în două moduri:

- se calculează corecțiile omogenizate, care sunt adimensionale și neponderate. Omogenizarea corecțiilor se obține dacă se împart relațiile care dau corecțiile în funcție de corelate cu erorile unităților de pondere, adică:

$$\begin{aligned}
 v_i &= a_i k_1 + b_i k_2 + \dots + r_i k_r \\
 &(i = 1 \dots n)
 \end{aligned}$$

Observații:

Deși transformările sunt posibile în ambele sensuri, acestea nu se recomandă a fi efectuate, trebuind să se stabilească de la început metoda prin care se urmărește să se facă compensarea, rezultatele fiind însă aceleași. Un criteriu de alegere îl constituie numărul de ecuații normale rezultate.

Mijloacele moderne de calcul au schimbat optica, preferându-se metoda măsurătorilor indirecte, care se pretează la un grad mai mare de automatizare.

6.5 Model de calcul

Să se compenseze unghiurile unui triunghi plan și să se deducă precizia lor după compensare, cunoscându-se din măsurători de aceeași precizie următoarele valori medii:

$$\begin{aligned}\alpha' &= 47^{\text{g}}15^{\text{c}}17^{\text{cc}} \\ \beta' &= 73^{\text{g}}43^{\text{c}}50^{\text{cc}} \\ \gamma' &= 794145^{\text{cc}}\end{aligned}$$

Rezolvare

Neînchiderea unghiulară va fi egală cu:

$$w = \alpha' + \beta' + \gamma' - 200^{\text{g}} = +12^{\text{cc}}$$

Ecuatia de condiție a figurii este:

$$\alpha + \beta + \gamma - 200^{\text{g}} = 0$$

Dar:

$$\alpha = \alpha' + v_{\alpha}$$

$$\beta = \beta' + v_{\beta}$$

$$\gamma = \gamma' + v_{\gamma}$$

Deci, se poate scrie ecuația de condiție finală:

$$v_{\alpha} + v_{\beta} + v_{\gamma} + 12^{\text{cc}} = 0$$

Având o singură ecuație de condiție → vom avea o singură corelată k , deci sistemul de ecuații normale ale corelatelor se va reduce și el la o singură ecuație normală și anume:

$$[aa]k + w = 0$$

adică:

$$3k + 12^{\text{cc}} = 0 \rightarrow k = -4^{\text{cc}}$$

Aplicând formulele generale ale corecțiilor în funcție de corelate avem:

$$v_1 = a_1 k$$

$$v_2 = a_2 k$$

$$v_3 = a_3 k$$

$$v_1 = k = -\frac{w}{3}$$

și obținem: $v_2 = k = -\frac{w}{3}$

$$v_3 = k = -\frac{w}{3}$$

Deci: $v_1 = v_2 = v_3 = -4^{cc}$

Controlul corecțiilor se face folosind relația:

$$\begin{aligned} [v] &= -[k \cdot w] \\ 48 &= -(-4 \cdot 12) \\ 48 &= 48 \end{aligned}$$

Valorile compensate ale unghiurilor triunghiului plan vor fi:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + v_\alpha = 47.15.13 \\ \beta &= \beta' + v_\beta = 73.43.46 \\ \gamma &= \gamma' + v_\gamma = 79.41.41 \end{aligned}$$

Control: $\alpha + \beta + \gamma = 200^s.00.00$

Precizia este dată de:

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm \sqrt{\frac{[w]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{48}{1}} = \pm 6^{cc},9$$

6.5 TRATAREA MATRICEALĂ A MĂSURĂTORILOR CONDIȚIONATE

Considerăm sistemul liniar al ecuațiilor de condiție a corecțiilor:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ \dots & \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r &= 0 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Se fac următoarele notații:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} ; V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} ; W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_r \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

Sistemul se va scrie matriceal sub forma:

$$AV + W = 0 \tag{6.36}$$

Deoarece numărul ecuațiilor este mai mic decât numărul necunoscutelor, pentru rezolvarea problemei se va folosi metoda celor mai mici pătrate, adică $[vv] = \min.$ în cazul măsurărilor de aceeași precizie și $[pvv] = \min.$ în cazul măsurărilor ponderate.

Aceste condiții sunt exprimate matricial astfel:

$$\begin{aligned} [vv] &= V^T V \\ [pvv] &= V^T p V \end{aligned} \quad 6.37$$

în care matricea p are forma:

$$p = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix} \quad 6.38$$

Având o problemă de minim condiționat, funcția Lagrange introdusă va fi de forma:

a) *cazul măsurărilor de aceeași precizie*

$$\varphi = V^T V - 2k^T (AV + W) = \min. \quad 6.39$$

derivată din:

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2, \dots, v_n, k_1, k_2, \dots, k_r) = & v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 - \\ & - 2k_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1) - \\ & - 2k_2(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2) - \\ & \dots \dots \dots \\ & - 2k_r(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r) \end{aligned}$$

Pentru a determina minimumul funcției, trebuie ca:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial k^T} = 0 \quad 6.40$$

Efectuând derivatele parțiale se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial V^T} = V + (V^T)^T - (2k^T A)^T &= 0 \\ 2V - 2A^T k &= 0 \\ V &= A^T k \end{aligned} \quad 6.41$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k^T} = -2(AV + W) = 0 \quad \Rightarrow \quad AV + W = 0 \quad 6.42$$

dacă în relația (6.42) ținem seama de (6.41):

$$AA^T k + W = 0 \quad 6.43$$

Relația (6.43) reprezintă *sistemul normal scris sub formă matriceală*.

Rezolvarea sistemului impune efectuarea următoarelor notații:

$$AA^T = N \quad 6.44$$

deci:

$$Nk + W = 0 \quad 6.45$$

Înmulțim la stânga cu N^{-1} și ținem seama că $N^{-1}N = E$ (matricea unitate):

$$N^{-1}Nk + N^{-1}W = 0 \quad 6.46$$

Rezultă:

$$k = -N^{-1}W \quad 6.47$$

Revenim la relația (6.41) unde, $V = A^T k$

Înlocuind valorile corelatelor k din (6.47), rezultă:

$$V = -A^T N^{-1} W \quad 6.48$$

Cu ajutorul acestei formule se determină corecțiile v și mai departe valorile compensate

$$X_i = l_i + v_i \quad 6.49$$

b) *cazul măsurătorilor ponderate*

Pornim de la condiția de minim impusă de metoda celor mai mici pătrate:

$$V^T p V = \min. \quad 6.50$$

Funcția Lagrange în acest caz va avea forma:

$$\phi = V^T p V - 2k^T (AV + W) = \min \quad 6.51$$

derivată din:

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2, \dots, v_n, k_1, k_2, \dots, k_r) = & p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 - \\ & - 2k_1 (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1) \\ & - 2k_2 (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2) \\ & \dots \dots \dots \\ & - 2k_r (r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r) \end{aligned}$$

Condiția de minim implică:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V^T} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial K^T} = 0 \quad 6.52$$

Efectuând derivatele parțiale obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial V^T} = pV + (V^T p)^T - 2(K^T A)^T & = 0 \\ 2pV - 2A^T k & = 0 \\ p^{-1} pV = A^T k & \\ p^{-1} pV = p^{-1} A^T k & \end{aligned} \quad 6.53$$

de unde:

$$V = p^{-1} A^T k \quad 6.54$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k^T} = -2(AV + W) = 0 \quad \Rightarrow \quad AV + W = 0 \quad 6.55$$

Înlocuind pe V din relația (6.54) în (6.55) obținem *sistemul normal* sub forma:

$$A p^{-1} A^T k + W = 0 \quad 6.56$$

$$\text{Notăm } A p^{-1} A^T = N \quad 6.57$$

$$\text{deci: } N k + W = 0 \quad 6.58$$

Înmulțim la stânga tot sistemul cu N^{-1} :

$$N^{-1} N k + N^{-1} W = 0 \quad 6.59$$

↓
E

$$k = -N^{-1} W \quad 6.60$$

Cu ajutorul corelatelor k se deduc apoi corecțiile din (6.54):

$$V = -p^{-1} A^T N^{-1} W \quad 6.61$$

Mergând mai departe, se vor determina valorile compensate ale măsurătorilor:

$$X_i = l_i + v_i \quad 6.62$$

7. MODELE FUNCȚIONAL - STOCHASTICE FOLOSITE CURENT LA PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR EFECTUATE ÎN REȚELELE GEODEZICE DE SPRIJIN

Proiectarea rețelelor geodezice de sprijin constituie o operație complexă, proiectul trebuind să anticipeze și să se coordoneze corespunzător cu celelalte etape ale realizării rețelelor de sprijin: materializarea rețelelor, executarea observațiilor și prelucrarea acestora.

Se consideră un șir de măsurători:

$$M^{0T} = \left\| M_1^0, M_2^0, \dots, M_n^0 \right\| \quad 7.1$$

efectuate într-o rețea geodezică de sprijin. Se consideră că atât măsurătorile, cât și rețeaua geodezică sunt generalizate, urmând să se facă apoi particularizările și adaptările corespondente.

Componentele vectorului M^0 sunt mărimi rezultate dintr-un proces complex de măsurare, în care intervine un *număr mult mai mare de observații elementare* decât cele care sunt marcate explicit în relația (6.1). Tehnologiile de lucru sau de prelucrare preliminară permit eliminarea erorilor de natură sistematică astfel încât vectorul M^0 va fi considerat o *mărimă aleatoare*. *Valoarea cea mai probabilă* pentru vectorul M^0 (atunci când fiecare mărime componentă ar proveni din media unui număr infinit de mare de determinări) se notează \tilde{M} :

$$\tilde{M} = E(M^0)$$

În mod curent, inclusiv în geodezie, mărimile \tilde{M} sunt denumite *valori adevărate* ale măsurătorilor M^0 ; deși există diferențe între cele două categorii de mărimi, în dezvoltările ulterioare se va accepta egalitatea acestora.

7.1 MODELUL STOCHASTIC

Diferențele dintre măsurătorile M^0 și valorile lor adevărate \tilde{M} sunt denumite uzual *erori adevărate*:

$$\varepsilon = M^0 - \tilde{M} \quad 7.2$$

Proprietățile stochastice ale mărimilor ε sunt definite de matricea de *varianță - covarianță*, sau pe scurt *matricea de covarianță* C_M :

$$C_M = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \left\| \begin{array}{cccc} \sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ r_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & r_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}\sigma_n\sigma_1 & r_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{array} \right\| \quad 7.3$$

S-au folosit notațiile cunoscute:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \text{varianța (teoretică) a măsurătorii } M_i^0; \\ \sigma_i^2 &= E(\varepsilon_i^2); \end{aligned} \quad 7.4$$

r_{ij} = coeficient de corelație între măsurătorile M_i^0 și M_j^0 :

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad 7.5$$

$$\sigma_{ij} = E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \text{covarianța (teoretică) a măsurătorilor } M_i^0 \text{ și } M_j^0. \quad 7.6$$

Mărimea σ_i este denumită în statistică *abatere standard*, iar în geodezie *eroare medie* (sau *eroare medie pătratică*). Este cunoscut, de asemenea faptul că:

$$-1 \leq r_{i,j} \leq +1 \quad 7.7$$

valorile limită ± 1 fiind atinse în cazul în care între variabilele aleatoare ε_i și ε_j există o dependență liniară ($\varepsilon_i = \pm a \varepsilon_j$, unde a este o constantă oarecare).

Ansamblul coeficienților r poate fi grupat în *matricea de corelație* R_M :

$$R_M = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & r_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad 7.8$$

Corelația evidențiază dependența existentă între observațiile inițiale prin coeficienții de corelație dreptunghiulari r_{ij} ai matricei aferente R_M (7.8).

Teoria compensării observațiilor corelate dezvoltată teoretic de *J.M.Tienstra* (1947, 1948) are o deosebită importanță în prelucrarea observațiilor geodezice, deoarece prin aplicarea ei pot fi obținute rezultate riguroase la prelucrarea măsurătorilor $M_1^0 \dots M_n^0$.

Corelațiile sau posibilitățile de dependență stohastică între elementele destinate unei compensări riguroase sunt clasificate în: corelații fizice și corelații matematice.

Analizând procesele de măsurare, se poate afirma că nu există măsurători independente, deoarece erorile instrumentale remanente, precum și condițiile atmosferice de lucru, determină calitatea rezultatelor obținute, grupându-le din acest punct de vedere, ceea ce înseamnă, de fapt, o legătură stohastică între observațiile cuprinse într-un grup. Asemenea *corelații fizice* se pot stabili numai pe baza unor studii profunde ale condițiilor concrete de măsurare.

Corelațiile matematice sunt create în special prin utilizarea unui model matematic incomplet, sau afectat de erori de concepție, pe care *F.R.Helmert* (1924) le-a denumit *erori ale teoriei*.

Exemple de corelații

1. Rezultatele compensării în stație a unor observații unghiulare azimutale în rețelele de triangulație nu sunt întotdeauna elemente independente. Compensarea acestora în rețea ca elemente independente ar fi prin urmare neriguroasă.

2. Transformarea măsurătorilor originale (spre exemplu, direcții măsurate, unghiuri, etc.) și tratarea lor ca observații independente, conduce de asemenea la obținerea unor soluții neriguroase, aproximative.

Astfel, dacă în locul direcțiilor $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$ (fig. 1), care sunt mărimi independente, s-ar compensa unghiurile β_1^0, β_2^0 , obținute din simple transformări liniare (în speță, scăderi de forma $\beta_1^0 = \alpha_2^0 - \alpha_1^0$), ca mărimi independente, s-ar neglija corelația între β_1^0 și β_2^0 .

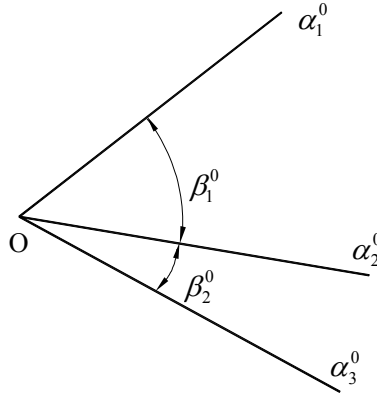


Fig. 1 Exemple de corelații matematice la compensarea rețelelor de triangulație

Dificultățile de determinare a corelațiilor, în special a corelațiilor fizice, se răsfrâng și asupra posibilităților practice, de determinare a matricei de covarianță C_M .

Este cunoscută, legătura:

$$C_M = \sigma_0^2 \cdot Q_M \quad 7.9$$

unde σ_0^2 este o constantă, denumită *varianța unității de pondere*, iar Q_M este matricea cofactorilor măsurătorilor.

$$Q_M = \frac{1}{\sigma_0^2} C_M = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \dots & Q_{nn} \end{vmatrix} \quad 7.10$$

Coefficienții Q sunt numiți *cofactori* sau *coeficienți de pondere*. În raport cu aceștia se poate formula o altă posibilitate de determinare a coeficienților de corelație:

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad 7.11$$

Condiția necesară și suficientă ca măsurătorile M_i^0 să fie independente este ca toți coeficienții de pondere dreptunghiulari ai matricii cofactorilor (7.10) să fie nuli:

$$Q_{ij} = 0; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad 7.12$$

$$i \neq j$$

Funcțiile pentru care sunt îndeplinite toate condițiile posibile de tipul (6.12) se numesc *funcții ortogonale* și au o deosebită importanță în teoria prelucrării observațiilor deoarece pot fi tratate ca elemente independente într-o prelucrare ulterioară, având același caracter de independență ca și observațiile originale.

Matricele C_M și Q_M sunt pozitiv definite, astfel încât admit matrice inverse.

Se notează:

$$P = Q_M^{-1} \quad 7.13$$

matricea P fiind numită *matricea ponderilor*.

Prin modelul stochastic al unui proces de prelucrare se înțelege uzual matricea Q_M , a cofactorilor, (sau P , matricea ponderilor).

Particularizare: În practica lucrărilor geodezice se introduce frecvent ipoteza independenței observațiilor geodezice:

$$r_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ i \neq j \quad 7.14$$

Într-un asemenea caz matricea cofactorilor și respectiv matricea ponderilor devin matrice diagonale:

$$Q_M = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{vmatrix} \quad P = \begin{vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{vmatrix} \quad 7.15, 7.16$$

Avându-se în vedere (7.13) rezultă că legătura dintre elementele de pe diagonalele acestor ultime matrice este dată de relația:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad 7.17$$

Mărimile p se numesc ponderi. Presupunând că una dintre măsurătorile oarecare M_k^0 are abaterea standard σ_k egală cu valoarea constantei σ_0 , rezultă că ponderea acestei observații va fi:

$$p_k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_k^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2} = 1 \quad 7.18$$

motiv pentru care σ_0 se numește *abaterea standard a unității de pondere*.

Teoria erorilor și metoda celor mai mici pătrate oferă o gamă largă de posibilități de prelucrare a observațiilor geodezice.

Dintre acestea, două intervin în mod frecvent în practica prelucrării observațiilor efectuate în rețele geodezice și anume :

- **metoda observațiilor indirecte**
- **metoda observațiilor condiționate**

care se vor examina în continuare din punctul de vedere al posibilităților concrete de utilizare.

7.2 PRELUCRAREA MĂSURĂTORILOR GEODEZICE PRIN METODA OBSERVAȚIILOR INDIRECTE

7.2.1 Modelul funcțional

Măsurătorile $M_i^0 (i=1, 2, \dots, n)$ sunt efectuate în rețeaua geodezică pentru determinarea unui număr de u parametri prin care se definește, de cele mai multe ori, amplasamentul punctelor (de exemplu în poziție planimetrică, în înălțime sau într-un sistem tridimensional, etc.) care formează rețeaua geodezică.

Vom nota cu \tilde{X} mărimea acestor parametri, care s-ar determina în eventualitatea utilizării valorilor adevărate \tilde{M} :

$$\tilde{X}^T = [\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u] \quad 7.19$$

Determinarea parametrilor se realizează prin intermediul unor relații între aceștia și mărimile \tilde{M} , relații care depind de geometria intrinsecă a rețelei geodezice considerate, precum și de natura sau tipul măsurătorilor geodezice care stau la baza determinării:

$$\tilde{M} = \varphi(\tilde{X}) \quad 7.20$$

În general relațiile (7.20) nu au o formă liniară și de aceea acestea constituie **modelul funcțional neliniarizat al prelucrării măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor indirecte**.

Datorită imperfecțiunilor inerente, specifice oricărui proces de observații (determinate de gradul de dezvoltare a tehnicii folosite, de condițiile naturale concrete în care se efectuează observațiile, de calificarea operatorului, etc.), precum și datorită faptului că în determinările practice, efective, numărul de măsurători asupra unei mărimi nu poate fi infinit de mare, valorile numerice pentru σ , σ^2 , ε și respectiv \tilde{X} , \tilde{M} rămân necunoscute. Prin prelucrări, bazate pe diverse ipoteze, se vor obține *valori estimate* ale acestor mărimi.

Prelucrările care se bazează pe metoda celor mai mici pătrate conduc la obținerea unor mărimi diferite, notate în cele ce urmează cu M și respectiv X :

- M - *observații compensate*
- X - *valori estimate ale parametrilor sau valori compensate ale necunoscutelor*

După cum este cunoscut, legătura dintre noile mărimi introduse M și măsurătorile inițiale M^0 este dată de relațiile:

$$M = M^0 + v \quad 7.21$$

Pentru parametri X se introduc în scopul ușurării calculelor, valori provizorii sau aproximative X^0 , astfel încât:

$$X = X^0 + x \quad 7.22$$

Formal, atât v , cât și x au rolul unor „corecții”, fiind în același timp și „necunoscutele” generale care intervin în întregul complex de prelucrare. Pentru a se putea puncta și mai bine proprietățile lor specifice sunt folosite denumiri diferite și anume:

- pentru mărimile v s-a adoptat denumirea de **corecții**:

$$v^T = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad 7.23$$

deoarece de acestea sunt atașate măsurătorile geodezice M^0 efectuate în rețea. Fiecare dintre aceste corecții v_i are rolul de a anihila un șir întreg de erori elementare care se produc la efectuarea observațiilor corespondente M_i^0 ;

- pentru mărimile x s-a adoptat denumirea de **necunoscute**:

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad 7.24$$

acestea fiind atașate parametrilor X^0 cu care se operează în modelul funcțional.

Cu aceste notații relațiile (7.20) devin:

$$M^0 + v = \varphi(X^0 + x) \quad 7.25$$

Prelucrările care intervin în geodezie se restrâng, de cele mai multe ori, numai la termenii liniari care rezultă din dezvoltarea în serie *Taylor* a relațiilor (7.25):

$$v = Bx + I \quad 7.26$$

unde:

$$B = \left(\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X} \right)_0 \quad 7.27$$

$$I = (X^0) - M^0 \quad 7.28$$

Indicele inferior din relația (7.27) indică faptul că valorile derivatelor parțiale din matricea B sunt calculate prin utilizarea valorilor aproximative X^0 ale parametrilor cuprinși în prelucrare.

Se notează:

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & u_n \end{vmatrix} \quad 7.29$$

astfel încât:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + u_1x_u + l_1 \\
v_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + u_2x_u + l_2 \\
&\dots\dots\dots \\
v_n &= a_nx_1 + b_nx_2 + \dots + u_nx_u + l_n
\end{aligned}
\tag{7.30}$$

Relațiile (7.26) și (7.30) sunt denumite *ecuații liniarizate ale corecțiilor* și reprezintă *forma liniară a modelului funcțional din cadrul prelucrării măsurătorilor geodezice prin metoda observațiilor indirecte*.

Principiul clasic de compensare elaborat de *Gauss* (1809) și *Legendre* (1806,1810), se bazează pe relația cunoscută :

$$v^T P v \rightarrow \mathit{minim} \tag{7.31}$$

unde *P* are definiția generală dată de relația (7.13). Dacă se au în vedere observații independente, pentru care sunt valabile relațiile (7.14), (7.17), rezultă din (7.31) condiția, de asemenea cunoscută din teoria erorilor de măsurare:

$$[pvv] \rightarrow \mathit{minim} \tag{7.32}$$

folosită în prelucrările geodezice actuale.

7.2.2 Observații privind formarea modelului funcțional - stochastic

Indicații cu caracter aplicativ:

1. Prelucrarea riguroasă a măsurătorilor geodezice trebuie să se raporteze la un sistem de referință unitar. De aceea, înainte de a fi prelucrate, măsurătorile geodezice sunt reduse la sistemul de referință acceptat (planul de proiecție, elipsoidul de referință, un sistem de referință tridimensional, etc.).

2. Orice compensare geodezică este dirijată prin modelul funcțional stochastic.

În funcție de atenția cu care s-a alcătuit acest model se vor obține rezultate mai mult sau mai puțin apropiate de realitate.

Astfel:

- modelul funcțional poate fi denaturat de existența unor erori sistematice importante, neeliminate înainte de compensare. De exemplu este recomandat ca, în cazul utilizării unui instrument pentru măsurarea pe cale electronică a distanțelor, insuficient de bine etalonat, să se introducă o necunoscută „de scară” suplimentară, în modelul funcțional;

- neglijarea unor corelații, ceea ce înseamnă un model stochastic incomplet, poate pune sub semn de întrebare unele precauții de mare finețe avute în vedere la formarea modelului funcțional.

Din aceasta rezultă că este necesar un echilibru adecvat între cele două laturi ale modelului folosit: în rețelele geodezice de ordin superior trebuie avute în vedere toate amănuntele posibile din acest punct de vedere, urmând ca pentru rețelele de ordin inferior să se accepte anumite concesii, atât de natură funcțională, cât și de natură stochastică.

3. Orice schimbare în modelul funcțional - stochastic modifică rezultatul compensării.

4. Modelul funcțional - stochastic acceptat inițial poate fi îmbunătățit pe baza unor rezultate obținute (eventual, compensări parțiale sau chiar o compensare globală preliminară). În acest sens se menționează: analiza ponderilor grupelor de măsurători, examinarea semnificației statistice a unor necunoscute folosite, etc.. O compensare modernă a unei rețele geodezice apare astfel ca o succesiune de compensări parțiale, continuu îmbunătățite.

7.2.3 Determinarea elementelor compensate

Din condiția de minim (7.31) rezultă:

$$B^T P v = 0 \quad 7.33$$

care are ca echivalent în cazul observațiilor independente:

$$[pav] = [pbv] = \dots = [puv] = 0 \quad 7.34$$

Din (7.26) și (7.33), se formează sistemul ecuațiilor normale:

$$B^T P B x + B^T P l = 0 \quad 7.35$$

Pentru simplificarea scrierii se notează:

$$B^T P B = N \quad 7.36$$

și

$$B^T P l = l^* \quad 7.37$$

astfel încât rezultă o formă prescurtată pentru sistemul ecuațiilor normale:

$$N x + l^* = 0 \quad 7.38$$

Sistemul (7.38) are următorul echivalent în cazul observațiilor geodezice independente:

$$\begin{aligned} [paa]x_1 + [pab]x_2 + \dots + [pau]x_u + [pal] &= 0 \\ [pab]x_1 + [pbb]x_2 + \dots + [pbu]x_u + [pbl] &= 0 \\ \dots & \\ [pau]x_1 + [pbu]x_2 + \dots + [puu]x_u + [pul] &= 0 \end{aligned} \quad 7.39$$

Determinarea elementelor componente se execută în baza următorului **algoritm**:

- **Soluțiile pentru parametri (necunoscutele) x** rezultă din rezolvarea sistemului (7.38), respectiv (8.39):

$$x = -N^{-1} l^* \quad 7.40$$

Matricea inversă a sistemului ecuațiilor normale este matricea cofactorilor necunoscutelor Q_x

$$Q_x = N^{-1} \quad 6.41$$

Observație: Relația (7.41) presupune existența matricei inverse N^{-1} . În cazul rețelelor geodezice libere condiția nu este îndeplinită, fiind necesare ipoteze suplimentare.

- **Corecțiile v** rezultă din $v = Bx + l$ (7.26), respectiv din(7.30):

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + u_1 x_u + l_1; \\ v_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + u_2 x_u + l_2; \\ &\dots \\ v_n &= a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + u_n x_u + l_n. \end{aligned}$$

- **Valorile compensate ale parametrilor X și ale măsurătorilor M** rezultă din $X = X^0 + x$ (7.22) și $M = M^0 + v$ (7.21).

- **Verificarea generală a compensării** constă în controlul respectării tuturor egalităților din modelul funcțional neliniarizat $\tilde{M} = \varphi(\tilde{X})$ (7.20), în limita aproximației de calcul acceptată inițial.

7.2.4 Evaluarea preciziei

La calculele de evaluare a preciziei elementelor care intervin într-o prelucrare se pot distinge următoarele etape:

1. Din măsurătorile individuale se pot calcula abaterile standard s'_0 , pentru fiecare dintre tipurile de măsurători avute la dispoziție, înainte de prelucrarea în rețea. Erorile s'_0 caracterizează **precizia interioară a tipului de măsurători considerat**, depinzând de natura și numărul lor, de metoda de lucru, de instrumentul utilizat, de calificarea operatorului, de condițiile atmosferice, etc..

Astfel:

- în rețelele de triangulație intervine etapa prelucrării în stație (diferită pentru metoda seriilor, respectiv pentru metoda *Schreiber*) în care se determină pentru fiecare punct staționat abaterea standard a unei direcții compensate (în stație);

- în rețelele de nivelment precizia interioară se determină din rezultatele obținute pe un interval sau pe un tronson de nivelment (măsurători dus-întors).

2. Un indicator de precizie globală a măsurătorilor din rețea se obține *după calculul corecțiilor v*, prin abaterea *standard (empirică) a unității de pondere*, denumită în mod uzual în geodezie **eroarea medie a unității de pondere**:

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n-u}} \quad 7.42$$

unde:

$$E(s_0^2) = \sigma_0^2 \quad 7.43$$

respectiv s_0 reflectă **precizia exterioară a măsurătorilor considerate**. În cazul rețelelor geodezice, cu sau fără constrângeri relația (7.42) reflectă **precizia relativă a rețelei considerate**

3. O situație tipică este reprezentată de evaluarea preciziei de determinare a unui vector aleator f care poate fi exprimat în raport cu vectorul l :

$$f = F l \quad 7.44$$

prin intermediul matricei F , presupusă cunoscută.

Matricea de covarianță a vectorului f , prin care se pun în evidență proprietățile lui stochastice și se pot calcula toate elementele de precizie necesare, se obține din (7.44) prin aplicarea legii de propagare a erorilor:

$$s_f^2 = C_f = F C_M F^T = s_0^2 F Q_M F^T = s_0^2 Q_f \quad 7.45$$

Prin particularizare se obține precizia elementelor principale care intervin în prelucrarea observațiilor în rețelele geodezice: x, v, \hat{l} ($\hat{l} = B \cdot x$).

Prin urmare, se exprimă dependența dintre aceste mărimi compensate și vectorul l :

• Pentru necunoscutele x se folosesc relațiile (7.40), (7.41) și (7.37):

$$x = -Q_x B^T P l \quad 7.46$$

• Pentru corecțiile v se folosesc relațiile (7.26) și (7.46):

$$v = B x + l = -B Q_x B^T P l + l = (E - B Q_x B^T P) l \quad 7.47$$

4. Abaterea standard a unei observații M_i^0 este determinabilă cu formula:

$$s_i = s_0 \sqrt{Q_i} \quad 7.48$$

coeficientul de pondere Q_i fiind situat pe diagonala matricei cofactorilor Q_M în poziția corespondentă pentru observația M_i^0 .

5. În cazul observațiilor geodezice independente, relațiile corespondente obținute prin particularizarea relațiilor deduse anterior sunt:

- abaterea standard empirică (eroarea medie) a unității de pondere:

$$s_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} \quad 7.49$$

- abaterea standard (eroarea medie) a necunoscutei x_k :

$$s_{x_k} = s_0 \sqrt{Q_{x_k x_k}} \quad 7.50$$

- abaterea standard (eroarea medie) a unei măsurători M_i^0 :

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} \quad 7.51$$

- abaterea standard (eroarea medie) a unei funcții de necunoscute:

$$F = F(X_1, X_2) \quad 7.52$$

este:

$$s_F = s_0 \sqrt{Q_{FF}} \quad 7.53$$

unde:

$$Q_{FF} = \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \right)^2 Q_{x_1x_1} + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \right) Q_{x_1x_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \right)^2 Q_{x_2x_2} \quad 7.54$$

Relația (6.54) este cunoscută și sub denumirea de *regula lui Tienstra*;

- **eroarea medie a unei observații compensate** se determină cu o relație de forma (7.53), după ce în prealabil observația considerată s-a exprimat ca o funcție de parametri X .

6. În rețelele de triangulație, elementele cele mai des utilizate în evaluarea preciziei sunt cele care au un caracter local, adică se referă la precizia în determinarea poziției planimetrice a unui punct nou oarecare.

Analiza poate cuprinde unul, mai multe sau chiar toate punctele noi din rețea.

• **Erorile medii ale coordonatelor x, y .** Din relația (7.53) care are un caracter general se pot calcula abaterile standard (erorile medii) ale coordonatelor x, y ale punctului considerat:

$$s_x = s_0 \sqrt{Q_{xx}}; \quad s_y = s_0 \sqrt{Q_{yy}} \quad 7.55$$

• **Elipsa erorilor.** Deoarece s_x și s_y își modifică valoarea în cazul unei schimbări a sistemului de coordonate folosit (roto - translație), precizia locală se exprimă în mod frecvent și prin elipsa erorilor, care este un invariant al matricei de covarianță, adică nu depinde de sistemul de axe în care se desfășoară compensarea, ci numai de configurația rețelei geodezice și de precizia de măsurare. Elipsa erorilor reprezintă domeniul de încredere pentru poziția planimetrică a unui punct.

Modalitatea practică de determinare a parametrilor elipsei erorilor este:

- **semi-axa mare a** , respectiv **semi-axa mică b** se calculează cu relațiile:

$$a = s_0 \sqrt{Q_{\max}}, \quad b = s_0 \sqrt{Q_{\min}} \quad 7.56$$

unde :

$$Q_{\max} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} \quad 7.57$$

$$Q_{\min} = \frac{Q_{xx} + Q_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2}$$

- **orientarea axei mari a elipsei** în raport de axa Ox a sistemului de coordonate se determină cu relația:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad 7.58$$

• **Abaterea standard (eroarea medie) pe o anumită direcție**, care face unghiul ψ cu semi-axa mare a elipsei, rezultă din relația:

$$s_u^2 = s_0^2 (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) \quad 7.59$$

prin particularizare putând rezulta și abaterile standard ale coordonatelor s_x și s_y .

• **Eroarea medie Helmert, sau abaterea standard totală:**

$$s_t = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad 7.60$$

este un invariant al matricei de covarianță a necunoscutelor:

$$s_t^2 = s_0^2(Q_{xx} + Q_{yy}) \quad 7.61$$

Geometric, s_t reprezintă jumătate din diagonala dreptunghiului în care este înscrisă elipsa erorilor.

Revenind la matricea de covarianță C_x a parametrilor x din care se extrage submatricea C_p aferentă punctului P considerat:

$$C_p = s_0^2 \begin{vmatrix} Q_{x_p x_p} & Q_{x_p y_p} \\ Q_{y_p x_p} & Q_{y_p y_p} \end{vmatrix} \quad 7.62$$

adică:

$$C_p = s_0^2 Q_p \quad 7.63$$

relația (6.61) se mai poate scrie și sub forma:

$$s_t = \sqrt{\text{urma } Q_p} \quad 7.64$$

• *Eroarea medie de poziție Werkmeister* este definită de:

$$s_w = \sqrt{s_x s_y} \quad 7.65$$

fiind de asemenea un invariant al matricei de covarianță a necunoscutelor.

8. ASPECTE ALE OPTIMIZĂRII REȚELELOR GEODEZICE

8.1 Noțiuni introductive

Modificări în modelul funcțional - stochastic folosit la prelucrarea observațiilor geodezice determină schimbări în rezultatele finale ale prelucrării. Pentru un teritoriu dat se pot realiza, în principiu, mai multe variante de proiectare a rețelei geodezice. Desigur numai una dintre aceste variante, în care rețeaua proiectată are o anumită configurație (adică cuprinde un anumit număr de puncte, dispuse într-un anumit mod în rețea) și în care ar urma să se efectueze un anumit gen de măsurători geodezice, repetate de un anumit număr de ori, poate asigura rezultate optime cum ar fi de exemplu, poziția punctelor rețelei reflectată de precizia de determinare, volumul total de cheltuieli etc.

Variantele de proiectare pot rezulta din introducerea unor modificări esențiale în configurația rețelei sau în programul de observații, prin mărirea numărului acestora sau prin introducerea altor tipuri de măsurători, etc.

Se pot obține variante de proiectare diferite și prin modificări succesive de mai mică amploare operate asupra modelului funcțional - stochastic, scopul urmărit fiind, de asemenea, găsirea unei soluții optime din anumite puncte de vedere.

Soluțiile de optimizare ale unor procese tehnologice sau de prelucrare a datelor cunosc o aplicabilitate tot mai mare în numeroase sectoare de activitate. Sunt cunoscute atât soluții teoretice generale, cât și soluții pentru domenii concrete din economie sau tehnică (un exemplu tipic îl reprezintă problema organizării optime a transporturilor).

Forma normală (canonică) a unei probleme de programare liniară este următoarea: fiind dat un număr de relații aduse la forma liniară:

$$A y = b \quad 8.1$$

se cere determinarea optimă a unor funcții, exprimate de asemenea sub formă liniară:

$$f(y) = F \cdot y \rightarrow \text{optim} \quad 8.2$$

denumite *funcții de scop*, concomitent cu respectarea unor anumite *restricții*, de exemplu de forma:

$$y_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots \quad 8.3$$

sau (și):

$$\sum_j c_j y_j \leq c_i \quad 8.4$$

Restricțiile asigură în general rezolvarea optimă din punct de vedere economic a problemei date.

Observații:

1. În relațiile (8.2) și (8.3) semnele "=" și respectiv "≥" pot fi înlocuite, în anumite situații de semn "≤".
2. Variabilele y pot fi de asemenea, și mărimi stochastice, situate într-o bandă de distribuție, care se poate defini după legile teoriei probabilităților.
3. Se cunosc și probleme de optimizare cu caracter neliniar, ale căror rezolvări sunt, desigur, mai complicate.

Se prezintă în continuare preocupările în domeniul optimizării, care sunt grupate de către *Grafarend* în patru categorii.

8.1.1 Optimizarea datelor inițiale (design de ordinul 0)

Volumul de date inițiale într-o rețea geodezică este constituit din: valorile provizorii ale necunoscutelor X^0 , cu care se descrie modelul funcțional alcătuit din vectorul M^0 , respectiv matricea de covarianță corespondentă C_M .

Problema de optimizare a datelor inițiale poate fi formulată în felul următor:

sub ce condiții (suplimentare) se pot obține informații asupra coordonatelor punctelor rețelei, adică asupra poziției în sistemul de coordonate folosit.

Fără ipoteze sau condiții suplimentare (de exemplu un anumit număr de elemente fixe în rețea, etc.) matricea coeficienților ecuațiilor corecțiilor din modelul funcțional prezintă un anumit defect (deficit) d , care este egal cu numărul parametrilor necesari pentru încadrarea completă a rețelei în sistemul de coordonate corespondent (tabelul 1). Numărul d , este egal cu numărul *gradelor de libertate* al rețelei considerate în raport cu sistemul de coordonate utilizat.

Ca exemplificare se poate urmări evoluția rețelei geodezice planimetrice (triangulație) din prima parte a figurii (1):

- măsurătorile unghiulare crează geometria intrinsecă a rețelei geodezice, dar nu oferă indicii asupra amplasării sale în sistemul XY folosit;
- orientarea unei laturi (cunoscută de exemplu din rețelele geodezice mai vechi), conferă întregii rețele geodezice o anumită orientare (fig.1, c și d). Prin aceasta a fost suprimat unul din gradele de libertate ale rețelei prezentate în figura (1, a);
- cunoașterea, în continuare, a unei laturi în rețea suprimă un alt grad de libertate și anume cel legat de scara rețelei geodezice (fig.1, c). Dacă rețeaua geodezică considerată ar fi fost o rețea de trilateratie acest grad de libertate nu ar fi existat;
- ultimele grade de libertate, de amplasament propriu-zis al rețelei în sistemul de coordonate considerat, pot fi eliminate dacă se cunosc coordonatele x și y ale unui punct din rețea (fig.1, d).

Tabelul 1

Tipul rețelei geodezice	d	Parametri p necesari pentru încadrarea completă a rețelei în sistemul de coordonate corespondent
Rețele altimetrice	1	1 p de translație
Rețele planimetrice		
a) Rețele de trilateratie	3	2 p de translație 1 p de rotație
b) Rețele de triangulație	4	2 p de translație 1 p de rotație 1 p de scară
Rețele tridimensionale	6 (+1)	3 p de translație 3 p de rotație (+1 p de scară)

În concluzie, rezultă că rețelele geodezice libere de triangulație prezintă 4 grade de libertate, iar cele de trilateratie 3.

Se mai poate vorbi și de un *defect de configurație*, care însă poate fi prevenit și eliminat prin operația de proiectare a rețelei.

Ca exemplificare, se prezintă o rețea de trilateratie (fig. 1, e), care nu va putea fi determinată unitar deoarece se compune din două părți distincte, rețeaua prezentând în partea mijlocie posibilitatea unei rotații arbitrare. Trebuie menționat faptul că există și situații limită, care trebuie evitate prin proiectare, când rețeaua geodezică nu conține observații suplimentare și prin urmare nu poate fi prelucrată riguros (fig. 1, f).

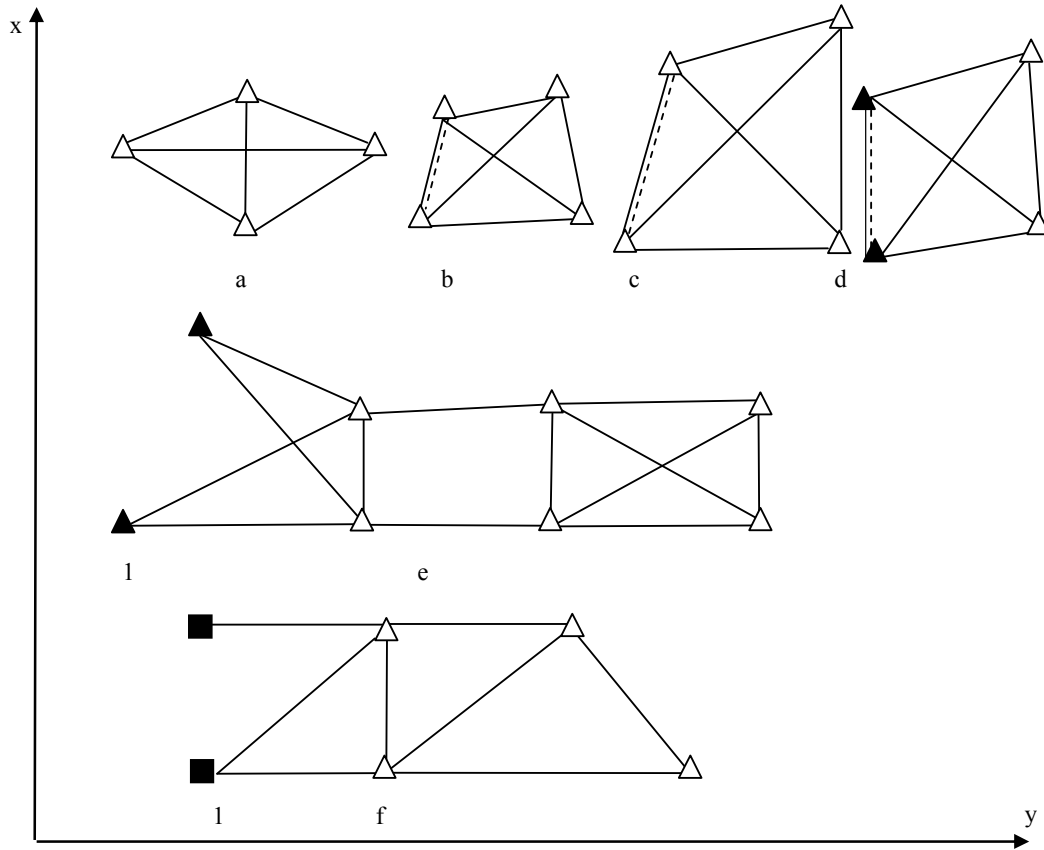


Fig.1 Defecte de poziție (a, b, c) și defecte ale configurației (e, f) în rețelele geodezice planimetrice (l = punct de coordonate cunoscute – punct vechi)

Există și procedee matematice pentru eliminarea unor defecte de configurație. În mod firesc asemenea defecte nu pot apărea în rețelele geodezice de sprijin, fiind înlăturate prin lucrările de proiectare.

Până la apariția lucrărilor lui *Meissl* în anii 1962, 1969 și apoi a altor autori (*Mittermayer* 1972, *Wolf* 1972, etc.) defectele semnalate mai înainte erau, în general, eliminate prin considerarea (arbitrară) a unui număr corespunzător de elemente fixe în rețea. Astfel, pentru rețelele de triangulație se pot alege ca fixe:

- coordonatele X , Y ale unui punct (inițial) din rețea
- valoarea orientării unei direcții
- lungimea unei laturi

În numeroase cazuri aceste patru elemente au fost alese în legătură nemijlocită, directă, ceea ce echivalează cu acceptarea poziției fixe pentru două puncte la unul din capetele rețelei.

Alegerea arbitrară a elementelor fixe, strict necesare ca număr cu d , nu are influențe asupra următoarelor mărimi:

- mărimea corecțiilor v (deci și $v^T P v$)
- abaterea standard a unității de pondere a rețelei s_0
- aspectul geometric al rețelei

În schimb, în funcție de modul în care se poziționează cele patru elemente fixe menționate se obțin soluții diferite pentru:

- vectorul necunoscutelor x și deci o poziționare diferită a rețelei geodezice în sistemul ales
- matricea de varianță – covarianță a necunoscutelor Q_x și ca urmare:
- abaterile standard s_x, s_y ale coordonatelor punctelor în rețea și – elementele elipselor erorilor: Q_{max}, Q_{min} și θ .

Pentru evitarea acestor soluții arbitrare, se cunosc mai multe procedee.

Soluția Meissl constă în introducerea unei condiții suplimentare de minim:

$$urma C_x = s_0^2 \text{ urma } Q_x \rightarrow \text{minim} \quad 8.5$$

Prin această soluție se realizează:

$$x^T x \rightarrow \text{minim} \quad 8.6$$

Fără a mai face apel la alte ipoteze suplimentare, prin condiția (8.5) se deduc soluții pentru v , x , $Q_x, s_0, s_x, s_y, Q_{max}, Q_{min}, \theta$ într-o rețea dată.

Observație: S-ar putea atrage atenția că prin ecuația (8.6) soluțiile parametrilor X se încadrează optim într-o formă determinată anterior în mod aproximativ, prin mărimile X^0 cuprinse în volumul de date inițiale, ceea ce constituie unul din punctele critice ale metodei examinate.

O consecință a relației (8.6) constă în faptul că suma pătratelor erorilor medii *Helmert* este minimă în acest caz:

$$s_0^2 \sum (Q_{xx} + Q_{yy}) = \sum (s_x^2 + s_y^2) = \sum s_i^2 \rightarrow \text{minim} \quad 8.7$$

Prin urmare, rezolvarea problemei optimizării datelor inițiale constă în introducerea relației suplimentare (8.5), ceea ce are drept consecință (8.6) și (8.7).

Mai există și alte considerente pentru care soluția (8.5) nu poate fi acceptată ca generală și obligatorie, deși consecința (8.7) ar putea constitui un argument important în acest sens.

8.1.2 Optimizarea configurației rețelelor geodezice (design de ordinul 1)

Se presupune cunoscut volumul datelor inițiale, definit la începutul subcapitolului (8.1.1):

X^0, M^0, C_M .

Modalitatea concretă în care sunt repartizate punctele rețelei este reflectată direct în matricea B care intervine în modelul funcțional, astfel încât se poate afirma că matricea B reprezintă configurația rețelei considerate.

Optimizarea configurației rețelei geodezice (design de ordinul 1) constă în determinarea optimă a matricelor B . Noțiunea de optimizare include realizarea și a unor alte categorii de cerințe:

- precizia maximă de determinare (globală sau locală) a rețelei
- gradul de încredere maximă în rezultatele obținute din prelucrare
- volumul minim de cheltuieli

Asemenea aspecte intervin, de fapt, și în celelalte categorii de probleme de optimizare la care se va face referire în continuare.

Optimizarea configurației unei rețele geodezice de stat ar implica un volum enorm de calcule. Afirmatia se bazează pe faptul că ar trebui introdus un număr extrem de mare de restricții, în

mod deosebit date de relief și de alte categorii de obstacole, de care programul de prelucrare ar trebui să țină seamă.

Asemenea greutatea, desigur la altă scară, intervin și în rețelele geodezice locale, în mod deosebit când acestea sunt amplasate în zone muntoase sau intens populate.

De aceea încercările și reușitele de până acum se referă la rețele de mici dimensiuni. Instrucțiunile de realizare a rețelelor geodezice de stat prevăd limite destul de largi în raport cu configurația optimă, tocmai pentru că se au în vedere dificultățile reale de proiectare, generate de factorii naturali care se instituie ca restricții extrem de importante.

Pentru a putea oferi imagini sugestive în privința configurației optime a unei rețele geodezice, deoarece metodele programării liniare sunt extrem de complicate în această situație, se va deduce configurația optimă pentru diferite elemente de structură care intervin în rețelele geodezice, deci nu pentru rețeaua geodezică în ansamblu (v. 8.4).

8.1.3 Optimizarea programului de măsurători geodezice (design de ordinul 2)

Se presupune cunoscută configurația rețelei reflectată de matricea B .

Se caută determinarea optimă a programului de măsurători, mai ales din punctul de vedere al stabilirii numărului de repetări al fiecărei măsurători pentru a se putea satisface anumite funcții de scop și restricții impuse prin programul de optimizare.

Rezultatul optimizării programului de măsurători constă, în general, în perfecționări succesive ale matricei ponderilor P , față de forma sa inițială.

Această categorie de optimizare este cea mai cercetată în ultimii ani și rezultatele pot fi utilizate în multe din situațiile frecvent întâlnite în practică. De aceea se vor examina unele posibilități practice de abordare a rezolvărilor acestei categorii de probleme de optimizare în 8.2 și 8.3.

8.1.4 Optimizarea observațiilor suplimentare (design de ordinul 3)

Problematika acestei categorii de optimizare este asemănătoare cu cea descrisă în (8.1.3):

într-o rețea deja realizată (se cunoaște configurația rețelei și ca urmare matricea B) se urmărește optimizarea rețelei prin introducerea unor observații suplimentare.

8.2 FUNCȚII DE SCOP ȘI RESTRICȚII LA OPTIMIZAREA REȚELELOR GEODEZICE

Clasificarea problemelor de optimizare care intervin în practica proiectării complexe a unei rețele geodezice are în primul rând rolul de a face o distincție clară între problemele specifice fiecărei categorii posibile.

De multe ori proiectantul unei rețele geodezice își propune să satisfacă, aproape simultan, cât mai multe funcții de scop conținute în cele patru categorii de optimizări. Deoarece soluțiile se influențează reciproc, se preferă și rezolvări iterative, pentru a se constata în diferite trepte ce rezultate se obțin și în ce direcție trebuie acționat în continuare.

Combinarea mai multor categorii de soluții la problemele de optimizare este numită de *Grafarend* (1979) *design hibrid*.

În cadrul optimizării rețelelor geodezice, relațiilor (8.1) din forma canonică a problemelor de propagare liniară le corespunde modelul funcțional definit prin (7.26) sau (7.30) – *modul 4*.

În cele ce urmează se prezintă unele posibilități de definire a funcțiilor de scop și a restricțiilor care pot interveni uzual în problemele de optimizare a rețelelor geodezice.

Funcțiile de scop și restricțiile utilizate în continuare au în vedere *indicatorii de precizie* care pot fi definiți într-o rețea geodezică.

8.2.1 Indicatori de precizie locală

• Dintre indicatorii de precizie posibili, cei mai eficienți, și ca atare cei care pot căpăta aplicabilitate mai largă sunt indicatorii de precizie locală. Aceasta se justifică prin faptul că la prelucrarea unei rețele geodezice o atenție deosebită este acordată cunoașterii preciziei de determinare pentru fiecare punct în parte, luându-se măsuri corespunzătoare pentru evitarea cazurilor de puncte *insuficient de precis determinate*.

• Pentru indicatorii de precizie acceptați ca eficienți în geodezia utilitară s-ar putea stabili anumite toleranțe T care constituie forme de exprimare a restricțiilor definite prin (8.3). Asemenea aspecte ar trebui avute în vedere la o nouă redactare a instrucțiunilor de realizare a rețelelor geodezice de sprijin. În acest scop ar putea fi utilizați acei indicatori de precizie care s-au dovedit, din numeroase studii teoretice și practice, ca cei mai semnificativi (Fotescu 1979, Augath 1980, etc.):

- abaterea standard s_x, s_y ale coordonatelor unui punct oarecare din rețea

- abaterea standard totală s_t (eroarea medie *Helmert*)

Astfel, din ecuația (7.62) rezultă condiția:

$$urma C_p \rightarrow minim \quad 8.8$$

sau:

$$urma Q_p \rightarrow minim \quad 8.9$$

precum și restricția:

$$s_t = \sqrt{urma C_p} \leq T_{C_p} \quad 8.10$$

• În unele situații intervine necesitatea ca anumite funcții de coordonate ale punctelor rețelei să fie determinate cu erori medii minime:

- eroarea unei diferențe de coordonate

- eroarea unei lungimi sau a unei orientări (pentru o latură din rețea sau pentru o "diagonală" a rețelei).

În acest fel există posibilitatea introducerii unor noi funcții de scop de forma:

$$Q_F \rightarrow minim \quad 8.11$$

și eventual, pentru anumite situații limită, anticipate în funcție de structura și destinația rețelei geodezice:

$$s_F = s_0 \sqrt{Q_F} \leq T_{Q_F} \quad 8.12$$

Astfel de funcții depind însă într-o prea mare măsură de procedeele tehnice prin care sunt determinate pozițiile punctelor în rețea (triangulație, trilateratie, poligonometrie, etc.) și ca urmare nu pot fi generalizate cu ușurință pentru situațiile care pot interveni în rețelele geodezice.

8.2.2 Indicatori de precizie globală

• Indicatorii de precizie globală oferă posibilitatea caracterizării de ansamblu a unei rețele geodezice, atât în comparație cu alte rețele similare, cât și în aprecierea calității intrinseci a rețelei considerate, prin comparații ale rezultatelor obținute din utilizarea mai multor modele funcțional - stochastice la prelucrare.

• Din acest ultim punct de vedere un rol important îl are abaterea standard a unității de pondere (7.42), respectiv (7.49). Valoarea sa este dedusă într-un proces de optimizare (7.31), respectiv (7.32), specific metodei celor mai mici pătrate. Proiectantul unei rețele geodezice poate influența mărimea sa prin intervenții asupra numitorului:

$$r = n - u$$

Este de observat însă că modificări în modelul funcțional prin introducerea unor noi măsurători (se mărește n) sau a unor parametri suplimentari (se mărește u) modifică nu numai mărimea $(n - u)$ ci și $v^T P v$, în consecință, s_0 . Atunci când modificările corespund corect situației în care s-au efectuat observațiile, în mod normal se vor obține valori mai mici pentru s_0 și prin urmare se poate aprecia că rezultatele compensării sunt calitativ superioare. Introducerea unor parametri suplimentari nu poate fi însă considerată ca o măsură absolut necesară. Mărimea exagerată a numărului u de parametri sau alegerea lor în mod necorespunzător poate influența negativ prelucrarea sau chiar să o denatureze (când, de exemplu $u \rightarrow n$).

• Un indicator de precizie globală, util în mod deosebit în rețelele de dimensiuni nu prea mari, poate fi formulat prin necesitatea determinării optime a tuturor punctelor noi ale rețelei:

$$\sum (s_x^2 + s_y^2) = \sum s_i^2 = s_0^2 \sum (Q_{xx} + Q_{yy}) = \text{urma} C_x \rightarrow \text{minim} \quad 8.13$$

un criteriu deja menționat în (8.5). Notând cu N numărul punctelor noi din rețea, s-ar putea introduce și o restricție de forma:

$$\bar{s}_i = s_0 \sqrt{\frac{\text{urma} Q_x}{2N}} \leq T_{C_x} \quad 8.14$$

care să fie avută în considerație la proiectarea rețelelor geodezice. Toleranțele T_{C_x} ar urma să aibă valori distincte pe categorii concrete de rețele geodezice (desigur și pe ordine, etc.).

• În procesele de optimizare a rețelelor geodezice o atenție deosebită este acordată optimizării matricei de covarianță C_M a măsurătorilor, deoarece această operațiune poate conduce la stabilirea unui număr optim de măsurători ce urmează a se efectua în rețea. În acest mod se ajunge la funcții de scop, respectiv la restricții, cu caracter economic:

$$C_M \rightarrow \text{optim} \quad 8.15$$

Datorită relațiilor (7.9) și (7.13), funcția de scop (8.15) poate fi scrisă:

$$P \rightarrow \text{optim} \quad 8.16$$

Se consideră cazul particular al observațiilor independente, întâlnit frecvent în practică. În baza relațiilor (7.12), (7.15), (7.16), (7.17) și (7.44) rezultă că matricea ponderilor are următoarea formă în această situație:

$$P = s_0'^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{s_1'^2} & & & & \\ & \frac{1}{s_2'^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{s_n'^2} \end{vmatrix} \quad 8.17$$

Acceptând că fiecare măsurătoare M_i^0 este obținută prin medierea valorilor unui număr oarecare n_i de determinări elementare efectuate asupra mărimii respective, putem înlocui:

$$s_i'^2 = \frac{s_{0i}^2}{n_i} \quad 8.18$$

unde: s_{0i}' - abaterea standard a unei singure măsurători, determinabilă în funcție de procedeul specific de măsurare.

Rezultă:

$$P = s_0'^2 \begin{vmatrix} \frac{n_1}{s_{10}'^2} & & & \\ & \frac{n_2}{s_{20}'^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{n_n}{s_{n0}'^2} \end{vmatrix} = s_0'^2 P_0 H \quad 8.19$$

Matricea P_0 este determinabilă în procesul de prelucrare prealabilă a observațiilor originale:

$$P_0 = s_0'^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{s_{10}'^2} & & & \\ & \frac{1}{s_{20}'^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s_{n0}'^2} \end{vmatrix} \quad 8.20$$

iar matricea H depinde numai de numerele n_i ($i = 1, 2, \dots, n$) în care se repetă măsurarea unei mărimi oarecare M_j^0 ;

$$H = \begin{vmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_n \end{vmatrix} \quad 8.21$$

- Prin aceste funcția de scop (8.16) devine:

$$H \rightarrow \text{optim} \quad 8.22$$

Funcțiile de scop în care intervin numerele n_i de măsurători sunt însoțite și de restricții de forma:

$$n_i \geq 0; \quad n_i \text{ număr întreg} \quad 8.23$$

Pentru a puncta caracterul economic al unor asemenea funcții de scop, restricțiile (8.23) sunt completate de o restricție de cost total, care se poate scrie sub forma:

$$\sum c_i n_i \leq c_t, \quad 8.24$$

unde c_i reprezintă costul (specific) pentru o singură măsurătoare M_i^0 , iar c_t costul total al întregii lucrări.

- Un caz particular al cercetării configurației optime pentru matricea ponderilor P este întâlnit în cazul *rețelelor geodezice omogene și izotrope* adică atunci când elipsele erorilor, pentru punctele noi ale rețelei, se transformă în cercuri de aceeași rază. *Fotescu (1979)* găsește expresia generală a matricei ponderilor P^* pentru un asemenea caz, care este aplicabilă și în cadrul rețelelor libere:

$$P^* = B(B^T B)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T \quad 8.25$$

8.3 ALGORITMI DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE OPTIMIZARE. CONCLUZII CU CARACTER UTILITAR

Pentru rezolvarea unor probleme de programare liniară se disting (*Mihăilă* 1964) următoarele categorii de metode:

- *Metode particulare* de rezolvare în care se încadrează *procedeele grafice* și *procedeele iterative*. Aceste metode permit, aproape întotdeauna, analiza rezultatelor intermediare obținute și ca urmare posibilitatea intervenției din partea operatorului. În mod uzual asemenea procedee se pretează totuși la un număr restrâns de variabile, iar aproximația de calcul nu poate fi determinată sau cunoscută întotdeauna.

- *Metode generale* de rezolvare a problemelor de programare liniară (*metoda simplex*, *metoda Monte-Carlo*, *Fiacco-Mc Cormick*, *Fletcher-Powell*, etc.) care și-au găsit în prezent aplicabilitate numai în rețelele geodezice de mici dimensiuni (*Herzog* 1972, *Fotescu* 1979, *Schmidt* 1979, *Grafarend* 1975, 1979, *Pelzer* 1980, *Augath* 1980 etc.).

Aplicabilitatea unor algoritmi generali de rezolvare este încă foarte restrânsă fiind determinată de următoarele impedimente principale:

- volumul mare de calcul pe măsura creșterii numărului de parametri
- soluțiile găsite, conduc, aproape întotdeauna, la micșorarea posibilităților de control general al rețelei. Se poate aprecia (*Pelzer* 1980) că în aceasta constă *punctul slab al majorității problemelor de optimizare a rețelelor geodezice*: soluțiile obținute prin algoritmi generali concentrează măsurătorile pe câteva elemente ale configurației rețelei, prin care se realizează minimul căutat. Concomitent se obține însă diminuarea numărului de măsurători suplimentare ceea ce micșorează posibilitățile de control în rețea, prin care se pot depista surse de erori specifice. Aceasta nu înseamnă că aspectele legate de optimizarea preciziei rețelei nu rămân fără importanță practică, deoarece soluțiile obținute, chiar pe rețele particulare ca formă, și deci mici dimensiuni, oferă posibilitatea de apreciere a acțiunii fiecărei măsurători asupra preciziei locale sau globale realizate în rețeaua geodezică considerată.

Din aceste considerente, în rezolvările efective cunoscute până acum au fost preferate soluții iterative de rezolvare a proceselor de optimizare. Soluțiile intermediare, generate de programul de optimizare, au fost interpretate și coroborate și cu alte principii cunoscute de realizare a rețelelor geodezice, cum ar fi: mărirea numărului de măsurători pe direcțiile rezultate ca insuficient de precis determinate, "dublarea" măsurătorilor considerate cu măsurători de alt gen (de exemplu introducerea măsurătorilor de distanțe în rețelele de triangulație).

Un asemenea algoritm de îmbunătățire a preciziei locale de determinare a rețelelor geodezice de triangulație – trilateratie este descris în figura (2), avându-se în vedere metoda observațiilor indirecte.

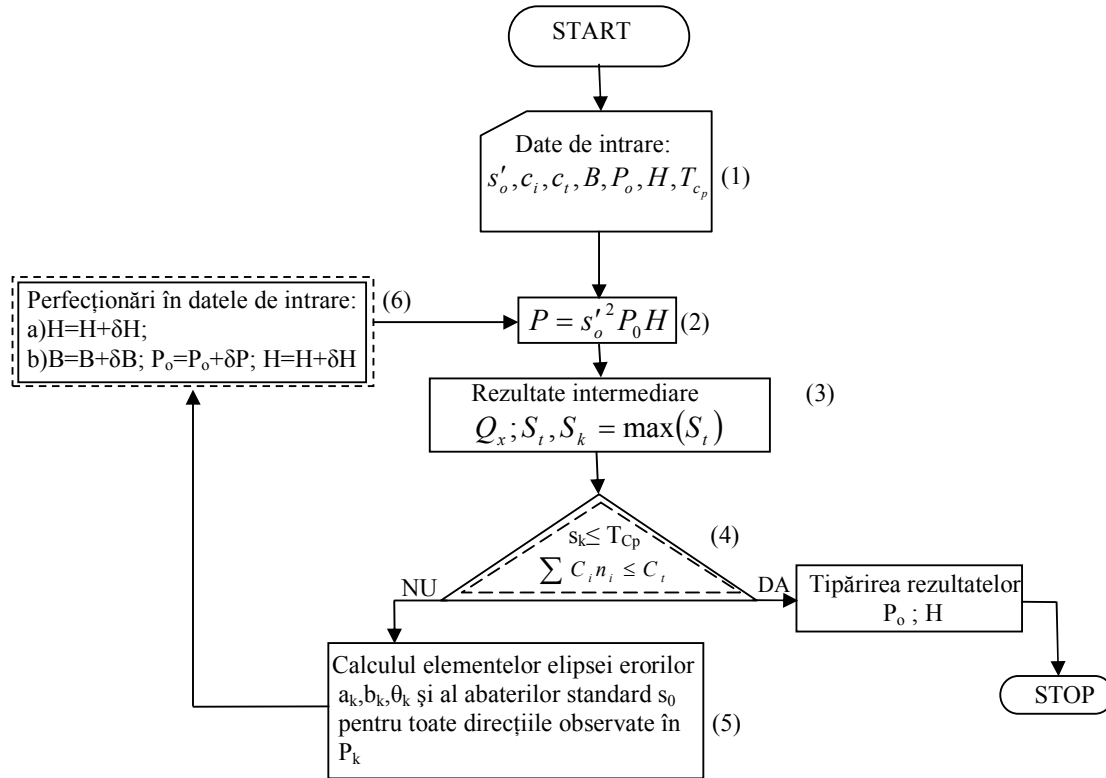


Fig. .2 Algoritm de îmbunătățire a preciziei locale

8.4 EXEMPLE DE ELEMENTE OPTIME DE STRUCTURĂ ÎN REȚELE DE TRIANGULAȚIE

Optimizarea în ansamblu a configurației unei rețele geodezice implică dificultăți deosebite atât de ordin tehnic, cât și economic. De aceea prezentarea unor soluții cu caracter restrâns, pe elemente separate, poate oferi indicii importante pentru proiectantul unei rețele geodezice, deși soluția nu este strict riguroasă. În continuare se prezintă câteva situații din cadrul rețelelor de triangulație, deoarece structura acestora este mai complexă în comparație cu cea a rețelelor de nivelment sau gravimetrice.

8.4.1 Eroarea unei laturi într-un lanț de triangulație

Se consideră lanțul de triangulație din figura 9.3, format numai din triunghiuri, în care se cunosc din măsurători: latura b^0 (cu eroarea s'_b) și unghiurile A_i^0, B_i^0, C_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$) de aceeași precizie s' . Se acceptă că unghiurile măsurate sunt valori independente și că toate măsurătorile sunt reduse la planul de proiecție. Se notează cu $v_{A_i}, v_{B_i}, v_{C_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) și respectiv v_b corecțiile care se determină din compensarea prin metoda celor mai mici pătrate:

$$A_i = A_i^0 + v_{A_i}; B_i = B_i^0 + v_{B_i}; C_i = C_i^0 + v_{C_i}; (i = 1, 2, \dots, n) \quad 8.26$$

$$b = b^0 + v_b$$

Referitor la figura (3) se folosesc următoarele notații:

- laturile a_1, a_2, \dots și unghiurile A_1, A_2, \dots se numesc laturi, respectiv unghiuri de legătură
- laturile c_1, c_2, \dots și unghiurile C_1, C_2, \dots se numesc laturi, respectiv unghiuri intermediare

Lungimea laturii a_n se poate calcula (după compensare) prin aplicarea consecutivă a formulei sinusurilor:

$$a_n = b \frac{\sin A_1 \sin A_2 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \dots \sin B_n} \quad 8.27$$

Eroarea medie a lungimii acestei laturi se calculează prin aplicarea formulei erorii unei funcții la compensarea observațiilor condiționate. Ecuațiile de condiție liniarizate ale corecțiilor care trebuie scrise pentru lanțul de triangulație din figura (3) sunt:

$$\begin{aligned} v_{A_i} + v_{B_i} + v_{C_i} + w_i &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad 8.28$$

$$\text{unde: } w_i = A_i^0 + B_i^0 + C_i^0 - 180^\circ \quad 8-29$$

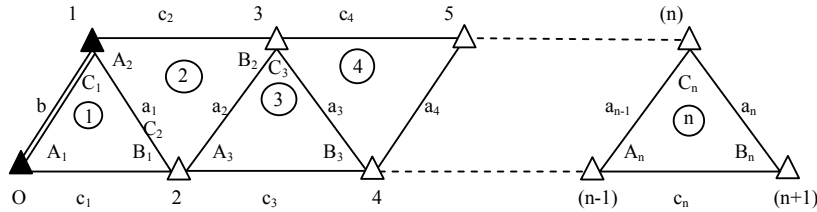


Fig. 3 Lanț simplu de triunghiuri

Pentru a liniariza funcția $F = a_n$, se aplică formulele:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial A_1} \right)_0 = + a_n^0 \operatorname{ctg} A_1^0; & f_4 &= \left(\frac{\partial F}{\partial A_2} \right)_0 = + a_n^0 \operatorname{ctg} A_2^0 \\ f_2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial B_1} \right)_0 = - a_n^0 \operatorname{ctg} B_1^0; & f_5 &= \left(\frac{\partial F}{\partial B_2} \right)_0 = - a_n^0 \operatorname{ctg} B_2^0 \\ f_3 &= \left(\frac{\partial F}{\partial C_1} \right)_0 = 0; & f_6 &= \left(\frac{\partial F}{\partial C_2} \right)_0 = 0 \dots etc. \end{aligned} \quad 8.30$$

precum și:

$$f_b = \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right)_0 = \frac{a_n^0}{b^0} \quad 8.31$$

Folosind pentru calculul ponderilor expresia: $p = 1/s'^2$, se pot calcula elementele necesare pentru deducerea coeficientului de pondere Q_{FF} :

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p} \right] &= \left[\frac{bb}{p} \right] = \left[\frac{cc}{p} \right] = \dots = \left[\frac{nn}{p} \right] = 3 \left[\frac{s''}{\rho} \right]^2 \\ \left[\frac{ab}{p} \right] &= \left[\frac{ac}{p} \right] = \dots = \left[\frac{an}{p} \right] = 0 \dots etc. \end{aligned} \quad 8.32$$

astfel încât:

$$\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{bb}{p} \right]; \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] = \left[\frac{cc}{p} \right] \dots etc. \quad 8.33$$

Din relațiile (7.30) și (7.31) rezultă:

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = a_n^{02} \left\{ \left(\frac{s'_b}{b^0} \right)^2 + \left(\frac{s''}{\rho} \right)^2 \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg}^2 A_i^0 + \operatorname{ctg}^2 B_i^0) \right\} \quad 8.34$$

În final eroarea relativă a ultimei laturi din lanțul de triangulație considerat poate fi determinată prin:

$$\frac{s'_{a_n}}{a_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s'_b}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^2 \sum_{i=1}^n (ctg^2 A_i^0 + ctg^2 B_i^0 + ctg A_i^0 ctg B_i^0)} \quad 8.35$$

Observații:

1. Eroarea ultimei laturi depinde în primul rând de erorile laturii inițiale și a unghiurilor măsurate. Uneori se consideră $s'_b/b^0 \approx 0$, datorită preciziei ridicate de măsurare a laturilor inițiale în triangulația de ordin superior.
2. Geometria rețelei, reflectată de valorile pe care le au unghiurile A_i^0, B_i^0 , influențează de asemenea mărimea acestei erori prin expresia:

$$R_i = ctg^2 A_i^0 + ctg^2 B_i^0 + ctg A_i^0 ctg B_i^0 \quad 8.36$$

3. Lungimea lanțului nu poate fi oricât de mare, căci în acest caz s'_{a_n} crește în aceeași măsură.
4. Formula (8.35) modificată corespunzător, poate fi aplicată la calculul erorii relative s'_{a_i}/a_i a oricărei laturi de legătură a_i din rețea. În cazul în care în lanțul de triangulație ar exista două laturi măsurate, la extremitățile sale, eroarea relativă maximă se va obține pentru latura de legătură de la mijlocul rețelei, pentru care suma de sub radical ar atinge valoarea maximă. Situația poate fi considerată *optimă* din punctul de vedere examinat aici. Într-adevăr, numărul de triunghiuri existente între extremități și mijlocul rețelei este evident, mai mic decât numărul de triunghiuri dintre extremitățile lanțului și ca urmare eroarea relativă determinată cu relația (8.35) va fi compusă dintr-un număr mai mic de termeni.
5. Dacă se admite că toate triunghiurile lanțului de triangulație sunt echilaterale, rezultă $R_i = 1$ și ca urmare:

$$\frac{s'_{a_n}}{a_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s'_b}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{s''}{\rho''}\right)^2} \quad 8.37$$

6. Dacă se acceptă $s'_b/b^0 \approx 0$, rezultă o formulă expeditivă prin care se poate evalua "diminuarea de precizie" pe măsura îndepărtării de latura inițială:

$$\frac{s'_{a_n}}{a_n} \approx \pm \frac{s''}{\rho''} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} n} \quad 8.38$$

7. În cazul în care lanțul de triangulație conține și patrulater geodezice, se obține o micșorare a erorii laturii finale, pentru fiecare patrulater factorul $2/3$ din formulele anterioare urmând să fie înlocuit cu $0,5$, luându-se varianta cea mai defavorabilă pentru calculul valorii R în triunghiurile ce se pot forma în patrulater.

8.4.2 Forma optimă a unui triunghi din rețelele de triangulație

Criteriile după care se poate stabili forma optimă a unui triunghi din rețelele de triangulație sunt:

- Laturile de legătură a_i și laturile intermediare c_i să aibă aceeași precizie în determinare astfel încât în dezvoltarea ulterioară a rețelei de triangulație fiecare din acestea să poată fi utilizată ca latură de sprijin
- Valoarea R_i în oricare triunghi să fie minimă
- Aplicarea judicioasă a primelor două criterii, astfel încât să rezulte un număr minim de triunghiuri pe o suprafață dată.

Pentru a deduce condițiile ce decurg din aceste criterii se scrie expresia de calcul a ultimei laturi intermediare c_n :

$$c_n = b \frac{\sin A_1 \sin A_2 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \dots \sin B_n} \cdot \frac{\sin C_n}{\sin B_n} \quad 8.39$$

Prin analogie cu relația (8.35) se poate scrie eroarea relativă a acestei laturi:

$$\frac{s'_{c_n}}{c_n} = \pm \sqrt{\left(\frac{s'_b}{b^0}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{m''}{\rho''}\right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (ctg^2 A_i^0 + ctg A_i^0 ctg B_i^0 + ctg^2 B_i^0) + ctg^2 C_n^0 + ctg C_n^0 ctg B_n^0 + ctg^2 B_n^0 \right\}} \quad 8.40$$

Prevederile primului criteriu, adică $s'_{c_n}/c_n = s'_{a_n}/a_n$, se realizează atunci când:

$$ctg^2 A_n^0 + ctg A_n^0 ctg B_n^0 = ctg^2 C_n^0 + ctg C_n^0 ctg B_n^0 \quad 8.41$$

Această egalitate este posibilă când $ctg A_n^0 = ctg C_n^0$ și ca urmare: $A_n^0 = C_n^0$

Rezultă că din punctul de vedere al primului criteriu, forma optimă este asigurată de *triunghiul isoscel*. Pentru a obține valorile unghiulare care satisfac și cel de-al doilea criteriu, se introduce în expresia lui R : $B^0 = 180^\circ - 2A^0$, astfel încât se obține:

$$R_{isoscel} = ctg^2 A^0 + ctg^2 2A^0 - ctg A^0 ctg 2A^0 \quad 8.42$$

Minimul acestei expresii se obține prin anularea derivatei funcției din membrul drept, care oferă soluția $A^0 = 52^\circ 46'$ și prin urmare rezultă: $B^0 = 74^\circ 28'$.

Pentru asemenea triunghi isoscel se obține: $R_{isoscel} = 0,865$.

Criteriul al treilea este realizat prin utilizarea *triunghiului echilateral*. Într-adevăr, aria unui triunghi oarecare $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ atinge o valoare maximă, în condiția $2p = a + b + c = constant$, atunci când $a = b = c$. Pentru triunghiul echilateral se obține $R = 1,0$. Prin urmare coeficientul R este mai mare în cazul triunghiului echilateral.

Dar influența utilizării triunghiurilor isoscele optime nu este, comparativ, semnificativă.

Din figura (4) se observă că triunghiul echilateral are în plus încă un avantaj față de triunghiul isoscel: lanțurile cu triunghiuri apropiate echilaterale păstrează în general o formă regulată rectilinie, ceea ce este convenabil pentru proiectare.

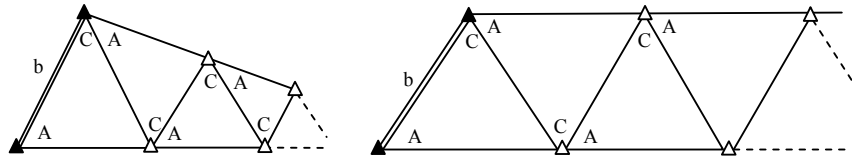


Fig. 4 Dezvoltarea unui lanț de triunghiuri:

a – triunghiuri isoscele ($\hat{A} = \hat{C} = 52^\circ$); b – triunghiuri echilaterale

Condițiile concrete din teren conduc la abateri de la configurația optimă. În acest sens, instrucțiunile *DTM* prevăd (tabelul 2) valorile minime ale unghiurilor acceptate în figurile geometrice din rețelele de triangulație, care alături de elementele din tabelul (3) reprezintă prescripții de proiectare a rețelelor de triangulație din țara noastră.

Tabelul 2

Ordinul rețelei	În triunghiuri	În patrulatere
I	45 ^g (40°)	35 ^g (30°)
II	33 ^g (30°)	17 ^g (15°)
III	28 ^g (25°)	-
IV	28 ^g (25°)	-
V	30 ^g (27°)	-

Tabelul 3

Ordinul de triangulație	Lungimea medie a laturii [km]	Lungimea minimă a laturii [km]
I	{ 25 la munte 20 la șes	10
II	13	7
III	8	5,5
IV	4	2
V	2	1

8.4.3 Unghiul optim la intersecția simplă înainte

În unele situații izolate în triangulația de stat și mai frecvent în unele triangulații locale, îndeșirea rețelei se realizează prin intersecții multiple înainte (uneori și prin intersecții multiple înapoi), care sunt prelucrate fie riguros, fie prin anumite metode aproximative. De aceea, intersecția simplă înainte poate fi considerată ca un caz particular, ce ne va ajuta însă să desprindem o concluzie cu privire la conformația optimă a figurii geometrice care intervine în asemenea lucrări.

În figura (5) este reprezentat cazul tipic al intersecției simple înainte:

- coordonatele x_1, y_1 și x_2, y_2 ale punctelor 1 și 2 sunt considerate ca nefiind afectate de erori
- unghiurile α_1 și α_2 sunt măsurate cu aceeași precizie: $s_{\alpha_1} = s_{\alpha_2} = s''_{\alpha}$ și ca urmare $s_{\theta_1} = s_{\theta_2} = s''_{\alpha}$.

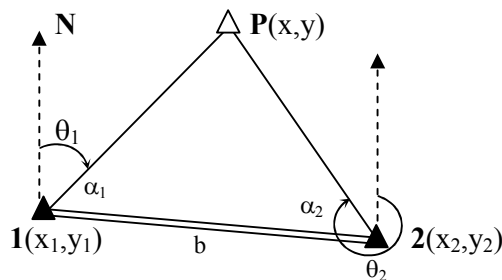


Fig. 5 Intersecția simplă înainte

Se consideră cunoscute formulele intersecției simple înainte:

$$x = \frac{y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{tg} \theta_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1} \quad 8.43$$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \theta_1 = y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \theta_2$$

sau:

$$y = \frac{x_1 - x_2 + y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_1 \operatorname{ctg} \theta_1}{\operatorname{ctg} \theta_2 - \operatorname{ctg} \theta_1} \quad 8.44$$

$$x = x_1 + (y - y_1) \operatorname{ctg} \theta_1 = x_2 + (y - y_2) \operatorname{ctg} \theta_2$$

Soluția la problema pusă depinde de forma *funcției scop* utilizată: *Helmert* (1868) folosește pentru prima dată condiția de minim referitoare la eroarea totală de determinare a poziției punctului nou:

$$s_t^2 = s_x^2 + s_y^2 = \min \quad 8.45$$

Deoarece $x = f(\theta_1, \theta_2)$, unde θ_1 și θ_2 pot fi considerate, în limitele convențiilor inițiale, ca independente, putem calcula s_x pe baza relației specifice observațiilor directe independente. Pentru aceasta, deducem din relațiile (8.43):

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{-\frac{x_1}{\cos^2 \theta_1} (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) + \frac{1}{\cos^2 \theta_1} (y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{tg} \theta_2 - x_1 \operatorname{tg} \theta_1)}{(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)^2} \quad 8.46$$

Utilizând relația (8.43) și notând $\overline{1P} = d_1$, $\overline{2P} = d_2$, $\widehat{1P2} = \gamma$ rezultă:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{x - x_1}{\cos^2 \theta_1 (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)} = \frac{d_1 \cos \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad 8.47$$

În mod analog se obține:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = \frac{d_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad 8.48$$

astfel încât:

$$s_x^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''} \right)^2 \frac{d_1^2 \cos^2 \theta_2 + d_2^2 \cos^2 \theta_1}{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)} \quad 8.49$$

Procedând în același mod cu relația (8.44) se obține:

$$s_y^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''} \right)^2 \frac{d_1^2 \sin^2 \theta_2 + d_2^2 \sin^2 \theta_1}{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)} \quad 8.50$$

astfel încât eroarea totală s_t poate fi exprimată prin:

$$s_t^2 = \left(\frac{m_\alpha''}{\rho''} \right)^2 \cdot \frac{d_1^2 + d_2^2}{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)} \quad 8.51$$

Deoarece:

$$\gamma = \theta_1 - \theta_2 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

și

$$d_1 = \frac{b \sin \alpha_2}{\sin \gamma}; \quad d_2 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \gamma}$$

se poate exprima eroarea s_t și în funcție de unghiurile măsurate α_1 și α_2 :

$$s_t^2 = \left(\frac{s_\alpha''}{\rho''} \right)^2 \cdot b^2 \frac{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2}{\sin^4(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad 8.52$$

Relațiile (8.51) și (8.52) pot fi folosite pentru estimarea erorii medii totale s_t de determinare, prin intersecție simplă înainte, a poziției punctului nou P .

Minimul funcției (8.52) are loc când:

$$\frac{\partial s_t}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \text{și} \quad \frac{\partial s_t}{\partial \alpha_2} = 0$$

adică:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - 2 (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \\ \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - 2 (\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2) \cos (\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \end{aligned} \quad 8.53$$

Din compararea celor două relații (8.53) se obține:

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha_2 \cos \alpha_2$$

Această egalitate poate avea loc, în principiu, în următoarele cazuri:

$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$, caz imposibil însă, căci din relațiile (8.53) ar rezulta pentru α_1 și α_2 fie soluțiile $0; 0$, respectiv $0; \pi/2$, ceea ce contrazice realitatea;

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Introducând aceste soluții în relațiile (8.54) rezultă:

$$4 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha$$

Din rezolvarea acestei ecuații se obține soluția pentru cazul optim:

$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}/2$, astfel încât $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 35^\circ 15'$ și prin urmare unghiul optim sub care se intersectează vizele în punctul nou este:

$$\gamma_{\text{optim}} \approx 109^\circ 30' \quad 8.54$$

8.4.4 Forma optimă a rețelei de dezvoltare a unei baze de triangulație

În afara laturilor măsurate direct, în triangulație s-au folosit și se folosesc încă laturi obținute din dezvoltarea bazelor de triangulație. Datorită propagării erorilor, latura finală obținută din prelucrarea riguroasă a rețelei de dezvoltare a bazei, care va fi ulterior folosită în rețeaua de triangulație ca lungime cunoscută (uneori fiind considerată chiar ca valoare neafectată de erori), nu va mai avea aceeași precizie cu baza propriu-zisă.

În triangulația lui *W. Snellius* (1615) este folosită rețeaua de dezvoltare din figura (6), a cărei formă asigură, în principiu, cea mai avantajoasă propagare a erorilor din toate posibilitățile utilizate până în prezent. De aceea, rețeaua de dezvoltare a bazei formată dintr-o succesiune de romburi, mai mult sau mai puțin conformate, este folosită pe larg în lucrările de triangulație (fig. 7).

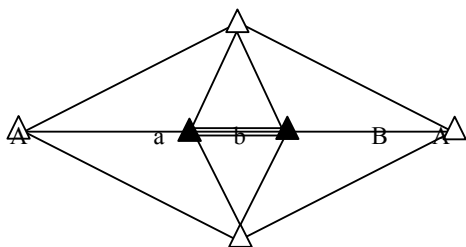


Fig. 6 Baza Snellius, (1615):
 $ab=328 \text{ m}$, $AB=4114 \text{ m}$

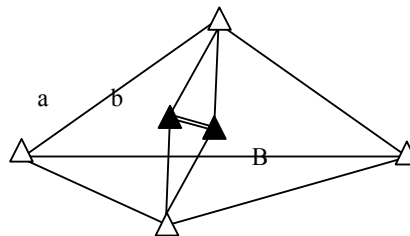


Fig. 7 Baza Bonn, (1892),
 $ab=2513 \text{ m}$, $AB=30285 \text{ m}$

S-au mai utilizat și alte sisteme de rețele de dezvoltare a bazelor (fig. 8 și 9), care conduc la o pierdere prea mare a preciziei obținute la măsurarea directă de lungime. Baza măsurată direct $b = \overline{ab}$ este caracterizată în general printr-o eroare relativă $s'_b/b \leq 1/1 \cdot 10^6$, iar latura de dezvoltare $B = \overline{AB}$ are eroarea relativă s'_B/B de circa $1/4 \cdot 10^5$ în cazul rețelelor de tipul prezentat în figurile (6) și (7) și de circa $1/2 \cdot 10^5$ (uneori chiar mai mari) pentru rețelele din figurile (8) și (9). Este de menționat faptul că forma rețelei de dezvoltare a bazei este impusă de obstacolele din teren, ajungându-se uneori la soluții complicate, de tipul celor din figura 9.9. Deoarece chiar în cadrul rețelelor de dezvoltare formate din succesiuni de romburi, se pot obține precizii diferite în funcție de mărimea unghiurilor care intervin, se poate demonstra (Krasovski 1955, Ghițău 1972) că forma optimă a unei rețele de dezvoltare a bazei de triangulație se obține atunci când unghiurile ascuțite au valoarea de $33^\circ 33'$.

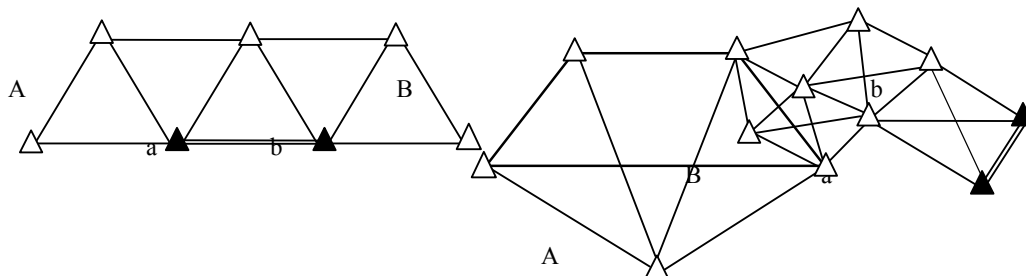


Fig. 8 Baza de triangulație de la Capul Bunei Speranțe, (1886)

Fig. 9 Baza de triangulație din Creta, (1933)