

**Ilare BORDEAȘU      Eugen DOBÂNDĂ      Cornel VELESCU**  
**Cezar Dorin GALERIU      Ionel Doru BACIU      Adriana MANEA**  
**Liliana SUCITU      Rodica BĂDĂRĂU      Constantin FLORESCU**

# **PROBLEME DE HIDRODINAMICĂ, REȚELE DE CONDUCTE, CANALE ȘI MAȘINI HIDRAULICE**

**- EDIȚIA A DOUA REVIZUITĂ ȘI COMPLETATĂ -**

**TIMISOARA**  
**- 2013 -**

## Prefață

Lucrarea constituie o revizuire a primei editii „**NOȚIUNI TEORETICE ȘI POBLEME DE HIDRODINAMICĂ, CONDUCTE, CANALE ȘI MAȘINI HIDRAULICE**”, cu modificările și completările de rigoare.

Modul în care sunt prezentate noțiunile teoretice și rezolvate problemele poate facilita abordarea și rezolvarea unui caz mai complex, practic, de sistem hidraulic și alimentari cu apă.

În cadrul acestei lucrări s-a urmărit tratarea de la simplu spre complex în scopul facilitării înțelegerii mai rapide a modului de aplicare a relațiilor specifice și de creare a unei gândiri inginerești, caracteristică domeniului mecanicii fluidelor și mașinilor hidraulice.

Pentru o mai ușoară înțelegere, fiecare capitol debutează cu notațiile utilizate și elementele teoretice necesare rezolvării problemelor. Excepție face ultimul capitol care constituie o îmbinare a tipurilor de probleme abordate anterior în această carte combinate și cu elemente de hidrostatică.

La baza conceperii problemelor au stat fenomenele din practică, dar și ideile izvorâte din exercițiile de seminar, din proiectele de an și diplomă și din concursurile profesionale organizate atât la nivel local cât și național.

De asemenea, problemele rezolvate și propuse spre rezolvare sunt de un real folos studenților care parcurg disciplinele de mecanica fluideor, instalații pentru alimentari, canale și mașini hidraulice, pentru pregătirea concursurilor profesionale, dar și inginerilor ce lucrează în domeniul cu specific hidraulic.

Distribuția capitolelor este următoarea:

- Capitolul 1 Asist.dr.ing. Rodica BĂDĂRĂU,
- Capitolul 2 S.L.dr.ing. Cezar Dorin GALERIU,
- Capitolul 3 Ing. Liliana SUCITU, S.L.dr.ing. Constantin FLORESCU
- Capitolul 4 S.L.dr.ing. Adriana MANEA, S.L.dr.ing. Constantin FLORESCU,
- Capitolul 5 Prof.univ.dr.ing. Ilare BORDEAȘU, Asist.dr.ing. Ionel Doru BACIU,
- Capitolul 6 S.L.dr.ing. Cornel VELESCU,
- Capitolul 7 S.L.dr.ing. Eugen DOBÂNDĂ,
- Capitolul 8 Prof.univ.dr.ing. Ilare BORDEAȘU, S.L.dr.ing. Constantin FLORESCU.

Coordonarea lucrării a fost făcută de către Prof. univ. dr. ing. Ilare BORDEAȘU.

Orice sugestie de îmbunătățire a unei viitoare ediții este bine venită, apreciată și va primi recunoștința și mulțumirile autorilor.

Autorii

## C U P R I N S

<b>PREFATA</b>		<b>5</b>
<b>CAPITOLUL 1</b>	<b><i>Analiza dimensională și similitudinea hidrodinamică</i></b>	<b>9</b>
	1.1 <i>Introducere</i> .....	10
	1.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	10
	1.3 <i>Aplicații</i> .....	15
	1.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	15
	1.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	34
<b>CAPITOLUL 2</b>	<b><i>Calculul și măsurarea debitului fluidelor incompresibile în mișcare permanentă</i></b>	<b>35</b>
	2.1 <i>Introducere</i> .....	35
	2.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	36
	2.3 <i>Aplicații</i> .....	38
	2.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	38
	2.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	49
<b>CAPITOLUL 3</b>	<b><i>Curgerea lichidelor prin conducte</i></b> .....	<b>55</b>
	3.1 <i>Introducere</i> .....	55
	3.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	55
	3.3 <i>Aplicații</i> .....	59
	3.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	59
	3.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	72
<b>CAPITOLUL 4</b>	<b><i>Rețele de conducte</i></b> .....	<b>77</b>
	4.1 <i>Introducere</i> .....	77
	4.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	77
	4.3 <i>Aplicații</i> .....	79
	4.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	79
	4.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	90
<b>CAPITOLUL 5</b>	<b><i>Teoremele impulsului</i></b> .....	<b>93</b>
	5.1 <i>Introducere</i> .....	94
	5.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	94
	5.3 <i>Aplicații</i> .....	96
	5.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	96
	5.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	113
<b>CAPITOLUL 6</b>	<b><i>Curgerea lichidelor prin canale și conducte cu suprafață liberă</i></b> .....	<b>117</b>
	6.1 <i>Introducere</i> .....	118
	6.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	118
	6.3 <i>Aplicații</i> .....	131
	6.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	131
	6.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	147

<b>CAPITOLUL 7</b>	<b><i>Mașini hidraulice</i></b> .....	<b>149</b>
	7.1 <i>Introducere</i> .....	149
	7.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	150
	7.3 <i>Aplicații</i> .....	159
	7.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	159
	7.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	165
<b>CAPITOLUL 8</b>	<b><i>Probleme propuse la concursurile profesionale</i></b> .....	<b>167</b>
	8.1 <i>Introducere</i> .....	167
	8.2 <i>Noțiuni teoretice</i> .....	167
	8.3 <i>Aplicații</i> .....	167
	8.3.1 <i>Probleme rezolvate</i> .....	167
	8.3.2 <i>Probleme propuse spre rezolvare</i> .....	196
<b>BIBLIOGRAFIE</b>	.....	<b>207</b>

# CAPITOLUL 1

## ANALIZA DIMENSIONALĂ ȘI SIMILITUDINEA HIDRODINAMICĂ

### NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE

- $p$ -presiunea, în  $N/m^2$   
 $v$ -viteza, în  $m/s$   
 $\rho$ -densitatea mediului lichid, în  $kg/m^3$   
 $m$ -masa, în  $kg$   
 $V$ -volumul, în  $m^3$   
 $S$ -aria suprafeței, în  $m^2$   
 $F$ -forța, în  $N$   
 $G$ -greutatea, în  $N$   
 $g=9,80665 m/s^2$  –accelerația gravitațională  
 $\gamma$ -greutatea specifică, în  $N/m^3$   
 $\nu$ -coeficientul cinematic de viscozitate, în  $m^2/s$   
 $\eta$ -coeficientul dinamic de viscozitate, în  $N\cdot s/m^2$  sau  $Pa\cdot s$   
 $\sigma$ -tensiunea superficială, în  $N/m$   
 $E$ -modul de elasticitate, în  $N/m^2$   
 $Q$ -debit volumic, în  $m^3/s$   
 $l$ -lungime, în  $m$   
 $d$ -diametrul conductei, în  $m$   
 $l_0$ -scara lungimilor  
 $S_0$ -scara suprafețelor  
 $V_0$ -scara volumelor  
 $t_0$ -scara timpilor  
 $v_0$ -scara vitezelor  
 $a_0$ -scara accelerațiilor  
 $F_0$ -scara forțelor  
 $m_0$ -scara maselor  
 $Fr$ -numărul Froude  
 $Sh$ -numărul Strouhal  
 $Eu$ -numărul Euler  
 $Re$ -numărul Reynolds  
 $Ma$ -numărul Mach  
 $Ga$ -numărul Galilei  
 $We$ -numărul Weber  
 $Ne$ -numărul Newton

## 1.1. INTRODUCERE

Este practic imposibil de a rezolva toate problemele curgerii unui fluid dat numai pe cale teoretică. La stadiul actual al cunoștințelor în domeniu, cercetarea experimentală ocupă un loc important. Teoria matematică și datele experimentale au furnizat soluții practice pentru mai multe probleme de hidraulică. Aplicațiile analizei dimensionale și ale similitudinii hidraulice permit inginerului organizarea și simplificarea experimentelor și analizarea rezultatelor obținute.

În acest capitol se vor prezenta principiul ce stă la baza analizei dimensionale și câteva aplicații ce servesc la înțelegerea modului de utilizare a analizei dimensionale în stabilirea formulelor pentru anumite mărimi fizice, specifice mecanicii fluidelor. De asemenea, se vor prezenta relațiile de similitudine cu aplicații specifice.

## 1.2. NOȚIUNI TEORETICE

Problemele de mecanica fluidelor pot fi abordate pe calea analizei dimensionale, care este în esență o procedură matematică care studiază în exclusivitate dimensiunile mărimilor fizice. În cadrul ei se pornește de la înțelegerea fenomenelor curgerii pentru a stabili parametrii care o influențează și se ajunge la gruparea acestor parametrii în combinații dimensionale, la o mai bună cunoaștere și explicare a fenomenelor. Analiza dimensională este de un real folos în studiile experimentale pentru că poate indica mărimile sau parametrii ce influențează cu adevărat desfășurarea fenomenelor fizice.

Conform *principiului omogenității dimensionale* toate relațiile matematice, care exprimă fenomene fizice, trebuie să fie omogene din punct de vedere dimensional (toți termenii ecuației trebuie să aibă aceleași dimensiuni).

Dacă termenii unei ecuații omogene din punct de vedere dimensional se împart cu o cantitate care se exprimă în aceleași dimensiuni va rezulta o adimensionare a termenilor, ecuația devenind o relație adimensională între grupuri de numere și de o formă mai simplă. În acest mod se procedează în cadrul unei analize dimensionale, grupându-se toate variabilele implicate într-o ecuație care conține grupuri de numere adimensionale, evitând cercetarea experimentală, grupurile adimensionale fiind în număr mult mai redus decât variabilele.

Aplicațiile analizei dimensionale constau în:

- transformarea dintr-un sistem de unități în altul;
- stabilirea ecuațiilor;
- reducerea numărului de variabile necesare la un program experimental;
- stabilirea principiilor de concepere a unui model.

**Teorema Pi** (Teorema lui Buckingham)

Această teoremă reprezintă o generalizare a metodei analizei dimensionale având o largă utilizare în prezent. Teorema Pi are principalul avantaj că reduce numărul de variabile la grupuri de mărimi adimensionale.

Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reprezintă  $n$  variabile dimensionale care sunt implicate în desfășurarea unui fenomen fizic și între ele există o legătură implicită de forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

atunci se poate exprima această legătură sub forma unei dependențe:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$$

unde  $\Pi_i$  reprezintă combinații adimensionale ale variabilelor  $x_i$ .

Aplicarea teoremei Pi presupune parcurgerea a șapte etape:

Prima etapă

- Se evidențiază fenomenului fizic și factorii care îl pot influența, cu stabilirea celor  $n$  variabile.

A doua etapă

- Dimensiunile mărimilor fizice sunt exprimate în SI în combinația de unități fundamentale masă – lungime – timp (MLT), sau în combinația forță – lungime – timp (FLT). Se alege în Sistemul Internațional SI unul din modurile de exprimare (MLT sau FLT) și se stabilesc dimensiunile fiecărei variabile, găsindu-se și numărul  $m$  al dimensiunilor fundamentale ale variabilelor.

A treia etapă

- Se va găsi numărul  $k$  (care de obicei este egal cu  $m$ , niciodată mai mare și rareori mai mic).

A patra etapă

Se determină numărul grupurilor adimensionale  $\Pi_{i,n-k}$  și se poate scrie:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0$$

A cincea etapă

Din numărul total de variabile se selectează un număr de  $k$ , denumite variabile primare. Acestea trebuie să conțină toate cele  $m$  dimensiuni fundamentale și nu trebuie să formeze grupuri  $\Pi$  între ele. Se formează grupurile  $\Pi$  prin înmulțirea variabilelor primare între ele, fiecare cu un exponent necunoscut.

A șasea etapă

Pentru satisfacerea omogenității dimensionale se formează un sistem de ecuații care are la bază egalitatea exponenților variabilelor primare din ambele părți ale ecuațiilor, deoarece  $\Pi_i$  nu au dimensiuni pot fi înlocuiți cu  $M^o L^o T^o$ . Se verifică adimensionalizarea factorilor  $\Pi_i$ .

A șaptea etapă

Se rearanjează grupurile  $\Pi_i$  după dorință. Teorema Pi arată că grupurile  $\Pi_i$  sunt legate între ele:

$$\Pi_1 = f_1(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k})$$

Analiza dimensională nu oferă o rezolvare completă a problemei, ci numai o soluție parțială, iar reușita depinde de cele mai multe ori de abilitatea în selectarea parametrilor și mărimilor.

În multe situații dezvoltarea experimentului are loc în laborator pe instalații care diferă constructiv de cele industriale, dar permit o desfășurare identică sau similară a fenomenelor studiate. Pentru a utiliza rezultatele de laborator la instalațiile industriale, s-au stabilit relații matematice cunoscute sub denumirea de *legi de similitudine*. Acestea permit desfășurarea experimentului cu un fluid convenabil pentru utilizare și aplicarea rezultatelor la un fluid mai puțin convenabil pentru utilizare experimentală. Aceste legi sunt deosebit de utile pentru că se pot utiliza pe o instalație sau mașină mai simplă și de dimensiuni reduse (*modelul*), fiind posibilă reducerea substanțială a costurilor de cercetare și permit transpunerea rezultatelor de la model la instalația sau mașina în mărime naturală (*prototip*). Pentru ca rezultatele stabilite pe modele să poată fi utilizate la instalația în natură, trebuie respectate *condițiile de similitudine*.

Două mișcări sunt asemenea când traiectoriile lor sunt geometric asemenea și când există raporturi determinante între mărimile cinematice și dinamice ale celor două fenomene în două puncte omoloage.

Pentru a realiza similitudinea dinamică a două fenomene nu este suficient ca raportul dimensiunilor liniare să fie constant. Trebuie ca și rapoartele mărimilor cinematice și dinamice să fie constante.

*Similitudinea geometrică* se realizează atunci când raportul dintre dimensiunile liniare de pe prototip și cele de pe model este constant. Raportul:

$$l_o = \frac{l_p}{l_m}$$

se numește *scara lungimilor* sau *scară geometrică*. Se poate stabili și *scara suprafețelor*:

$$S_o = \frac{S_p}{S_m} = l_o^2$$

și *scara volumelor*:

$$V_o = \frac{V_p}{V_m} = l_o^3$$

*Similitudinea cinematică* implică, în puncte omoloage, similitudinea geometrică a câmpului hidrodinamic și raport constant al mărimilor cinematice de același tip (viteze, accelerații). Odată stabilită scara lungimilor, rezultă un raport constant al timpului în care se desfășoară fenomenul pe prototip și timpul în care se desfășoară fenomenul pe model, adică *scara timpului*:

$$t_o = \frac{t_p}{t_m}$$



Cu acestea se pot determina scările tuturor mărimilor cinematice în funcție de  $l_o$  și  $t_o$ . Astfel avem *scara vitezelor*:

$$v_o = \frac{v_p}{v_m} = l_o t_o^{-1}$$

și *scara accelerațiilor*:

$$a_o = \frac{a_p}{a_m} = l_o t_o^{-2}$$

*Similitudinea dinamică* impune ca raportul tuturor forțelor din natură, de pe prototip și de pe model, să fie constant. Rezultă, astfel, *scara forțelor*:

$$F_o = \frac{F_p}{F_m}$$

Din similitudinea mecanică se poate defini și o *scară a maselor*, și anume:

$$m_o = \frac{m_p}{m_m}$$

Numărul Froude:

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l}$$

Numărul Strouhal:

$$Sh = \frac{v \cdot t}{l}$$

Numărul Euler:

$$Eu = \frac{p}{\rho \cdot v^2}$$

Numărul Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

Numărul Mach:

$$Ma = \frac{v}{v_s}$$

unde  $v_s$  este viteza sunetului în mediu considerat.

Număr Weber:

$$We = \frac{\rho \cdot l \cdot v^2}{\sigma}$$

Numărul Galilei:

$$Ga = \frac{g \cdot l^3}{\nu^2}$$

Numărul Newton:

$$Ne = \frac{F}{\rho \cdot S \cdot \nu}$$

Aceste mărimi se mai numesc și *criterii de similitudine*.

*Teorema lui Newton* afirmă că într-un grup de fenomene asemenea, fiecare criteriu de similitudine are câte o valoare unică pentru toate fenomenele grupului.

Respectarea simultană a tuturor acestor criterii ne conduce la o *similitudine completă*. Dar în realitate respectarea simultană a acestor criterii nu este posibilă practic. Similitudinea nu se va realiza după toate criteriile, ci numai după anumite criterii, care sunt determinante în desfășurarea unui fenomen. Astfel se realizează o *similitudine incompletă*.

Transpunerea rezultatelor de pe un model la prototip va fi din această cauză afectată de erori, iar influența parametrilor neglijăți apare în așa numitul efect de scară.

Vom prezenta unde se utilizează fiecare din criteriile de similitudine ca și criteriu determinant.

Similitudinea Strouhal se utilizează în cazul mișcărilor nepermanente periodice. Acestea apar când vârtejurile formate se desprind alternativ de pe o parte sau alta în spatele unui corp, când fluidul se află într-o mișcare de val și când un corp situat în fluid are o mișcare periodică. Deoarece în tehnică cele mai multe mișcări nepermanente ale fluidelor sunt mișcări periodice, criteriul lui Strouhal este considerat de obicei drept criteriul de similitudine al mișcărilor periodice ale fluidelor. În multe cazuri odată cu criteriul Strouhal trebuie asigurat și criteriul Reynolds.

Similitudinea Froude se utilizează în cazul în care în timpul mișcării elementul determinant este greutatea. Aceasta apare ca element predominant la curgerea apei peste deversoare, la mișcarea valurilor, la determinarea componente de val a rezistenței la înaintare a navelor de suprafață. Apare în general când mișcările au suprafețe libere care nu sunt plane orizontale, deoarece la aceste mișcări efectul greutății proprii este determinant pentru forma suprafeței libere. În cazul mișcării lichidelor peste deversoare sau în cazul mișcării valurilor, efectul vâscozității și efectul capilarității sunt neglijate în raport cu efectul greutății proprii a lichidului. Alături, însă, pe lângă efectul greutății proprii a lichidelor, trebuie luate în considerare și alte efecte. Astfel, în mișcarea lichidelor în canale, pe lângă efectul greutății proprii trebuie luat în considerare și efectul vâscozității, iar la deversoarele având o lamă deversantă foarte subțire și la valurile de dimensiuni mici, pe lângă efectul greutății proprii trebuie luat în considerare și efectul capilarității.

Similitudinea Reynolds trebuie asigurată dacă frecarea vâscoasă are un rol predominant. Cu cât numărul Reynolds este mai mic cu atât influența vâscozității asupra mișcării fluidului este mai mare. Se aplică la curgerea lichidelor în conducte sub presiune, la curgerea în mașinile hidraulice și la curgeri în tunele aerodinamice la

viteze la care se poate neglija compresibilitatea fluidului. În general, ca lungime de referință se alege diametrul conductei, grosimea unui strat de fluid, coarda unui profil aerodinamic.

Criteriul Euler este satisfăcut automat dacă sunt îndeplinite simultan criteriile Strouhal, Froude și Reynolds. Apare în studiul fenomenului de cavitație.

Criteriul de similitudine Mach se aplică în cazul în care viteza curentului este mare și compresibilitatea fluidului datorită vitezei curentului nu poate fi neglijată (la mișcarea cu viteze foarte mari a unui gaz, în cazul loviturii de berbec).

Criteriul de similitudine de tip Weber se respectă în cazul mișcărilor la care sunt determinante forțele de tensiune superficiale (picături, deci la pulverizarea lichidelor, valuri de dimensiuni mici, la studiul curgerii lichidelor în tuburi capilare sau în canale cu adâncime foarte mică). În aplicațiile curente, forțele de tensiune superficială sunt însă cu totul neglijabile, în raport cu celelalte tipuri de forțe.

Criteriul Galilei intervine la mișcarea liberă a lichidelor. Acest număr este de fapt o combinație a criteriilor de similitudine.

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr}$$

Criteriul Newton se utilizează la modelarea fenomenelor hidrodinamice la care forțele de inerție joacă un rol important, adică la studiul pe model al curgerii în jurul corpurilor (studiul rezistențelor la înaintare, studiul acțiunii curentului asupra profilelor hidrodinamice utilizate în mașinile hidraulice, în aviație).

### **1.3. APLICAȚII**

#### **1.3.1 Probleme rezolvate**

**1.1** Să se exprime dimensiunile mărimilor fizice folosite în hidraulică în funcție de masa  $M$ , lungimea  $L$  și timpul  $T$ .

#### **REZOLVARE**

Mărimile fizice ce le folosim în hidraulică, respectiv dimensiunea lor în funcție de  $MLT$  se pot deduce în funcție de relațiile de definiție ale acestor mărimi, și le trecem direct în tabelul următor. Pentru toate aceste mărimi se pot găsi similar dimensiunile în funcție de  $FLT$ .

## 16 Noțiuni teoretice și probleme de hidrodinamică

Nr. crt.	Mărimea fizică	Simbol	Unități de măsură	Dimensiunea (Relația în MLT)
1.	Masa	m	Kg	M
2.	Lungimea	l	m	L
3.	Timp	t	s	T
4.	Aria	A	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>
5.	Volumul	V	m <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>
6.	Viteza	V	m/s	LT <sup>-1</sup>
7.	Accelerația	a	m/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>
8.	Accelerația gravitațională	g	m/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>
9.	Viteza unghiulară	ω	rad/s	T <sup>-1</sup>
10.	Forța	F	N=kg m /s <sup>2</sup>	MLT <sup>-2</sup>
11.	Greutatea	G	N	MLT <sup>-2</sup>
12.	Moment	M	N·m	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
13.	Puterea	P	W	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
14.	Densitatea masică	ρ	kg/m <sup>3</sup>	ML <sup>-3</sup>
15.	Greutate specifică	γ	kg/(m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> )	ML <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>
16.	Presiunea	p	Pa=N/m <sup>2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
17.	Tensiunea	τ	N/m <sup>2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
18.	Tensiunea superficială	σ	N/m	MT <sup>-2</sup>
19.	Vâscozitatea dinamică	η	Pa · s	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>
20.	Vâscozitatea cinematică	ν	m <sup>2</sup> /s	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
21.	Modul de elasticitate	E	N/m <sup>2</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
22.	Coeficient de compresibilitate	B	m <sup>2</sup> /N	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
23.	Debit volumic	Q	m <sup>3</sup> /s	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>
24.	Debit masic	• m	kg/s	MT <sup>-1</sup>

**1.2** Să se arate prin analiză dimensională relația dintre numărul Reynolds și densitatea  $\rho$ , vâscozitatea cinematică  $\nu$ , viteza  $v$  a unui fluid și o lungime caracteristică  $l$ .

### REZOLVARE

Folosind analiza dimensională pentru stabilirea relației dintre numărul Reynolds și mărimile enumerate pornim de la faptul că numărul Reynolds este în funcție de mărimile  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $v$  și  $l$ , adică:

$$Re = f(\rho, \nu, v, l)$$

Analiza dimensională se bazează pe faptul că o relație între mărimile fizice trebuie să fie omogenă dimensional. Utilizăm metoda Rayleigh care presupune că mărimea rezultantă, în cazul nostru numărul  $Re$ , se poate scrie ca fiind proporțională cu un produs de puteri al mărimilor care o determină, adică:

$$Re = k \cdot \rho^a \cdot \nu^b \cdot v^c \cdot l^d$$

unde  $k$  este coeficientul de proporționalitate. Puterile  $a, b, c, d$  se găsesc impunând condiția ca această relație să fie omogenă dimensional:

$$\begin{aligned} M^o L^o T^o &= k (ML^{-3})^a (L^2 T^{-1})^b (LT^{-1})^c L^d \\ M^o L^o T^o &= k \cdot M^a L^{-3a+2b+c+d} T^{-b-c} \end{aligned}$$

adică să avem următoarele egalități:

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = -3a + 2b + c + d \\ 0 = -b - c \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații obținem:

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = -b \end{cases}$$

adică:

$$Re = k \cdot \rho^o \nu^b \nu^{-b} l^{-b} = k \cdot \left( \frac{\nu \cdot l}{\nu} \right)^{-b}$$

**OBSERVAȚIE:** Valorile lui  $k$  și  $b$  se determină prin analiză experimentală. În condițiile noastre  $k=1$  și  $b=-1$  și atunci pentru numărul  $Re$  se obține relația cunoscută:

$$Re = \frac{\nu \cdot l}{\nu}$$

**1.3** Pentru un lichid ideal să se exprime debitul  $Q$  care trece printr-un orificiu mic în funcție de densitatea lichidului  $\rho$ , diferența de presiune și diametrul orificiului.

#### **REZOLVARE**

Folosind analiza dimensională pentru stabilirea relației:

$$Q = f(\rho, p, d)$$

$$Q = k \cdot \rho^a \cdot p^b \cdot d^c$$

$$L^3 T^{-1} = k \cdot (ML^{-3})^a (ML^{-1} T^{-2})^b L^c$$

Adică avem sistemul:

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 3 = -3a - b + c \\ -1 = -2b \end{cases}$$

și rezultă:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

și obținem relația:

$$Q = k \cdot \rho^{-1/2} \cdot p^{1/2} \cdot d^2 = k \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

**OBSERVAȚIE:** Din experimente și considerând că pentru un orificiu situat pe o parte a unui rezervor la adâncimea  $H$  avem relația  $p = \rho \cdot g \cdot H$  se constată că avem

$k = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4}$ , deci:

$$Q = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot g \cdot H}{\rho}} = \frac{1}{4} \pi \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

**1.4** Folosind analiza dimensională să se determine presiunea unui fluid incompresibil asupra unui obiect imersat admitând că presiunea este funcție de densitate și de viteză.

**REZOLVARE**

Căutăm o dependență de forma:

$$p = f(\rho, v)$$

$$p = k \cdot \rho^a \cdot v^b$$

$$ML^{-1}T^{-2} = k \cdot (ML^{-3})^a (LT^{-1})^b$$

$$ML^{-1}T^{-2} = k \cdot M^a L^{-3a+b} T^{-b}$$

adică obținem sistemul:

$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = -3a + b \\ -2 = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Obținem:

$$p = k \cdot \rho \cdot v^2$$

**1.5** Admițând că puterea furnizată de o pompă este funcție de greutatea specifică a lichidului  $\gamma$ , de debit  $Q$  și de înălțimea de pompare  $H$ , stabiliți o ecuație prin analiză dimensională.

**REZOLVARE**

$$P = f(\gamma, Q, H)$$

$$P = k \cdot \gamma^a \cdot Q^b \cdot H^c$$

$$ML^2T^{-3} = k \cdot (ML^{-2}T^{-2})^a (L^3T^{-1})^b L^c$$

$$ML^2T^{-3} = k \cdot M^a L^{-2a+3b+c} T^{-2a-2b}$$

Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = -2a + 3b + c \\ -3 = -2a - b \end{cases}$$

care rezolvat dă soluția:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Obținem astfel pentru putere relația:

$$P = k \cdot \gamma \cdot Q \cdot H$$

Pentru  $k = 1$  și ținând cont că  $\gamma = \rho \cdot g$  obținem relația cunoscută:

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

**1.6** Să se stabilească relația de calcul pentru puterea furnizată de o pompă prin analiză dimensională știind că aceasta se va exprima în funcție de densitatea lichidului vehiculat, accelerația gravitațională, debitul  $Q$  și înălțimea de pompare  $H$ .

**REZOLVARE**

Această problemă este asemănătoare cu problema anterioară, ea va ajunge practic la același rezultat. Se pornește deci de la legătura dintre mărimile fizice precizate în enunț.

$$P = f(\rho, g, Q, H)$$

$$P = k \cdot \rho^a \cdot g^b \cdot Q^c \cdot H^d$$

adică:

$$ML^2T^{-3} = k \cdot (ML^{-3})^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot (L^3T^{-1})^c \cdot L^d$$

$$ML^2T^{-3} = k \cdot M^a \cdot L^{-3a+b+3c+d} \cdot T^{-2b-c}$$

și se ajunge la sistemul:

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = -3a + b + 3c + d \\ -3 = -2b - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 3c + d = 5 \\ 2b + c = 3 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea sistemului se observă că avem 3 ecuații și 4 necunoscute. De aceea ne folosim de faptul că rezolvând problema anterioară am obținut că  $b = 1$  și pentru acest caz avem:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

adică:

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H$$

deci am obținut și în acest caz rezultatul problemei anterioare.

**1.7** Admițând că forța cu care acționează un fluid în mișcare asupra unui corp este funcție de densitate, vâscozitatea dinamică, viteza fluidului și o lungime caracteristică a corpului stabiliți ecuația generală a forței.

**REZOLVARE**

Folosind tot analiza dimensională pentru forță avem:

$$F = f(\rho, \eta, v, l)$$



$$F = k \cdot \rho^a \cdot \eta^b \cdot v^c \cdot l^d$$

$$MLT^{-2} = k \cdot (ML^{-3})^a (ML^{-1}T^{-1})^b (LT^{-1})^c L^d$$

$$MLT^{-2} = k \cdot M^{a+b} \cdot L^{-3a-b+c+d} \cdot T^{-b-c}$$

adică:

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ 1 = -3a - b + c + d \\ -2 = -b - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ c = 2 - b \\ d = 2 - b \end{cases}$$

Adică:

$$F = k \cdot \rho^{1-b} \cdot \eta^b \cdot v^{2-b} \cdot l^{2-b}$$

Înmulțim și împărțim cu 2 și punem expresia sub forma:

$$F = 2 \cdot k \cdot \rho \cdot \left( \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta} \right)^{-b} l^2 \frac{v^2}{2}$$

**OBSERVAȚIE:** Recunoaștem în paranteză numărul Reynolds și știind că  $l^2$  este o arie obținem:

$$F = 2 \cdot k \cdot Re^{-b} \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{v^2}{2}$$

sau echivalent cu o relație cunoscută:

$$F = C_p \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{v^2}{2}$$

**1.8** Să se stabilească o expresie a tensiunii tangențiale vâscoase a unui fluid care curge printr-o conductă admitând că aceasta depinde de diametrul conductei, rugozitatea relativă a peretelui, de densitatea fluidului, de viscozitate și viteza fluidului.

### REZOLVARE

Vrem să stabilim o legătură între tensiunea tangențială  $\tau$  și diametrul  $d$ , rugozitatea relativă a peretelui  $k$ , densitatea  $\rho$ , vâscozitatea dinamică  $\eta$  și viteza fluidului  $v$ .

$$\tau = f(d, k, \rho, \eta, v)$$

$$\tau = C \cdot d^a \cdot k^b \cdot \rho^c \cdot \eta^d \cdot v^e$$

și am notat cu  $C$  coeficientul de proporționalitate.

Rugozitatea relativă a peretelui este o mărime adimensională.

$$ML^{-1}T^{-2} = C \cdot L^a \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^b \cdot (ML^{-3})^c \cdot (ML^{-1}T^{-1})^d \cdot (LT^{-1})^e$$

$$ML^{-1}T^{-2} = C \cdot L^{a-3c-d+e} \cdot M^{c+d} \cdot T^{-d-e}$$

Relația trebuie să fie omogenă dimensional, deci avem:

$$\begin{cases} 1 = c + d \\ -1 = a - 3c - d + e \\ -2 = -d - e \end{cases}$$

Rezolvând sistemul în funcție de d avem:

$$\begin{cases} a = -d \\ c = 1 - d \\ e = 2 - d \end{cases}$$

Deci am obținut o relație de forma:

$$\tau = C \cdot d^{-d} \cdot k^b \cdot \rho^{1-d} \cdot \eta^d \cdot v^{2-d}$$

Grupăm termenii și obținem:

$$\tau = C \cdot \left(\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}\right)^{-d} \cdot k^b \cdot \rho \cdot v^2$$

Se observă în paranteză că avem numărul Reynolds.

$$\tau = C \cdot Re^{-d} \cdot k^b \cdot \rho \cdot v^2$$

**OBSERVAȚIE:** Am pus astfel în evidență o relație de legătură între  $\tau$  și numărul  $Re$  și rugozitatea relativă a pereților, de aici fiind necesare și corelările ce se pot face cu rezultatele experimentale.

**1.9** Să se stabilească expresia căderii de presiune  $\Delta p$  ce apare într-o conductă de diametru  $d$ , lungime  $l$ , rugozitatea relativă a peretelui  $k$ , ce transportă un fluid cu densitatea  $\rho$  și vâscozitatea dinamică  $\eta$  cu viteza medie pe secțiune  $v$  folosind analiza dimensională.

**REZOLVARE**

Având date mărimile de care depinde căderea de presiune  $\Delta p$  putem considera:

$$\Delta p = f(d, l, k, \rho, \eta, v)$$

sau:

$$\Delta p = C \cdot d^a \cdot l^b \cdot k^c \cdot \rho^d \cdot \eta^e \cdot v^f$$

unde  $k$  este rugozitatea relativă a peretelui  $k = \frac{\varepsilon}{d}$ , adică este o mărime adimensională, raportul dintre înălțimea asperităților superficiale  $\varepsilon$  și diametrul  $d$  al conductei.

$$\begin{aligned} \Delta p &= f(d, l, k, \eta, v) \\ \Delta p &= C \cdot d^a \cdot l^b \cdot k^c \cdot \rho^d \cdot \eta^e \cdot v^f \\ ML^{-1}T^{-2} &= C \cdot L^a \cdot L^b \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^c \cdot (ML^{-3})^d \cdot (ML^{-1}T^{-1})^e \cdot (LT^{-1})^f \\ ML^{-1}T^{-2} &= C \cdot M^{d+e} \cdot L^{a+b-3d-e+f} \cdot T^{-e-f} \\ &\begin{cases} 1 = d + e \\ -1 = a + b - 3d - e + f \\ -2 = -e - f \end{cases} \end{aligned}$$

Considerăm  $b = 1$ . Obținem:

$$\begin{cases} a = f - 3 \\ b = 1 \\ d = f - 1 \\ e = 2 - f \end{cases}$$

$$\Delta p = C \cdot d^{f-3} \cdot l \cdot k^c \cdot \rho^{f-1} \cdot \eta^{2-f} \cdot v^f$$

Împărțim cu  $\rho \cdot g$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} &= C \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{d^{f-2}}{d} \cdot l \cdot k^c \cdot \frac{\rho^{f-1}}{\rho} \cdot \eta^{2-f} \cdot v^f \\ \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} &= C \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{d^{f-2} \rho^{f-2} v^{f-2}}{\eta^{f-2}} \cdot \frac{1}{d} \cdot k^c \cdot v^2 \\ \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} &= C \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{d} \cdot k^c \cdot \left(\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}\right)^{f-2} \cdot \frac{v^2}{g} \\ \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} &= 2 \cdot C \cdot \left(\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}\right)^{f-2} \cdot k^c \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{g} \end{aligned}$$

Se observă în paranteză numărul  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \text{Const} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{g}$$

adică s-a ajuns la relația lui Darcy.

**OBSERVAȚIE:** Se observă că metoda Rayleigh se folosește ușor când numărul mărimilor studiate este mai mic decât cinci sau șase. Astfel se obține un sistem de ecuații cu mult mai multe necunoscute și chiar dacă se mai fac anumite ipoteze simplificatoare cazul este mai complicat matematic. În acest caz este de preferat să se aplice Teorema Pi. Aceeași problemă este rezolvată mai jos în problema următoare folosindu-se Teorema Pi.

**1.10** Să se stabilească expresia căderii de presiune  $\Delta p$  ce apare într-o conductă de diametru  $d$ , lungime  $l$ , rugozitatea relativă a peretelui  $k$ , ce transportă un fluid cu densitatea  $\rho$  și vâscozitatea dinamică  $\eta$  cu viteza medie pe secțiune  $v$  folosind teorema Pi în cadrul analizei dimensionale.

**REZOLVARE**

Vrem să stabilim următoarea dependență:

$$\Delta p = f(d, l, k, \rho, \eta, v)$$

Teorema Pi sau teorema Vaschy-Buckingham arată că orice relație ce conține  $n$  mărimi fizice din care  $p$  mărimi primare și  $s$  mărimi secundare, poate fi pusă sub forma unei relații între  $s$  produse adimensionale.

Se aleg mărimile primare dintre mărimile ce guvernează fenomenul astfel încât să îndeplinească următoarele cerințe:

- să fie independente adimensionale;
- să permită exprimarea tuturor unităților fundamentale.

Mărimile care apar în relație se scriu într-o matrice dimensională ce conține exponenții mărimilor fundamentale  $L, M, T$  astfel:

Dimensiune/Mărime	$\Delta p$	$d$	$l$	$k$	$\rho$	$\eta$	$v$
<b>M</b>	1	0	0	0	1	1	0
<b>L</b>	-1	1	1	0	-3	-1	1
<b>T</b>	-2	0	0	0	0	-1	-1

S-a ținut cont de observația făcută și în problema anterioară și anume că  $k$  este rugozitatea relativă a peretelui  $k = \frac{\varepsilon}{d}$ , adică este o mărime adimensională.

În această matrice mărimile primare ce trebuie alese trebuie să asigure un determinant diferit de zero.

Dacă se aleg mărimile  $d, \rho, v$  avem îndeplinite cele două cerințe pentru mărimi primare, iar determinantul:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Avem deci trei mărimi primare(d, ρ, v) din cele șapte, și deci celelalte patru sunt mărimi secundare și se pot forma patru produse adimensionale.

Vom grupa mărimile primare la sfârșitul relației:

$$\Delta p = f(l, k, \eta, d, \rho, v)$$

Matricea dimensională se reduce la:

Dimensiunea	Exponent dimensional	A <sub>1</sub> Δp	A <sub>2</sub> l	A <sub>3</sub> k	A <sub>4</sub> η	A <sub>5</sub> d	A <sub>6</sub> ρ	A <sub>7</sub> v
M	α <sub>i</sub>	1	0	0	1	0	1	0
L	β <sub>i</sub>	-1	1	0	-1	1	-3	1
T	γ <sub>i</sub>	-2	0	0	-1	0	0	-1

Produsele adimensionale care se formează sunt de forma:

$$\Pi = A_1^{K_1} A_2^{K_2} A_3^{K_3} A_4^{K_4} A_5^{K_5} A_6^{K_6} A_7^{K_7} = M^{\Sigma K_i \alpha_i} L^{\Sigma K_i \beta_i} T^{\Sigma K_i \gamma_i} = M^o L^o T^o$$

unde α<sub>i</sub>, β<sub>i</sub>, γ<sub>i</sub> sunt exponenții dimensiunilor M, L, T pentru fiecare mărime A<sub>i</sub> și care rezultă din matrice. Produsul este adimensional, deci exponenții dimensionali ai produsului sunt nuli și avem:

$$\begin{cases} \Sigma K_i = K_1 + K_4 + K_6 = 0 \\ \Sigma K_i \beta_i = -K_1 + K_2 - K_4 + K_5 - 3K_6 + K_7 = 0 \\ \Sigma K_i \gamma_i = -2K_1 - K_4 - K_7 = 0 \end{cases}$$

Avem format un sistem de trei ecuații cu șase necunoscute (K<sub>3</sub> nu apare în sistem).

$$\begin{cases} K_1 + K_4 + K_6 = 0 \\ -K_1 + K_2 - K_4 + K_5 - 3K_6 + K_7 = 0 \\ -2K_1 - K_4 - K_7 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} K_6 = -K_1 - K_4 \\ K_7 = -2K_1 - K_4 \\ K_5 = -K_2 - K_4 \end{cases}$$

În matricea soluțiilor se va da succesiv valoarea 1 uneia din mărimile K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, K<sub>3</sub>, K<sub>4</sub> și celelalte se iau zero. Și calculăm valorile lui K<sub>5</sub>, K<sub>6</sub>, K<sub>7</sub> în funcție de primele pe baza relațiilor stabilite mai sus.

**26** Noțiuni teoretice și probleme de hidrodinamică

	$\Delta p$ $K_1$	$l$ $K_2$	$k$ $K_3$	$\eta$ $K_4$	$d$ $K_5$	$\rho$ $K_6$	$v$ $K_7$
$\Pi_1$	1	0	0	0	0	-1	-2
$\Pi_2$	0	1	0	0	-1	0	0
$\Pi_3$	0	0	1	0	0	0	0
$\Pi_4$	0	0	0	1	-1	-1	-1

Deci s-au format următoarele produse adimensionale:

$$\Pi_1 = \Delta p \cdot \rho^{-1} v^{-2} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}$$

$$\Pi_2 = l \cdot d^{-1} = \frac{l}{D}$$

$$\Pi_3 = k$$

$$\Pi_4 = \eta \cdot d^{-1} \rho^{-1} v^{-1} = \frac{\eta}{d \cdot \rho \cdot v}$$

Aceste produse adimensionale exprimă de fapt mărimile secundare când s-au stabilit cele primare. Atunci avem obținută relația:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} = f\left(\frac{l}{d}, k, \frac{\eta}{d \cdot \rho \cdot v}, \frac{d}{d}, \frac{\rho}{\rho}, \frac{v}{v}\right)$$

adică o dependență de forma:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, k, \frac{\eta}{d \cdot \rho \cdot v}\right)$$

**OBSERVAȚIE:** Știind că  $\Delta p$  este direct proporțională cu lungimea conductei, deci și cu  $l/d$  se mai poate scrie:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} = \frac{l}{d} \cdot f_2\left(k, \frac{\eta}{d \cdot \rho \cdot v}\right)$$

și ținând cont de criteriile de similitudine, avem:

$$Eu = \frac{l}{d} \cdot f_2(k, Re)$$

sau

$$\Delta p = \frac{2}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot f_2(k, Re) \cdot \rho \cdot v^2 = 2 \cdot f_2(k, Re) \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} = \lambda(Re, k) \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2}$$

adică relația lui Darcy. Funcția  $\lambda$  se determină fie experimental, fie din considerente teoretice. Deci prin analiză dimensională s-au stabilit doar parametri adimensionali ce guvernează fenomenul.

**1.11** Să se determine folosind teorema Pi formula debitului peste un deversor triunghiular dacă acesta depinde de înălțimea lamei deversante  $h$ , unghiul la vârf  $\theta$ , densitatea lichidului  $\rho$ , vâscozitatea cinematică a lichidului  $\nu$ , tensiunea superficială  $\sigma$  și accelerația gravitațională  $g$ .

**REZOLVARE**

Dorim să găsim o dependență de forma:

$$Q = f(h, \theta, \rho, \nu, \sigma, g)$$

Considerând explicațiile făcute pe larg la problema anterioară putem scrie:

	Q	h	$\theta$	$\rho$	$\nu$	$\sigma$	g
M	0	0	0	1	0	1	0
L	3	1	0	-3	2	0	1
T	-1	0	0	0	-1	-2	-2

Dacă alegem  $h, \rho, g$  mărimile primare avem determinantul:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Deci avem mărimile primare  $h, \rho, g$  și avem patru mărimi secundare, deci patru produse adimensionale.

Procedând ca la problema anterioară se va ajunge la următoarea dependență:

$$\frac{Q}{h^2 \sqrt{g \cdot h}} = f\left(\frac{h}{h}, \theta, \frac{\rho}{\rho}, \frac{\nu}{h \sqrt{g \cdot h}}, \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot h^2}, \frac{g}{g}\right)$$

Ca exemplificare considerăm:

$$\sigma \cdot h^\alpha g^\beta \rho^\gamma = M \cdot T^{-2} \cdot L^\alpha (L \cdot T^{-2})^\beta (M \cdot L^{-3})^\gamma = M^0 L^0 T^0$$

Adică se obține:

$$\begin{cases} 1 + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 3 \cdot \gamma = 0 \\ -2 - 2 \cdot \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Deci ca să exprimăm termenul adimensional care-l conține pe  $\sigma$  am obținut:

$$\frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot h^2}$$

Analog se procedează și pentru  $\theta$  și pentru  $v$ . Se ajunge la dependența mai simplă:

$$\frac{Q}{h^2 \sqrt{g \cdot h}} = f_1 \left( \theta, \frac{v}{h \sqrt{g \cdot h}}, \frac{\sigma}{\rho \cdot g \cdot h^2} \right)$$

Deci avem:

$$Q = f_1 h^2 \sqrt{g \cdot h} = f_1 h^{5/2} g^{1/2}$$

**1.12** Pentru studiul unui deversor s-a construit un model având dimensiunile de 20 de ori mai mici decât ale prototipului. Să se stabilească scările pentru viteze și debite. Considerând debitul deversorului  $Q_p = 250 \text{ m}^3/\text{s}$  să se determine debitul necesar pe model.

### REZOLVARE

În cadrul unui deversor criteriul determinant în realizarea similitudinii este criteriul Froude:

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l}$$

Conform teoremei lui Newton pentru fenomene ce formează un grup de similitudine, criteriile de similitudine de același nume au valori unice pentru toate fenomenele grupului. Aceasta înseamnă în cazul nostru că numărul Froude pentru prototip și pe model are aceeași valoare.

$$\begin{aligned} Fr_p &= Fr_m \\ \frac{v_p^2}{g_p l_p} &= \frac{v_m^2}{g_m l_m} \end{aligned}$$

Dar accelerația câmpului gravitațional terestru este practic constantă, deci

$$g_p = g_m$$

și se obține:

$$\frac{v_p^2}{v_m^2} = \frac{l_p}{l_m}$$

De unde scara corespunzătoare vitezelor, adică raportul dintre viteza de pe prototip și cea de pe model, rezultă că este:

$$v_o = \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\frac{l_p}{l_m}} = \sqrt{20} = 4,472$$

Scara debitelor se calculează ținând cont de ecuația de continuitate  $Q = v \cdot S$



$$Q_o = \frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p \cdot S_p}{v_m \cdot S_m} = \frac{v_p}{v_m} \cdot \frac{l_p^2}{l_m^2} = \sqrt{\frac{l_p}{l_m}} \cdot \left(\frac{l_p}{l_m}\right)^2 = \left(\frac{l_p}{l_m}\right)^{2,5} = l_o^{5/2} = 20^{5/2} = 1788,854$$

Debitul necesar pe model va fi:

$$Q_m = \frac{Q_p}{Q_o} = \frac{250}{20^{5/2}} = 0,1397 \text{ m}^3/\text{s}$$

**1.13** Într-o conductă cu diametrul 250 mm curge apă la 15°C cu viteza de 5 m/s. Cu ce viteză trebuie să curgă un combustibil la temperatura de 32°C ( $\nu_c = 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) într-o conductă de 150 mm pentru ca cele două curgeri să fie din punct de vedere dinamic asemenea?

#### **REZOLVARE**

În cazul mișcării în conductă efectul vâscozității nu poate fi neglijat și de aceea trebuie respectat criteriul de similitudine de tip Reynolds. Înseamnă că pentru a avea o similitudine hidrodinamică între cele două fenomene trebuie ca cele două numere Reynolds pentru cele două curgeri să fie egale.

$$Re_{apa} = Re_{combustibil}$$

$$\frac{v_a \cdot d_a}{\nu_a} = \frac{v_c \cdot d_c}{\nu_c}$$

unde indicele „a” este pentru apă și indicele „c” corespunde combustibilului.

Vâscozitatea apei la 15° se determină cu formula lui Poiseuille:

$$\nu = \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,00022 \cdot t^2} \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

t fiind temperatura apei în [°C].

Pentru apă la 15°C se obține vâscozitatea cinematică:

$$\nu_a = \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337 \cdot 15 + 0,00022 \cdot 15^2} = 1,1447 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Rezultă în final:

$$v_c = v_a \cdot \frac{d_a}{d_c} \cdot \frac{\nu_c}{\nu_a} = 5 \cdot \frac{250}{150} \cdot \frac{2,97 \cdot 10^{-6}}{1,1447 \cdot 10^{-6}} = 21,621 \text{ m/s}$$

**1.14** Pentru golirea modelului unui rezervor sunt necesare 6 minute prin deschiderea ventilului de evacuare. Să se determine timpul necesar golirii unui rezervor de 225 de ori mai mare decât modelul.

**REZOLVARE**

În acest caz greutatea este forța dominantă și deci criteriul de similitudine care trebuie respectat este cel al lui Froude. Aceasta înseamnă că pentru model și prototip avem:

$$Fr_m = Fr_p$$

$$\frac{v_m^2}{g_m \cdot l_m} = \frac{v_p^2}{g_p \cdot l_p}$$

Dar  $g_m = g_p$

Și avem în continuare:

$$\frac{v_m^2}{v_p^2} = \frac{l_m}{l_p} \Rightarrow \frac{v_m}{v_p} = \sqrt{\frac{l_m}{l_p}} = \sqrt{l_o}$$

Adică  $v_o = \sqrt{l_o}$  sau:

$$l_o t_o^{-1} = \sqrt{l_o} \Rightarrow t_o = \sqrt{l_o}$$

Adică:

$$\frac{t_p}{t_m} = \sqrt{l_o} = \sqrt{225} = 15$$

Timpu necesar golirii prototipului este:

$$t_p = t_m \cdot 15 = 6 \cdot 15 = 90 \text{ minute}$$

**1.15** În cazul unui ajutoraj Venturi ce funcționează cu apă la temperatura de 20°C se dorește o viteză în secțiunea contractată de 450 mm de 5 m/s. Se construiește un model de 4 ori mai mic decât prototipul care va funcționa cu apă la 40°C. Să se determine care este debitul necesar pentru model.

**REZOLVARE**

Criteriul de similitudine în acest caz care trebuie respectat este:

$$Re_m = Re_p$$

$$\frac{v_m \cdot d_m}{\nu_m} = \frac{v_p \cdot d_p}{\nu_p}$$

Din relația lui Poiseuille se determină vâscozitatea cinematică a apei la cele două temperaturi (20°C și 40°C).

$$\nu_p = \nu_{20^\circ} = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\nu_m = \nu_{40^\circ} = 0,66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\Rightarrow v_m = v_p \cdot \frac{d_p}{d_m} \cdot \frac{\nu_m}{\nu_p} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{0,66 \cdot 10^{-6}}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 13,07 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow Q_m = v_m \cdot S_m = v_m \cdot \frac{\pi \cdot d_m^2}{4} = 13,07 \cdot \frac{\pi \cdot \left(\frac{0,450}{4}\right)^2}{4} = 0,1299 \text{ m}^3/\text{s}$$

**1.16** Într-un prototip se va folosi ulei cu vâscozitatea cinematică  $\nu_p = 4,70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Considerând că dominante în prototip sunt forța de greutate și forțele de frecare vâscoase se dorește să se construiască un model la scara 1/10. Care va fi vâscozitatea lichidului necesar pentru model?

### REZOLVARE

Ținând cont că dominante sunt forța de greutate și forțele de frecare vâscoasă înseamnă că atât numărul Froude cât și numărul Reynolds trebuie să fie același pentru model și prototip. Aceasta înseamnă că avem:

$$Fr_p = Fr_m \text{ adică } \frac{v_p^2}{g_p \cdot l_p} = \frac{v_m^2}{g_m \cdot l_m}$$

și  $g_p = g_m$

Rezultă că avem 
$$\frac{v_p^2}{v_m^2} = \frac{l_p}{l_m}$$

Această relație dacă o scriem considerând scara lungimilor  $l_o = \frac{l_p}{l_m}$  și scara

vitezelor  $v_o = \frac{v_p}{v_m}$  devine:  $v_o^2 = l_o \Rightarrow v_o = \sqrt{l_o}$

A doua condiție care trebuie îndeplinită este:

$$Re_p = Re_m \text{ adică } \frac{v_p \cdot d_p}{\nu_p} = \frac{v_m \cdot d_m}{\nu_m}$$

de unde:

$$\nu_m = \nu_p \cdot \frac{v_m}{v_p} \cdot \frac{d_m}{d_p} = \nu_p \cdot \frac{1}{v_o} \cdot \frac{1}{l_o} = \nu_p \cdot \frac{1}{\sqrt{l_o}} \cdot \frac{1}{l_o} = \frac{\nu_p}{l_o^{3/2}}$$

Făcând înlocuirile obținem:

$$\nu_m = \frac{\nu_p}{l_o^{3/2}} = \frac{4,70 \cdot 10^{-5}}{10^{3/2}} = 1,486 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

**1.17** Se consideră un prototip ajutor convergent ce se dorește să se folosească pentru un debit  $Q_p=80$  l/s de apă cu viteza  $v_p=50$  m/s. S-a construit și încercat un model cu diametru la ieșire  $d_m=40$  mm la o diferență de presiune  $\Delta p_m=3$  bar tot cu apă și s-a obținut un debit  $Q_m=20$  l/s și viteza medie pe secțiunea contractată a ajutorului  $v_m=25$  m/s. Să se determine pentru prototip care este diferența de presiune și diametrul secțiunii de ieșire din ajutor.

**REZOLVARE**

Criteriul de similitudine care trebuie luat în considerare ținând cont că avem cădere de presiune este Euler. Astfel putem scrie pentru model și prototip:

$$Eu_m = Eu_p$$

adică:

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m \cdot v_m^2} = \frac{\Delta p_p}{\rho_p \cdot v_p^2}$$

Pentru că atât modelul cât și prototipul sunt încercate cu același lichid (apa) avem  $\rho_m = \rho_p$  și rezultă:

$$\frac{\Delta p_p}{\Delta p_m} = \left( \frac{v_p}{v_m} \right)^2$$

Astfel obținem:

$$\Delta p_p = \Delta p_m \cdot \left( \frac{v_p}{v_m} \right)^2 = 3 \cdot 10^5 \cdot \left( \frac{50}{25} \right)^2 = 12 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 12 \text{ bar}$$

Cunoscând debitele pentru prototip și model putem considera și raportul:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p \cdot S_p}{v_m \cdot S_m} = \frac{v_p}{v_m} \cdot l_o^2 = \sqrt{\frac{\Delta p_p}{\Delta p_m}} \cdot l_o^2$$

Și rezultă scara lungimilor:

$$l_o = \sqrt{\frac{Q_p}{Q_m} \sqrt{\frac{\Delta p_m}{\Delta p_p}}} = \sqrt{\frac{Q_p}{Q_m} \cdot \frac{v_m}{v_p}} = \sqrt{\frac{80}{20} \cdot \frac{25}{50}} = \sqrt{2} = 1,4142$$

Dar scara lungimilor înseamnă:

$$l_o = \frac{d_p}{d_m} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad d_p = d_m \cdot \sqrt{2} = 0,040 \cdot \sqrt{2} = 0,05657 \text{ m} = 56,57 \text{ mm}$$

**1.18** La etalonarea unei diafragme având  $D=250$  mm și  $d=150$ mm pentru măsurat aerul se folosește apa. S-a determinat debitul minim de apă de la care coeficientul de debit rămâne constant  $Q_{\min}=19$  l/s la o diferență de presiune  $\Delta p_m=65$  mm col Hg. Care este debitul minim de aer și diferența de presiune în mm col Hg pentru  $Q$  minim de aer. Se dau  $\nu_{\text{apa}}=1,01 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\eta_{\text{aer}}=18,18 \cdot 10^{-6}$  Pa·s,  $\rho_{\text{aer}}=1,17$  kg/m<sup>3</sup>.

**REZOLVARE**

Pentru cele două fenomene putem scrie:

$$\begin{aligned} \text{Re}_m &= \text{Re}_p \\ \frac{v_m \cdot d_m}{\nu_m} &= \frac{v_p \cdot d_p}{\nu_p} \end{aligned}$$

Fiind vorba de aceeași diafragmă avem  $d_m = d_p$ .

Astfel obținem:

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

Raportul debitelor se poate scrie:

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{v_m}{v_p} \cdot \left( \frac{d_m}{d_p} \right)^2 = \frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

Și obținem:

$$Q_p = Q_m \cdot \frac{\nu_p}{\nu_m} = 0,019 \cdot \frac{18,18 \cdot 10^{-6}}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 0,2923 \text{ m}^3/\text{s}$$

Căderea de presiune apare în criteriul Euler și putem scrie pentru model și prototip egalitatea:

$$\begin{aligned} \text{Eu}_m &= \text{Eu}_p \\ \frac{\Delta p_m}{\rho_m \cdot v_m^2} &= \frac{\Delta p_p}{\rho_p \cdot v_p^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta p_p &= \Delta p_m \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \left( \frac{v_p}{v_m} \right)^2 = \Delta p_m \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m} \cdot \left( \frac{\nu_p}{\nu_m} \right)^2 = 65 \cdot \frac{1,17}{1000} \cdot \left( \frac{18,18 \cdot 10^{-6}}{1,01 \cdot 10^{-6}} \right)^2 = \\ &= 18 \text{ mm Hg} \end{aligned}$$

**1.3.2 Probleme propuse spre rezolvare**

**1.19** Să se stabilească relația dintre numărul Reynolds și densitatea  $\rho$ , vâscozitatea dinamică  $\eta$ , viteza  $v$  a fluidului și o lungime caracteristică  $l$  folosindu-se analiza dimensională.

$$\mathbf{R: Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

**1.20** Să se determine dependența dintre rezistența la înaintare a unui corp într-un fluid, știind că depinde de viteza  $v$ , o dimensiune caracteristică a corpului  $l$ , rugozitatea suprafeței acesteia  $k$ , densitatea fluidului  $\rho$ , vâscozitatea dinamică  $\eta$  și modulul de compresibilitate  $E$ .

$$\mathbf{R:} \frac{F}{\rho \cdot v^2 \cdot l^2} = \Phi\left(\frac{k}{l}, \text{Re}, \text{Ma}\right)$$

**1.21.** Să se determine viteza într-un punct al unui deversor, dacă s-a construit un model al deversorului funcționând în condiții similare, fiind de 30 de ori mai mic și corespunzător a două puncte omoloage de pe model și prototip, în punctul corespunzător modelului viteza este  $v=0,5$  m/s.

$$\mathbf{R: v_p=2,739 \text{ m/s}}$$

**1.22.** Printr-o conductă având diametrul de 100 mm curge apă cu viteza de 1,5 m/s la 20°C ( $\nu_{\text{apa } 20^\circ\text{C}}=1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Cu ce viteză va curge petrolul ( $\nu_p=4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) prin aceeași conductă considerând cele două curgeri similare.

$$\mathbf{R: v_p=5,94 \text{ m/s}}$$

**1.23** Printr-o conductă cu diametrul de 500 mm se transportă aer cu o viteză de 2,5 m/s. Pentru a asigura o similitudine dinamică care trebuie să fie dimensiunile unei conducte care transportă apă la 15°C cu o viteză de 1,5 m/s? ( $\nu_{\text{aer}}=1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  și  $\nu_{\text{apa}}=1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

$$\mathbf{R: d_{\text{apa}}=63,76 \text{ mm}}$$

## **CAPITOLUL 2**

### **CALCULUL ȘI MĂSURAREA DEBITULUI FLUIDELOR INCOMPRESIBILE ÎN MIȘCARE PERMANENTĂ**

#### **NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE**

$Q$ -debitul volumic în ( $m^3/s$ )

$s$ -secțiune de flux

$S$ -aria secțiunii  $s$  în ( $m^2$ )

$V$ -volum de lichid în ( $m^3$ )

$t$ -timpul în (s)

$\vec{V}$  -vectorul viteză într-un punct al secțiunii  $s$

$V$ -modulul vectorului  $\vec{V}$  în (m/s)

$V_s=Q/S$ -viteza medie în secțiunea  $s$  în (m/s)

$\rho$ -densitatea fluidului în ( $Kg/m^3$ )

$M$ -debitul masic în (Kg/s)

$z$ -cota față de un plan de referință epicentric în (m)

$p$ -presiunea în ( $N/m^2$ )

$p_d$ -presiunea dinamică în ( $N/m^2$ )

$\beta$ -coeficientul de etalonare al sondei Pitot-Prandtl

$\alpha$ - coeficientul Coriolis de neuniformitate a distribuției vitezei

$h_p$ -pierderea de energie hidraulică în (metri coloană de lichid)

$Z, Z^*$  , -cota suprafeței libere reală sau ipotetică în (m)

$H, H^*$  ,  $y$ -diferență de nivel

$P_M$ -presiunea (relativă) indicată de manometru în ( $N/m^2$ )

$C_C$ -coeficient de contracție

$C_V$ - coeficient de viteză

$C_Q$ - coeficient de debit

$D$ - diametrul (hidraulic) în (m)

$Re$ -numărul Reynolds

$h$ - înălțimea lamei deversante în (m)

#### **2.1 INTRODUCERE**

Debitul este un parametru esențial în ingineria fluidelor prin intermediul căruia se poate face o analiză cantitativă, dar și al eficienței din punct de vedere energetic a proceselor de transport și transfer.

## 2.2.NOȚIUNI TEORETICE

Pentru mișcarea permanentă a fluidelor incompresibile debitul (volumic)  $Q$ , se definește prin intermediul fluxului vitezei ca o măsură scalară **asociată unei secțiuni de curgere (de flux)**  $s$ :

$$Q = \int_s \bar{V} \cdot \bar{n} da \quad (2.1)$$

sau dacă în secțiunea  $s$  mișcarea are loc în lungul unor drepte paralele,  $\bar{V} = \bar{n}V$ :

$$Q = \int_s V da \quad (2.2)$$

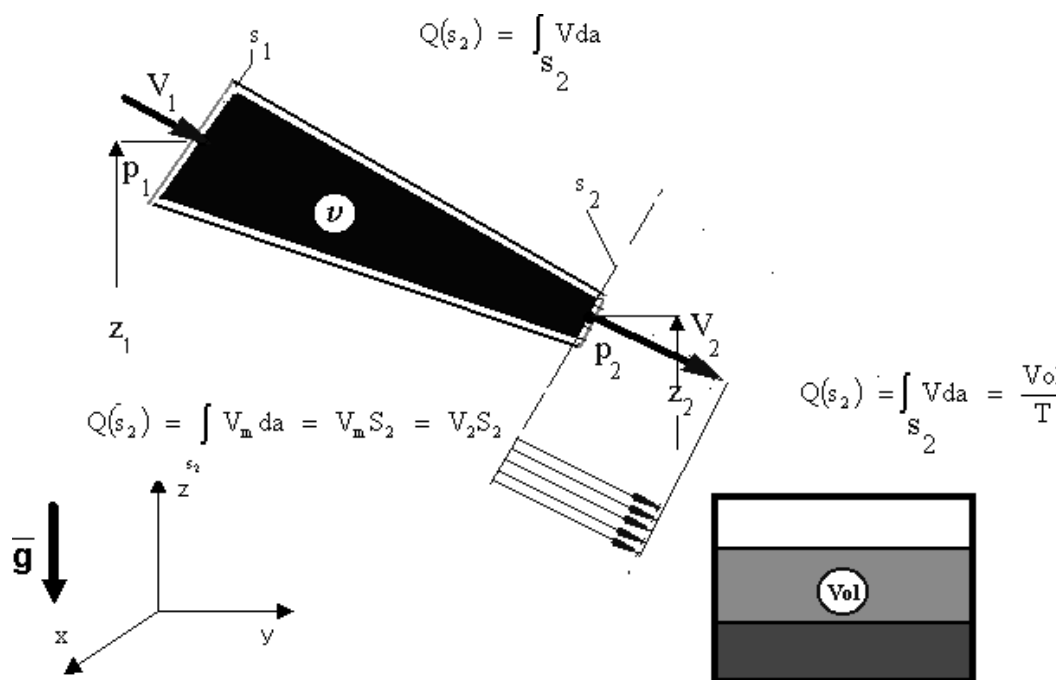


Fig. 2

În aplicațiile tehnice debitul se exprima prin intermediul vitezei medii. Mărime fără semnificație fizică viteza medie  $V_s$ :

$$V_s = \frac{Q}{S} \quad (2.3)$$



caracterizează situația ipotetică corespunzătoare unei distribuții uniforme a vitezei în secțiunea s:

$$Q = \int_s V da = V_s \int da = V_s S \quad (2.4)$$

și intervine în expresiile ecuațiilor de transfer -ale: masei, **ETM**, și energiei mecanice **ETEM** -aplicate volumului de control standard [1]

$$\text{ETM} \quad Q = V_1 S_1 = Q_2 S_2 \quad (2.5)$$

$$\text{ETEM} \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right) = h_{p(1-2)} \quad (7.6)$$

În conformitate cu definiția (2.2) pentru lichide debitul se exprimă ,fig.2, și prin volumul vehiculat prin secțiunea respectivă în unitatea de timp:

$$Q = \frac{V}{t} \quad (2.7)$$

sau sub formă diferențială:

$$dV = Q dt \quad (2.8)$$

Relațiile de mai sus stau la baza metodelor directe (fără introducerea unor mărimi auxiliare) de măsurare a debitului în instalațiile sub presiune (conducte) sau la curgerile cu suprafață liberă (canale)

**Observație:** pentru fluidele incompresibile ( $\rho = ct$ ), debitul masic rezultă din

$$M = \rho Q \quad (2.9)$$

Calculul debitului, conform definiției (2.1), presupune cunoașterea câmpului de viteze în secțiunea de flux și posibilitatea evaluării integralei de suprafață.. Aceste deziderate imposibil de îndeplinit reclamă:

acceptarea unor ipoteze simplificatoare privind: distribuția (câmpul) și, metode experimentale sau relații de calcul pentru determinarea vitezelor.

## 2.3 APLICATII

### 2.3.1. Probleme rezolvate

**2.1.** Să se stabilească ecuațiile pentru mișcarea **laminară** a unui fluid vâscos printr-o conductă circulară de secțiune constantă  $s$ , fig.2.1, în **ipoteza** mișcării axial simetrice:

#### REZOLVARE

Se pleacă de la ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(V, p) = 0$$

ținând cont de legea de distribuție a vitezei:

$$V(r) = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

debitul  $Q$  are expresia:

$$Q = \int_s V da = \int_0^R V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} V_{\max} R^2$$

și cu aceasta viteză medie:

$$V_s = \frac{Q}{S} = \frac{V_{\max}}{2}$$

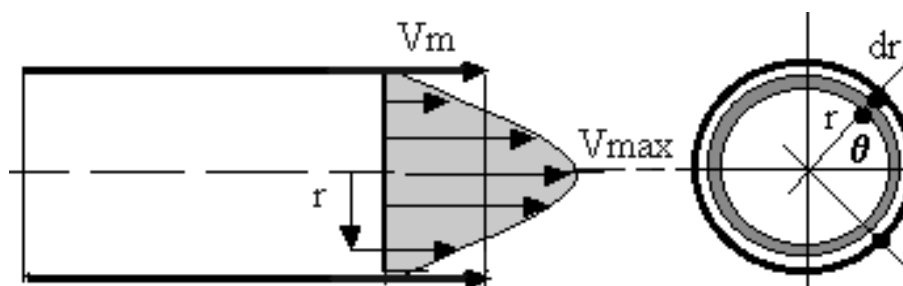


Fig.2.1

**Observație.**

*Ipoteza mișcării axial simetrice este acceptată și în cazul curgerilor turbulente în conducte. În aceste cazuri este necesară explorarea câmpului cu ajutorul unor instrumente de măsurare a vitezei cel mai accesibil fiind sonda Pitot-Prandtl. Într-un punct viteza sesizată de sondă se obține din relația:*

$$V = \beta \sqrt{\frac{2p_{din}}{\rho}} \quad (2.10)$$

Pentru ca ipoteza mișcării axial simetrice să fie viabilă, este necesară măsurarea vitezei în (cât) mai multe puncte situate la aceeași rază  $r$ , iar viteza presupusă constantă conform ipotezei, este media aritmetică  $V_{med}(r) = ct(r)$  a celor măsurate. Cu acestea, în secțiunea transversală a conductei în care s-au făcut măsurătorile  $s$ , conform definiției, debitul  $Q$  rezultă din:

$$Q(s) = \int_s V da = 2\pi \int_0^R r V_{med}(r) dr = \pi \int_0^R V_{med}(r) d(r)^2$$

prin soluționarea numerică (grafică) a integralelor.

Pentru regimurile turbulente de curgere în general, nu se cunosc distribuțiile de viteze în secțiunile de flux și ca atare pentru calcul, în aplicații, în general, se acceptă o distribuție uniformă echivalentă unei viteze medii. În această situație debitul poate fi calculat apelând la ecuațiile de transfer (2.5) și (2.6) – în care implicit:

$$\alpha = \frac{1}{S} \int_s \left( \frac{V}{V_m} \right) da = 1.$$

**2.2** Să se calculeze debitul de apă ( $\rho_{H_2O}=1000\text{Kg/m}^3$ ) vehiculat printr-o conductă orizontală de secțiune circulară constituită din două tronsoane cu diametrele.  $D_1=0.025\text{m}$ ,  $D_2=0.05\text{m}$  fig.2.2, dacă denivelarea indicată de piezometrul diferențial indirect cu mercur ( $\rho_{Hg}=13600\text{Kg/m}^3$ ) conectat la extremitățile conductei este  $h=0.03\text{m}$ , iar pierderile (locale și longitudinale) pe conductă au fost estimate la  $h_{p(1-2)}=0.2\text{m}$  coloană apă.

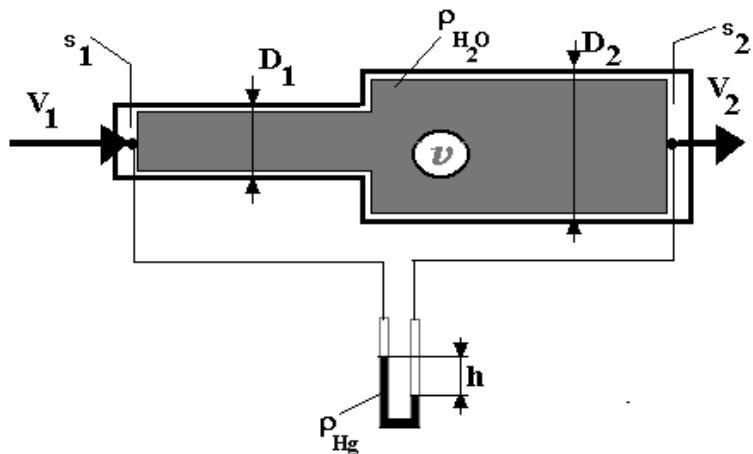


Fig.2.2

**REZOLVARE**

$$V_2 = V_1 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[ \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 - 1 \right]}} \sqrt{2g \left[ \left( \frac{p_2 - p_1}{\rho_{H_2O} g} \right) + h_{p1-2} \right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[ \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 - 1 \right]}} \sqrt{2g \left[ \left( \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} - 1 \right) h + h_{p1-2} \right]}$$

$$Q_2 = V_2 S_2 = 0.0169 \text{ m}^3/\text{s}$$

Analog, prin identificarea unor secțiuni în care distribuția de viteze poate fi acceptată ca uniformă și asociată unei viteze medii, se procedează în cazul :

Orificiilor -inecate sau nu- practicate în, sau ajutajelor cilindrice(tronsoane scurte de conductă) atașate la, peretele unui rezervor de cotă constantă fig. 2.2.a, sau instrumentelor de măsură a debitului în sistemele sub presiune (conducte)–diafragma, ajutajul, tubul Venturi, fig.2.2.b.

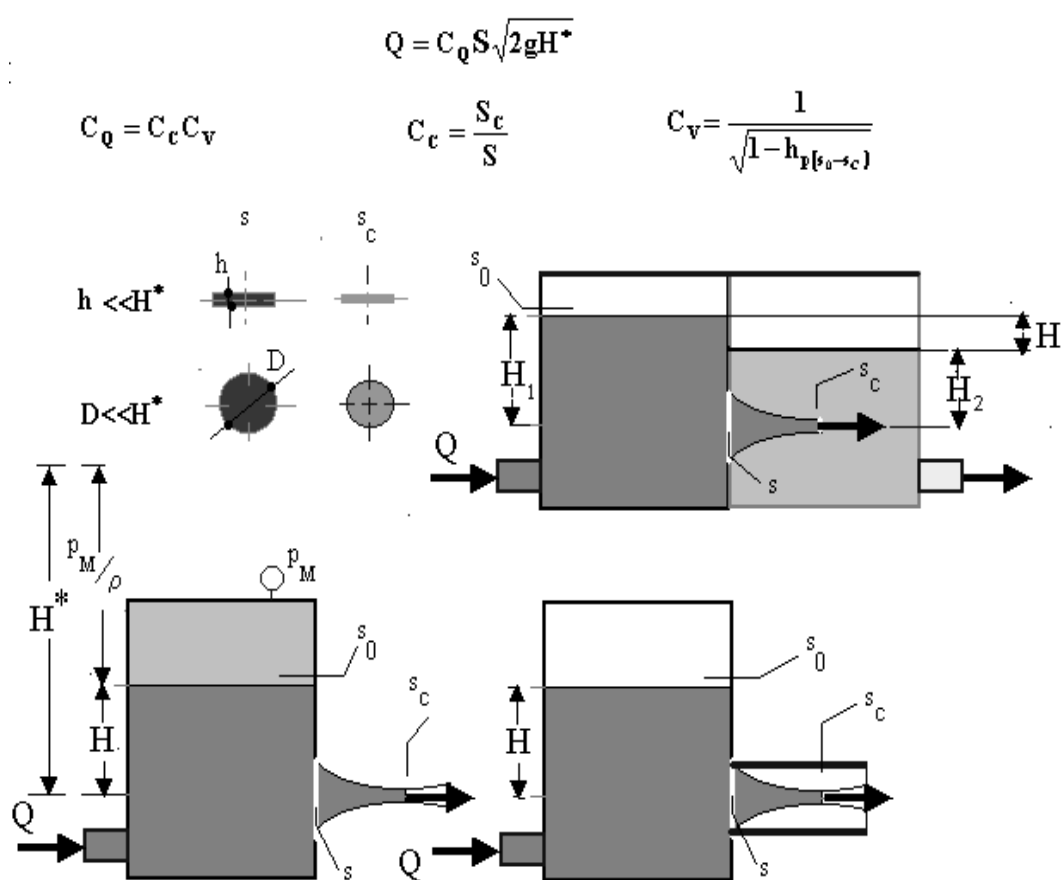


Fig.7.2a

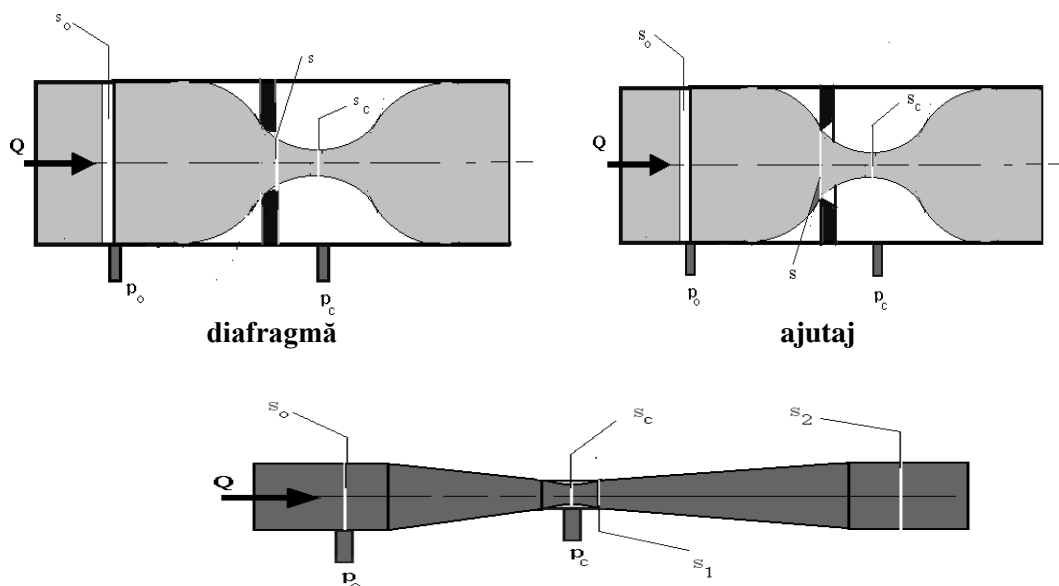


Fig. 2.2b

**Observații:**

Pentru situațiile menționate, fig. 2.2a, ,fig. 2.2b, expresia debitului este structural aceeași:

$$Q = \begin{cases} C_Q S \sqrt{2gH} \\ C_Q S \sqrt{2gH^*} \\ C_Q S \sqrt{\frac{2(p_0 - p_c)}{\rho}} \end{cases} \quad (2.11)$$

cu:

$$C_c = \frac{S_c}{S} \quad (2.12)$$

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1 - h_{p(s_0 - s_c)}}} \quad (2.13)$$

$$C_Q = C_c \cdot C_v \quad (2.14)$$

Coefficienții de **debit**  $C_Q$ , de **viteză**  $C_V$ , și de **contractie**  $C_C$ , se determină experimental și depind de tipul secțiunii  $s$  de dimensiunea (relativă în raport cu sarcina  $H^*$  sau diametrul conductei) și calitatea suprafeței (rugozitatea) acesteia și, de regimul de curgere (numărul Reynolds  $Re = \frac{VD}{\nu}$ ).

În secțiunea contractată  $s_C$  (asemenea geometric cu  $s$ ) mișcarea se desfășoară în lungul unor drepte paralele iar fenomenul de contractie se explică prin faptul că liniile de curent au direcții convergente, convergență care se continuă și după secțiunea  $s$ .

Sunt situații în care, prin forma și dimensiunile (relative) secțiunii de flux procesul de contractie este atenuat, și / sau nu se poate identifica o secțiune contractată asemenea geometric în care este acceptabilă ipoteza unei distribuții uniforme a vitezei. În unele din aceste cazuri este posibilă estimarea debitului dacă:

a) se presupune că, în secțiunea de flux, viteza este constantă pentru orice plan orizontal situat la cota  $Z$  față de planul real sau ipotetic al suprafeței libere  $Z^*$ , și are respectiv expresiile:

$$V = \sqrt{2g(z_0 - z)} = \sqrt{2gZ} \quad (2.15)$$

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p_M}{\rho g} + (z_0 - z)\right)} = \sqrt{2gZ^*} \quad (2.16)$$

obținute pentru un fluid ideal din ecuația lui Bernoulli. **(EB)**:

$$\text{(EB)} \quad z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = ct \quad (2.17).$$

b) se poate soluționa integrala de suprafață (2.1)

În cazul utilizării ca instrumente de măsură sau pentru o evaluare cât mai exactă expresiile rezultate trebuie corectate cu un coeficient de debit stabilit pe cale experimentală.

**2.3** În peretele lateral al rezervorului cu apă ( $\rho_{H_2O}=1000\text{Kg/m}^3$ ), din fig.2.3, este practicat un orificiu de secțiune dreptunghiulară  $h=2\text{m}$ ,  $b=4\text{m}$ . Rezervorul de cotă constantă,  $a=4\text{m}$ , este închis iar presiunea în perna de aer este măsurată cu ajutorul unui manometru plasat pe capac care indică 1,962 bar. Să se calculeze debitul  $Q$  vehiculat prin orificiu și să se compare cu cel obținut dacă rezervorul este deschis.

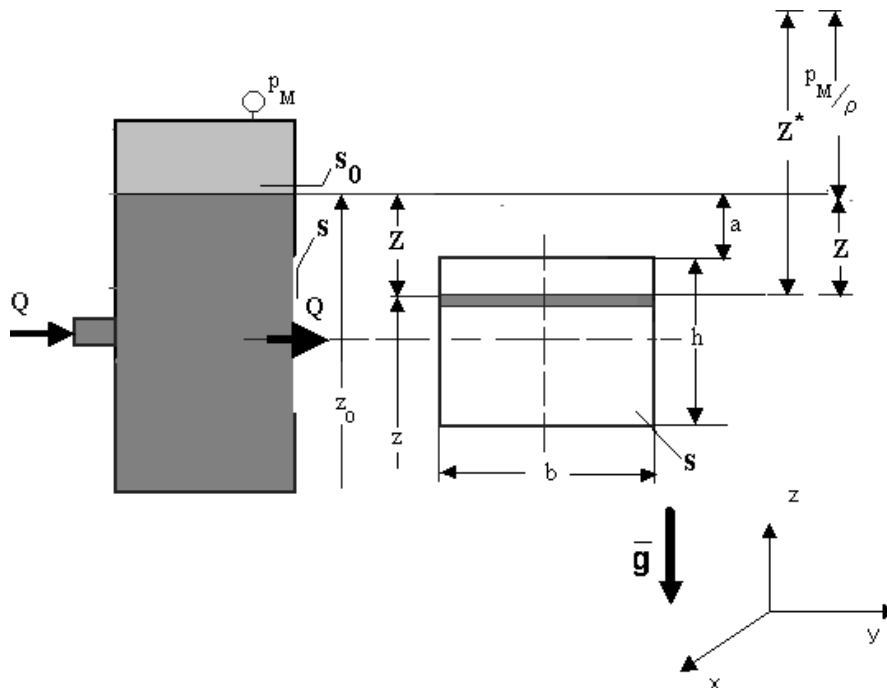


Fig.2.3

**REZOLVARE**

În conformitate cu Fig.2.3 conform definiției (2.1) din (2.16) rezultă:

$$Q = \int_s V da = \int_{\frac{p_M+a}{\rho g}}^{\frac{p_M+a+h}{\rho g}} \sqrt{2gZ^*} bdZ^* =$$

$$= \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[ \left( \frac{p_M}{\rho g} + a + h \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{p_M}{\rho g} + a \right)^{\frac{3}{2}} \right] = 117,154 \text{ m}^3 / \text{s}$$

și respectiv:

$$Q_{p_M=0} = \int_s V da = \int_a^{a+h} \sqrt{2gZ} bdZ = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left[ (a+h)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right] = 82,3 \text{ m}^3 / \text{s}$$



**2.4** Să se stabilească în funcție de înălțimea lamei deversante  $h$  expresia debitului unui deversor triunghiular având unghiul la vârf  $2\alpha$  (fig.2.4).

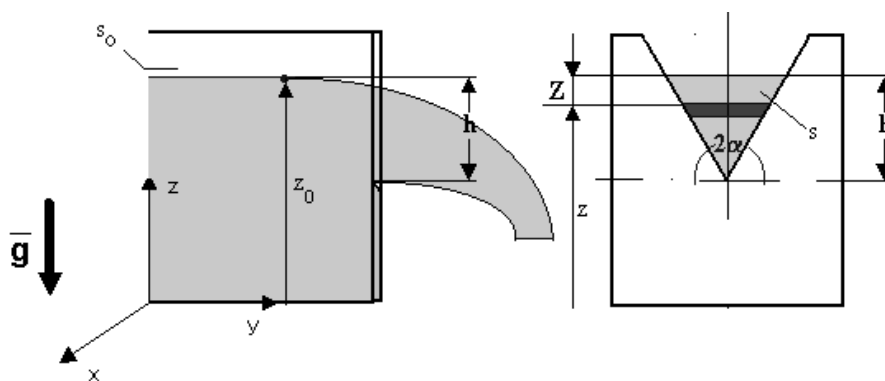


Fig.2.4

**REZOLVARE**

Cu relația (2.15) și notațiile din fig.2.4, rezultă:

$$Q = \int_s V da = \int_0^h \sqrt{2gZ} (2(h-z) \tan \alpha) dz = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan \alpha (h)^{\frac{5}{2}}$$

**Observație**

Pentru cazul considerat-deversor triunghiular cu muchii ascuțite și  $2\alpha=90^\circ$ , debitul "real", se obține înmulțind expresia de mai sus cu un coeficient de debit  $C_Q=0.5926$  determinat experimental. Pentru alte variante constructive-cu secțiune dreptunghiulară, circulară, parabolică, cu profil gros, cu prag lat, ș.a - coeficienții de debit au valori distincte dar metodologia de determinare a expresiei debitului este aceeași.

Relatiile (2.8), (2.11) sunt aplicate și la tratarea unor probleme de golire sau de transvazare a lichidelor dintr-un rezervor în altul- cazuri particulare de curgeri nepermanente. În aceste cazuri se consideră că variația parametrilor definitorii a mișcării este lentă și mișcarea poate fi tratată ca o succesiune temporală de curgeri staționare.

**2.5** Un vas de formă oarecare, fig.2.5, alimentat cu debitul constant  $Q_a$  este prevăzut cu un orificiu de golire având coeficientul de debit  $C_Q$ . Să se determine legea de variație în timp a cotei  $Z$  a suprafeței libere față de planul orificiului. Pentru cazul particular al unui rezervor paralelipipedic de secțiune pătrată  $L=2m$ , dacă  $Q_a=0$ , și orificiul circular  $d=0.1m$  are coeficientul de debit  $C_Q=0.6$  să se determine timpul de golire al rezervorului  $t_G$  dacă la momentul inițial  $t=0$ , cota suprafeței libere  $H=10m$ .

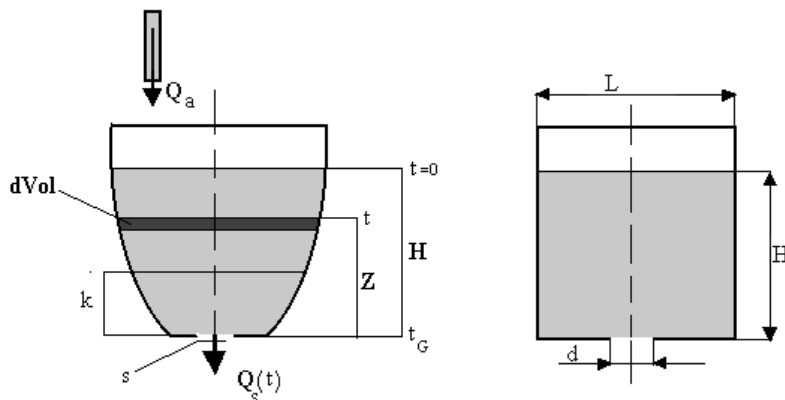


Fig. 2.5

**REZOLVARE**

Considerând momentul inițial  $t=0$ ,  $Z=H$ . La acest moment debitul asociat secțiunii  $s$  a orificiului este  $Q_0 = C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gH}$ . Dacă  $Q_a < Q_0$  nivelul suprafeței libere va coborâ. În această situație la un moment de timp  $t$  cu relația (2.8) se scrie:

$$\left( C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gZ} - Q_a \right) dt = -S(Z, t) dZ$$

unde  $S(Z, t)$  este aria suprafeței  $s(Z, t)$  și  $dVol = S(Z, t) dZ$  cu  $dZ < 0$ . Pentru soluționarea problemei se exprimă debitul  $Q_a$  prin intermediul unei cote fictive  $k < H$  astfel:

$$Q_a = C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gk}$$

cu care rezultă succesiv:

$$dt = - \frac{1}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}} \frac{S(Z, t)}{(\sqrt{Z} - \sqrt{k})} dZ$$

$$t = - \frac{1}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}} \int_H^k \frac{S(Z, t)}{(\sqrt{Z} - \sqrt{k})} dZ$$

Din momentul  $t_k$  curgerea devine permanentă deoarece nivelul suprafeței libere se menține la cota  $k$ , debitul de alimentare fiind egal cu cel evacuat prin orificiu. Dacă secțiunea transversală a rezervorului este constantă și deci  $S(Z, t) = S = ct$ , se obține:

$$t = \frac{S}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}} \left( \sqrt{k} - \sqrt{Z} + \sqrt{H} \log \frac{\sqrt{H} - \sqrt{k}}{\sqrt{Z} - \sqrt{k}} \right),$$

din care rezultă evident, că prezumtiva cotă  $k$  nu este atinsă niciodată ( $t \rightarrow \infty$ ).

Pentru rezervorul de secțiune pătrată ( $S = L^2$ ) nealimentat ( $Q_a = 0 \Rightarrow k = 0$ ) prin particularizarea relațiilor precedente sau direct cu (2.8) din:

$$t_G = - \frac{1}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{S dZ}{\sqrt{Z}} = \frac{2L^2 \sqrt{H}}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}}$$

rezultă timpul de golire  $t_G = 300s$ .

**2.6** Un rezervor paralelipedic este divizat de un perete vertical în două compartimente având secțiunile transversale  $s$  și  $s^*$  de arie constantă, respectiv  $S = 10 \text{ m}^2$  și  $S^* = 12 \text{ m}^2$ . În peretele despărțitor, fig.2.6, este practicat un orificiu circular  $s_0$  având diametrul  $d = 0.2 \text{ m}$  și coeficientul de debit  $C_Q = 0.6$ . Dacă la un moment dat, considerat inițial  $t = 0$ , diferența de nivel între suprafețele libere din cele două rezervoare este  $H = 10 \text{ m}$ , să se determine timpul  $t_G$  necesar egalizării celor două nivele.

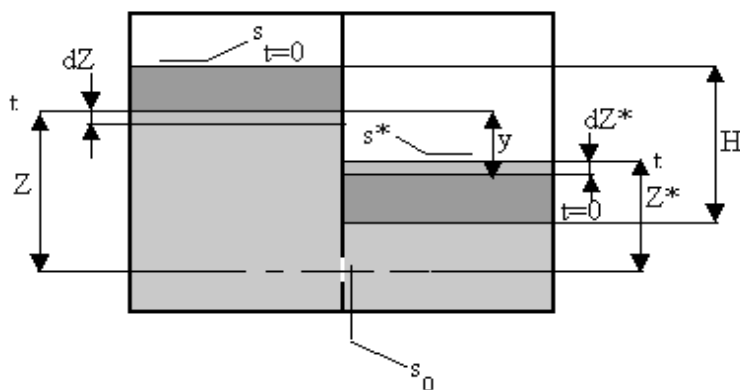


Fig.2.8

**REZOLVARE**

La un moment dat  $t$ , diferența de nivel a lichidului în cele două compartimente este:

$$y = Z - Z^*$$

și, debitul transvazat prin orificiu (îneecat), are expresia:

$$Q(s, t) = C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gy}$$

La momentul  $t$  (arbitrar) considerat, pentru cele două compartimente în conformitate cu (2.8) și (2.11) se scriu relațiile.

$$C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gy} dt = -S dZ \dots \dots \dots \text{golire} (dZ < 0)$$

$$C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gy} dt = S^* dZ^* \dots \dots \dots \text{umplere} (dZ^* > 0)$$

și cu:

$$dy = dZ - dZ^*$$

rezultă:

$$dt = -\frac{S \cdot S^*}{S + S^*} \frac{dy}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gy}}$$

din care:

$$t_G = \int_H^0 dt = 2 \frac{S \cdot S^*}{S + S^*} \frac{\sqrt{H}}{C_Q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2g}} = 80s$$

**2.3.2. Probleme propuse spre rezolvare.**

**2.7.** Doua rezervoare de secțiune patrata cu laturile  $L_1=2.4m$  respectiv  $L_2=1.2m$ , au un perete despartitor prevazut cu un orificiu de arie  $s=230 \text{ cm}^2$ . La momentul initial, cotele suprafetelor libere, fata de axa orificiului, erau, in cele doua rezervoare  $H_1=3m$ , respectiv  $H_2=0.9m$ . Sa se determine timpul necesar pentru egalizarea nivelelor daca coeficientul de debit al orificiului este  $C_Q=0.8$ .

**R:  $t=41.8s$**

**2.8.** Printr-o conductă de diametru  $D = 0,2$  m circulă ulei ( $\rho_u = 800$  kg/m<sup>3</sup>), fig.2.8. Considerând curgerea laminară și axial simetrică să se determine debitul vehiculat dacă la raza  $r = 0,05$  m viteza a fost măsurată cu o sondă Pitot-Prandtl conectată la un piezometru diferențial indirect cu mercur ( $\rho_{Hg} = 13600$  kg/m<sup>3</sup>). Se cunoaște coeficientul de etalonare (corecție) al sondei  $\alpha = 0,98$  și denivelarea  $L = 0,01$ m indicată de piezometru. B.

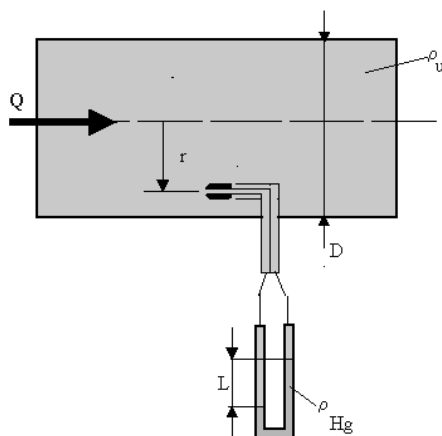


Fig.2.8

**R:  $Q=0,114$  m<sup>3</sup>/s**

**2.9.** În peretele lateral plan vertical al unui rezervor de cotă constantă  $H = 4,5$  m este plasat un orificiu de diametru  $D = 0,05$ m. Viteza reală din zona contractată a jetului este de  $8,4$  m/s. Să se determine pentru debitul  $Q = 11,4$  m<sup>3</sup>/s, valorile coeficienților de contracție și de debit.

**R:  $C_c=0,690$   $C=0,627$**

**2.10.** Un rezervor cilindric deschis, cu ulei ( $\rho_{ulei}=750$ kg/m<sup>3</sup>), cu diametru  $D=1,2$ m, este prevăzut cu un ajutor cilindric de golire, dispus pe capacul inferior, cu diametrul  $d=0,075$ m și coeficientul de debit  $C_Q=0,85$ . Cât timp este necesar ca nivelul apei în rezervor să scadă de la  $1,8$ m la  $1,2$ m.

**R:  $t_g=136$ s**

**2.11.** Să se stabilească expresia debitului pentru un deversor dreptunghiular și să se calculeze debitul măsurat pentru o înălțime a lamei deversante  $h = 0,2$  m, dacă lățimea deversorului este  $b = 0,2$ m și coeficientul de debit are valoarea  $C_Q = 0,42$ .

**R:  $Q=2/5C_Qb(g)^{1/2}(h)^{5/2}$   $Q=0,00188$ m<sup>3</sup>/s**

**2.12.** Să se calculeze debitul evacuat prin orificiul cu muchii ascuțite, de diametru  $d = 0,120\text{m}$ , practicat în peretele terminal al unei conducte de diametru  $D = 0,2\text{m}$ , dacă indicația manometrului  $M$ , plasat pe conductă în amonte de orificiu situat la cota  $h = 1,5\text{ m}$  față de axa conductei este  $p_M = 0,981\text{ bar}$ , fig.2.12. Care este debitul vehiculat  $Q_1$  dacă la orificiu se atașează o conductă scurtă. Se cunoaște coeficientul de pierderi hidraulice (locale) la trecerea fluidului prin orificiu  $\zeta = 0,04$  și coeficientul de contracție al vânei provenite din orificiu este  $C_C = 0,62$ .

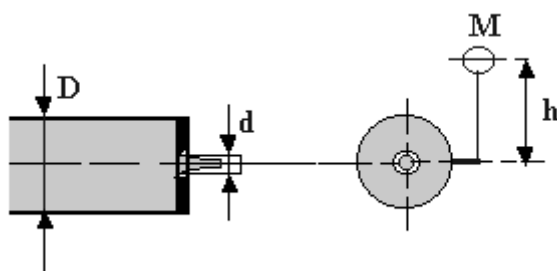


Fig.2.12

**R:  $Q=0,115\text{ m}^3/\text{s}$  ;  $Q_1=0,155\text{ m}^3/\text{s}$**

**2.13.** Pe o conductă dreaptă orizontală de diametru  $D = 0,3\text{m}$ , fig.2.13, este plasat ca instrument de măsură un tub Venturi având diametrul secțiunii minime  $d = 0,15\text{ m}$ . Să se determine debitul de apă vehiculat ( $\rho = 1000\text{ kg}/\text{m}^3$ ) dacă se cunoaște coeficientul de debit al venturimetrului  $C_Q = 0,9$  și denivelarea  $h = 1\text{ m}$  citită la piezometrul diferențial indirect cu toluen ( $\rho_1 = 1250\text{ kg}/\text{m}^3$ ) conectat la instrument.

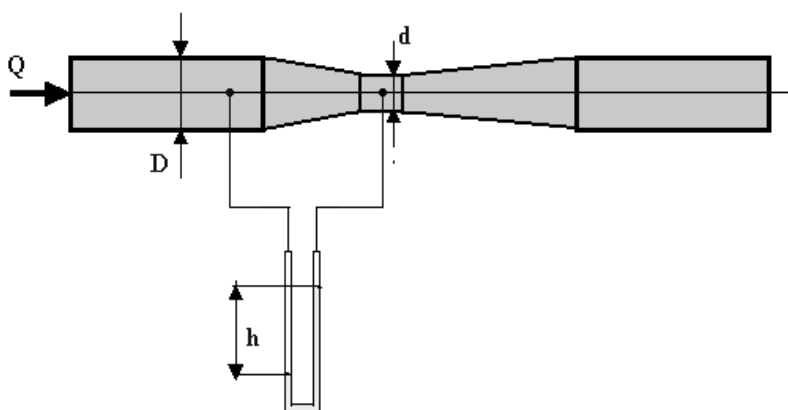


Fig.2.13

**R:  $Q=0,0352\text{ m}^3/\text{s}$**

**2.14.** În peretele lateral vertical al unui rezervor închis de cotă constantă, fig.2.14, cu ulei ( $\rho_{\text{ulei}} = 750 \text{ kg/m}^3$ ), este practicat un orificiu de descărcare având  $d = 0,075 \text{ m}$ ,  $C_V = 0,950$   $C_C = 0,650$ . Care este presiunea în perna de aer citită la manometrul montat pe capacul superior al rezervorului dacă puterea jetului provenit din orificiu  $P = \rho g Q H = 6 \text{ kW}$ . Axa orificiului este situată față de planul suprafeței libere la adncimea  $H = 2,7 \text{ m}$ .

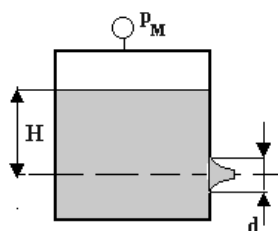


Fig-2.14

**R:  $p_M = 1,122 \text{ bar}$** 

**2.15.** Un rezervor cu apă ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) de cotă constantă, fig.2.15, este prevăzut cu un ajutor de descărcare cu diametru  $d = 0,1 \text{ m}$  având coeficientul de contracție  $C_C = 0,62$ . Să se determine:

- 1) debitul evacuat dacă nivelul suprafeței libere este situat deasupra axei ajutorului la cota  $H = 9 \text{ m}$
- 2) indicația manovacuumetrului conectat la secțiunea contractată a vânei în ajutor
- 3) cota  $H$  maximă pentru care la eșirea din ajutor, vâna are diametru  $d$ .

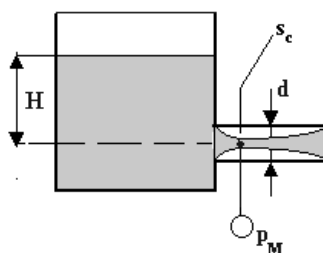


Fig.2.15

**R:  $Q = 0,0855 \text{ m}^3/\text{s}$  ,  $p_N = -0,35 \text{ bar}$  ,  $H = 12,15 \text{ m}$** 

**2.16.** În pereții laterali, plani, verticali, opuși, ai unui rezervor cu apă, de cotă constantă ( $\rho_{\text{apă}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ), sunt practicate două orificii coaxiale, fig.2.16, unul circular de diametru  $d = 0,2 \text{ m}$ ,  $C_{Q1} = 0,603$ , respectiv unul pătrat de latură  $a = 0,2 \text{ m}$ ,  $C_{Q2} = 0,489$ . Cunoscând debitul de alimentare  $Q = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$  care asigură pentru  $H = 4 \text{ m}$ , un regim permanent de curgere să se determine debitele asociate celor două orificii.

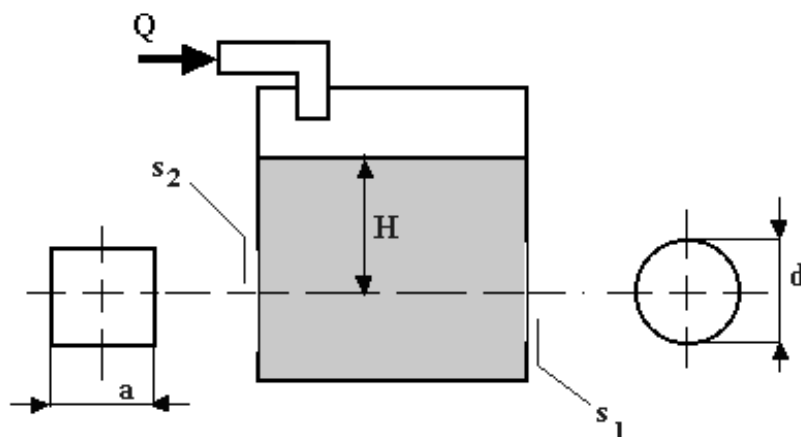


Fig.2.16

**R:  $Q_2=0,1016\text{m}^3/\text{s}$  ;  $Q_1=0,0984\text{m}^3/\text{s}$**

2.17. Care este coeficientul de debit  $C_Q$  al unui deversor semicircular de rază  $R = 0,5 \text{ m}$ , fig.2.17, dacă pentru o înălțime  $h_1 = 0,5 \text{ m}$  debitul măsurat a fost  $Q = 0,48 \text{ m}^3/\text{s}$ .

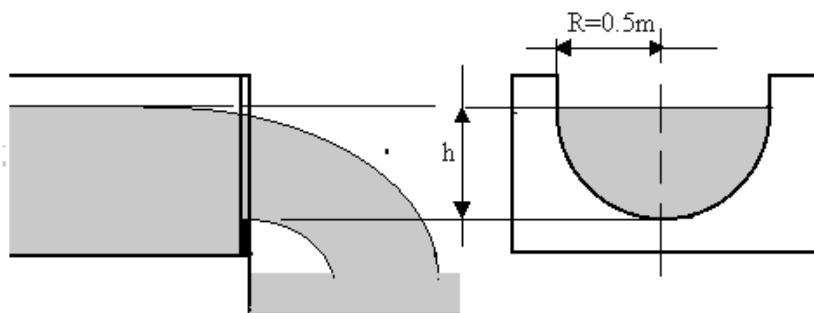


Fig.2.17

**R:  $C_Q = 0,6$**

2.18. În peretele lateral al unui rezervor de cotă constantă  $H$ , fig.2.18, este practicat un orificiu circular cu diametru  $D$  ( $H \geq D/2$  ;  $H \cong D$ ). Să se determine neglijând pierderile expresia debitului  $Q$  evacuat prin orificiu și să se particularizeze pentru  $H=1\text{m}$ ,  $a=1\text{m}$ ,  $D=2\text{m}$ . (orificiul este tangent la suprafața liberă)



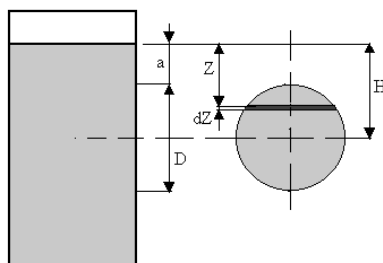


Fig.2.18

$$R: Q=4,3\text{m}^3/\text{s}$$

**2.19.** Un rezervor vertical, fig.2.19, este constituit din două compartimente. În peretele despărțitor și în cel exterior al celui de al doilea compartiment sânt practicate două orificii circulare cu diametrele  $d_1=0.2\text{m}$ ,  $d_2=0.1\text{m}$ . Să se determine coeficientul de debit al orificiului din cel de al doilea compartiment și debitul de alimentare  $Q$  necesar pentru ca nivelul lichidului în cele două compartimente să se mențină la cotele  $H=0.36\text{m}$  respectiv  $H_1=4\text{m}$ . Coeficientul de debit al primului orificiu este  $C_{Q1}=0.58$

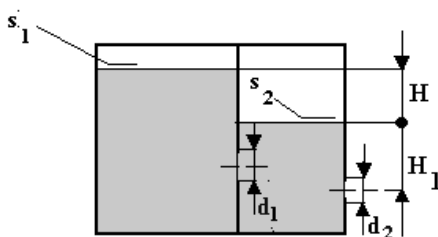


Fig.2.19

$$R: C_{Q2}=0.696 ; Q=0,484 \text{ m}^3/\text{s}$$

**2.20.** Un rezervor semisferic de rază  $R$ , fig.2.20, este prevăzut cu două orificii identice de diametru  $d$  dispuse în axa verticală ce trece prin centrul sferei. Dacă rezervorul este umplut, să se stabilească raportul dintre timpii de golire ai rezervorului, prin cele două orificii.

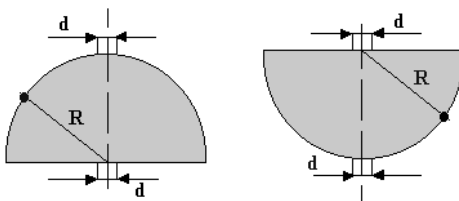


Fig.2.20

$$R: t_{g1}/t_{g2}=12/7$$

**2.21.** Un rezervor tronconic este prevăzut cu un orificiu de golire cu pereți subțiri, fig.2.21. Să se determine diametrul orificiului dacă pentru:  $H=3\text{m}$ ,  $D_1=2.4\text{m}$ ,  $D_2=1.2\text{m}$ , se impune ca timpul de golire să fie de 6 minute. Se acceptă pentru coeficientul de debit al orificiului valoarea  $C_Q=0.8$ .

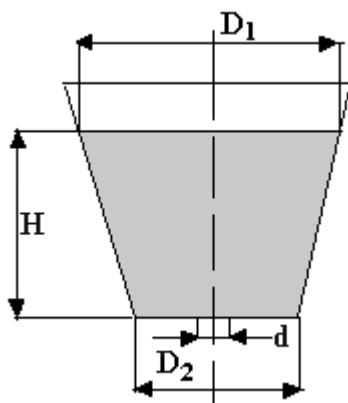


Fig.2.21

**R:  $d=0,0987\text{ m}$**

## **CAPITOLUL 3**

### **CURGEREA LICHIDELOR PRIN CONDUCTE**

#### **Notații și semnificații fizice**

$\rho$  – densitatea mediului lichid, în  $\text{kg/m}^3$

$\nu$  – vâscozitatea cinematică, în  $\text{m}^2/\text{s}$

$\eta$  – vâscozitatea absolută, în  $\text{Pa}\cdot\text{s}$

$v$  – viteza medie de curgere, în  $\text{m/s}$

$Re$  – numărul Reynolds

$d$  – diametrul conductei, în  $\text{m}$

$l$  – lungimea conductei, în  $\text{m}$

$\lambda$  – coeficientul de pierdere hidraulică longitudinală

$\zeta$  – coeficientul de pierdere hidraulică locală

$p$  – presiunea, în  $\text{Pa}$

$\tau$  – tensiunea tangențială, în  $\text{N/m}^2$

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$  – accelerația gravitațională

$Q$  – debitul volumic, în  $\text{m}^3/\text{s}$

$\alpha$  – coeficient de neuniformitate a vitezei pe secțiune

$h_p$  – pierderea hidraulică, în  $\text{m}$

#### **3.1. INTRODUCERE**

În diverse ramuri ale practicii ingineresti, problemele curgerii lichidelor prin conducte se rezolvă utilizând ecuația de transfer a energiei mecanice și ecuația de continuitate (prezentate în capitolul 2). Curgerea stabilă a fluidelor reale trebuie luată în considerare și rezolvată în contextul metodelor experimentale și semi-empirice. Ea este de două tipuri, laminară și turbulentă, fiecare tip de curgere fiind guvernată de legi diferite.

#### **3.2. NOȚIUNI TEORETICE**

**Curgerea laminară** este mișcarea în care nu există schimb de substanță între straturile adiacente. Criteriul pentru caracterizarea naturii regimului de mișcare într-o conductă a fost introdus de O.Reynolds prin:

$$\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} = \frac{v \cdot d}{\nu} = Re \quad (3.1)$$

unde  $Re$  poartă numele de criteriu sau număr Reynolds.

Pentru condițiile de secțiune circulară s-au stabilit experimental valorile pentru numerele Reynolds critice corespunzătoare tranziției laminar-turbulente.

$$Re_{cr.inf.} = \frac{v_{cr.inf.} \cdot d}{\nu} = 2300 \quad (3.2)$$

$$Re_{cr.sup.} = \frac{v_{cr.sup.} \cdot d}{\nu} = 4000 \quad (3.3)$$

Când  $Re < Re_{cr.inf.}$  mișcarea este laminar stabilă; în intervalul  $2300 < Re < 4000$  apare instabilitate sau mișcare tranzitorie, iar pentru  $Re > Re_{cr.sup.}$  mișcare turbulentă.

Pierderile hidraulice ce apar pe o conductă dreaptă de secțiune circulară se numesc *pierderi longitudinale sau uniform distribuite*. Darcy a stabilit următoarele relații pentru calculul acestora:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \quad (3.4)$$

și ținând cont de faptul că  $\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = h_p$ , rezultă pentru pierderile hidraulice:

$$h_p = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (3.5)$$

$\lambda$  reprezintă coeficientul de pierderi longitudinale și constituie problema de bază în calculul conductelor.

Pentru domeniul mișcării laminare  $\lambda$  depinde exclusiv de numărul Reynolds și nu depinde de rugozitatea relativă a peretelui conductei,  $k/d$ .

În cadrul unei mișcări laminare, viteza prezintă o distribuție de formă parabolică în funcție de rază:

$$\frac{v}{v_{max}} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (3.6)$$

unde

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot \nu \cdot l} \cdot \frac{R^2}{4} \quad (3.7)$$

reprezintă viteza maximă în axa conductei.

Viteza medie pe secțiunea transversală a conductei va fi:

$$v_{\text{med}} = \frac{v_{\max}}{2} \quad (3.8)$$

Tensiunea tangențială se determină din Legea de frecare Newton ca având o variație liniară în raport cu raza:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dn} = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad (3.9)$$

Ținând cont și de relațiile (3.6) și (3.7) rezultă:

$$\tau = -\frac{\Delta p \cdot r}{2 \cdot l} \quad (3.10)$$

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \rho \cdot \nu \cdot l \cdot v_{\text{med}}}{R^2} \quad (3.11)$$

Se poate determina coeficientul  $\lambda$  pentru mișcarea laminară conform relației lui Hagen-Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (3.12)$$

**Curgerea turbulentă** este mișcarea caracterizată de un puternic schimb de substanță între straturile adiacente de fluid.

În domeniul mișcării turbulente coeficientul de pierderi hidraulice  $\lambda$  ia valori diferite în funcție de regimul de curgere, după cum urmează:

-regim de conductă hidraulic netedă **CHN**: când  $\lambda$  nu depinde de rugozitatea relativă a conductei ci doar de numărul Re  $\lambda = \lambda(\text{Re})$ ;

-regim de conductă hidraulic semi-rugoasă **CHSR**: când  $\lambda = \lambda(\text{Re}, k/d)$ ;

-regim de conductă hidraulic rugoasă **CHR**: când  $\lambda$  depinde exclusiv de rugozitatea relativă și are o valoare constantă  $\lambda = \lambda(k/d) = \text{const.}$

Una și aceeași conductă poate fi hidraulic netedă sau hidraulic rugoasă în funcție de valoarea lui Re și a raportului k/d. Pentru determinarea regimului coeficientul  $\lambda$  se calculează astfel: se admite la început o valoare de inițializare a

calculului pentru  $\lambda$  în intervalul 0,02...0,04. Se stabilește valoarea criteriului lui Moody,  $\text{Crit} = \text{Re} \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{k}{d}$ , după cum urmează:

a). Pentru **CHN**:  $\text{Crit} < 9,4$ ;  $\lambda$  se poate calcula cu formula lui Blasius:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100 \cdot \text{Re}}}, \text{ pentru } \text{Re} < 10^5 \quad (3.13)$$

sau cu relația lui Prandtl:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = 2 \cdot \lg(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_{n-1}}) - 0,8, \text{ pentru } \text{Re} < 3,2 \cdot 10^6 \quad (3.14)$$

sau cu formula lui Konakov:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \cdot \lg(\text{Re}) - 1,5, \text{ pentru } \text{Re} < 10^7 \quad (3.15)$$

b). Pentru **CHSR**:  $9,4 < \text{Crit} < 200$ , iar  $\lambda$  se calculează cu relația Colebrook – White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_{n-1}}} + \frac{k}{3,71 \cdot d}\right) \quad (3.16)$$

c). Dacă  $\text{Crit} > 200$  avem **CHR**. Se folosește relația Karman – Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{d}{k}\right) + 1,14 \quad (3.17)$$

În afară de pierderile longitudinale există și porțiuni de conductă pe care au loc disipații bruște ale energiei hidraulice a curentului produse de modificarea structurii câmpului de viteze. Acestea se numesc *rezistențe hidraulice locale*. Din această categorie fac parte coturile, reducățiile, difuzoarele, confuzoarele, robinetii, ventilele, vanele, teurile.

Pierderea hidraulică pe o rezistență locală se calculează după relația lui Weisbach:

$$h_{p_{loc}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (3.18)$$

unde  $\zeta$  este coeficientul de pierdere al rezistenței locale și depinde de geometria rezistenței locale și de secțiunea în raport cu care este exprimat.

Pentru o destindere bruscă, pierderile au forma:

$$h_{p_{loc}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2 \cdot g} \quad (3.19)$$

### 3.3 APLICAȚII

#### 3.3.1 Probleme rezolvate

3.1 Să se determine viteza critică de curgere laminară într-o conductă având diametrul  $d=20$  mm pentru:

- a). Apă la  $t=20^{\circ}\text{C}$  ( $\nu=1,01 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s);  
 b). Ulei având densitatea masei  $\rho=920$  kg/m<sup>3</sup> și vâscozitatea dinamică  $\eta=10^{-2}$  Pa·s.

#### REZOLVARE

- a). În cazul unei curgeri laminare, numărul Reynolds critic este  $Re_c=2300$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad \text{de unde rezultă:}$$

$$v_c = \frac{Re_c \cdot \nu}{d} = 0,116 \text{ m/s}$$

- b). Se calculează vâscozitatea cinematică a uleiului:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = 1,087 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$v_c = 1,25 \text{ m/s}$$

3.2. Să se dimensioneze o conductă prin care trebuie să curgă, în condiții de mișcare laminară, un debit de 2,308 l/s țitei la temperatura de  $15^{\circ}\text{C}$  ( $\nu=2,84 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s).

#### REZOLVARE

Din ecuația de continuitate rezultă:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \Rightarrow d = \frac{Re \cdot \nu}{v} = \frac{\pi \cdot Re \cdot \nu \cdot d^2}{4 \cdot Q}$$

De aici determinăm diametrul ca fiind:

$$d = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot v \cdot Re} \Rightarrow d = \frac{4 \cdot 2,308 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 2,84 \cdot 10^{-5} \cdot 2300} = 0,0449 \text{ m}$$

**3.3.** Apa curge printr-o conductă având un diametru  $d=200$  mm. Pierderea hidraulică pe o lungime  $L=150$  m este de 10 m, fig.3.3. Să se determine:

- Tensiunea tangențială la peretele conductei;
- Viteza medie în conductă pentru un coeficient de pierdere prin frecare  $\lambda=0,04$ ;
- Tensiunea tangențială la 40 mm față de axa conductei?

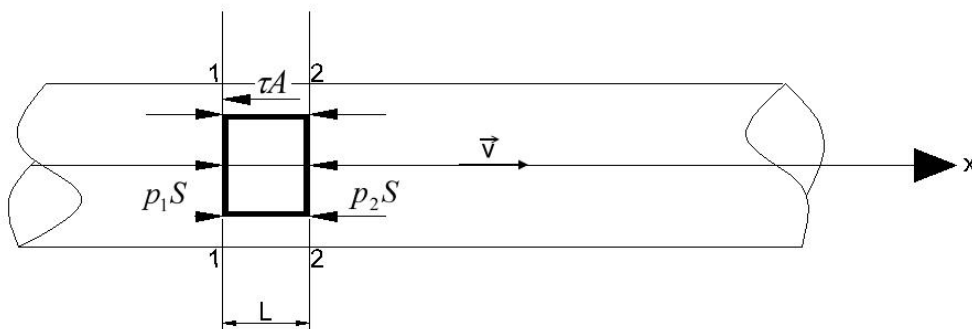


Fig. 3.3

**REZOLVARE**

a). În ipoteza unei curgeri staționare, se scrie echilibrul forțelor după direcția  $x$  a curgerii:

$$p_1 \cdot S - p_2 \cdot S - \tau \cdot A = 0 \quad \text{sau}$$

$$p_1 \cdot \pi \cdot r^2 - p_2 \cdot \pi \cdot r^2 - \tau \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot L) = 0$$

Rezultă:  $(p_1 - p_2) \cdot r = 2 \cdot \tau \cdot L \Rightarrow \tau = \frac{(p_1 - p_2) \cdot r}{2 \cdot L} = \frac{\Delta p_d \cdot r}{2 \cdot L}$

La perete  $r=d/2=R$ . Prin urmare,

$$\tau_0 = \frac{\Delta p_d \cdot d}{4 \cdot L}$$



Dar pierderile hidraulice uniform distribuite pot fi scrise astfel:

$$\Delta p_d = \rho \cdot g \cdot \Delta h_p$$

Înlocuind in relația lui  $\tau_0$  obținem:

$$\tau_0 = \frac{\rho \cdot g \cdot d \cdot \Delta h_p}{4 \cdot L}$$

$$\tau_0 = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 10}{4 \cdot 150} = 32,7 \text{ N}$$

b). Pierderile hidraulice uniform distribuite se exprimă conform (3.5):

$$h_p = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

De aici rezultă viteza ca fiind:  $v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot d \cdot h_p}{\lambda \cdot L}}$ .

Înlocuind,

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 10}{0,04 \cdot 150}} = 2,557 \text{ m/s}$$

Sau, ținând cont de căderea de presiune  $\Delta p_d = \frac{2 \cdot L \cdot \tau}{r} = \frac{4 \cdot L \cdot \tau_0}{d}$ ,

$$h_p = \frac{\Delta p_d}{\rho \cdot g} = \frac{4 \cdot L \cdot \tau_0}{\rho \cdot g \cdot d} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Rezultă pentru viteză:

$$v = \sqrt{\frac{8 \cdot \tau_0}{\lambda \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 32,7}{0,04 \cdot 1000}} = 2,557 \text{ m/s.}$$

c).

$$\tau = \frac{\Delta p_d \cdot r}{2 \cdot L} = \frac{\rho \cdot g \cdot \Delta h_p \cdot r}{2 \cdot L} = \frac{\rho \cdot g \cdot \Delta h_p \cdot d}{4 \cdot L} \cdot \frac{2 \cdot r}{d}$$

Deci  $\tau = \tau_0 \cdot \frac{2 \cdot r}{d} = \tau_0 \cdot \frac{r}{R}$ , iar numeric,  $\tau = 32,7 \cdot \frac{40}{100} = 13,08 \text{ N}$ .

**3.4.** Ce debit de păcură de densitate  $\rho=918 \text{ kg/m}^3$  trece printr-o conductă orizontală având lungimea  $L=100 \text{ m}$  și diametrul  $d=150 \text{ mm}$ ? Se cunosc presiunile la capetele conductei  $p_A=1 \text{ bar}$  și respectiv  $p_B=0,035 \text{ bar}$ , iar vâscozitatea cinematică  $\nu=412,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

**REZOLVARE**

$$Q = v \cdot S = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Pentru aflarea debitului avem nevoie de viteză. Aceasta se determină din expresia căderii de presiune, după cum urmează:

$$\Delta p_d = p_A - p_B = (1 - 0,035) \cdot 10^5 = 0,965 \cdot 10^5 \text{ Pa. Dar:}$$

$$\Delta p_d = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda \cdot \rho \cdot L \cdot Q^2}{d^5} \Rightarrow \pi^2 \cdot d^5 \cdot \Delta p_d = 8 \cdot \lambda \cdot \rho \cdot L \cdot Q^2$$

Rezultă:  $Q = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot d^5 \cdot \Delta p_d}{8 \cdot \lambda \cdot \rho \cdot L}}$  Presupunem  $\lambda_0=0,03$ . Atunci

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 0,15^5 \cdot 0,965 \cdot 10^5}{8 \cdot 0,03 \cdot 918 \cdot 100}} = 0,0573 \text{ m}^3/\text{s. De aici rezultă viteza:}$$

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,0573}{\pi \cdot 0,15^2} = 3,242 \text{ m/s. Verificăm natura regimului de curgere în}$$

$$\text{conductă: } Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{3,242 \cdot 0,15}{412,5 \cdot 10^{-6}} = 1179 \Rightarrow \text{mișcare laminară. Corecția pentru } \lambda \text{ se}$$

$$\text{face utilizând formula Hagen-Poiseuille: } \lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1179} = 0,054. \text{ Cu această valoare}$$

se corectează valoarea debitului, rezultând în final  $Q=0,043 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**3.5.** Apa curge printr-o conductă de  $2 \text{ km}$  cu un debit  $Q=45 \text{ l/s}$ . Diametrul conductei este  $d=300 \text{ mm}$ , iar vâscozitatea apei  $\nu=1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Știind că rugozitatea pereților conductei este  $k=1 \text{ mm}$ , să se determine:

- Căderea de presiune pe cei  $2 \text{ km}$  de conductă;
- Natura regimului de curgere în conductă;
- Ce valoare are coeficientul de pierdere longitudinală  $\lambda$ ?

**REZOLVARE**

a). Căderea de presiune se scrie ca:  $\Delta p = \rho \cdot g \cdot h_{pd} = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$ .

Pentru determinarea vitezei apelăm la ecuația de continuitate:  $Q = v \cdot s = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

De unde  $v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = 0,637$  m/s. Atunci căderea de presiune va fi:

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} = 8 \cdot \lambda \cdot \rho \cdot \frac{L \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^5} \quad \text{deci } \Delta p = 40,528 \text{ kPa.}$$

b). Se calculează numărul Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,637 \cdot 0,3}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 189095 > 4000, \text{ deci mișcarea în conductă este}$$

turbulentă. Mai mult, din criteriul lui Moody:

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{k}{d} = 189095 \cdot \sqrt{0,03} \cdot \frac{1}{300} = 109,17 \text{ valoare aflată în intervalul } 9,4 \dots 200;$$

rezultă deci o conductă hidraulic semirugoasă.

c). Coeficientul  $\lambda$  se calculează utilizând formula Colebrook-White. Se admite valoarea la care, pentru două iterații succesive, eroarea este mai mică de  $10^{-6}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = -2 \cdot \lg \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{n-1}}} + \frac{k}{3,71 \cdot d} \right) \text{ Presupunând } \lambda_0 = 0,03 \text{ rezultă:}$$

$$\lambda_1 = 0,027576$$

$$\lambda_2 = 0,027603$$

$$\lambda_3 = 0,0276027$$

$$\lambda_4 = 0,0276027$$

Deci  $\lambda = 0,0276027$

**3.6.** Printr-o conductă orizontală de lungime  $L=500$  m și diametru  $d=40$  mm este pompată apă de mare având densitatea masei  $\rho=1025$  kg/m<sup>3</sup>. Cunoscând căderea de presiune la capetele conductei ca fiind  $\Delta p_d=200$  kPa și vâscozitatea absolută a apei de mare  $\eta=1,025 \cdot 10^{-3}$  Pa·s, să se determine debitul de apă de mare ce trece prin conductă. Se dau  $\lambda_0=0,03$  și rugozitatea peretelui interior al conductei  $k=1,5$  mm.

**REZOLVARE**

Conform ecuației de continuitate,  $Q = v \cdot S = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$

Căderea de presiune la capetele conductei poate fi exprimata astfel:

$$\Delta p_d = \rho \cdot g \cdot \Delta h_{p_d} = \rho \cdot g \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

De aici rezultă expresia pentru viteza medie în conductă:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot \Delta p_d}{\rho \cdot \lambda_0 \cdot L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,04 \cdot 200 \cdot 10^3}{1025 \cdot 0,03 \cdot 500}} = 1,020 \text{ m/s} \Rightarrow Q = 1,28 \text{ l/s.}$$

Această valoare este aproximativă și se cere corectarea ei ținând cont de regimul de curgere în conductă. Pentru aceasta calculăm valoarea criteriului Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} = \frac{1,02 \cdot 0,04 \cdot 1025}{1,025 \cdot 10^{-3}} = 40805 > 4000$$

deci mișcarea este turbulentă. Se calculează valoarea criteriului lui Moody:

$Re \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{k}{d} = 40805 \cdot \sqrt{0,03} \cdot \frac{1,5}{40} = 265 > 200$ , ceea ce indică o conductă hidraulic rugoasă. Relația de calcul pentru coeficientul de pierderi  $\lambda$  este dată de Prandtl:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{d}{k}\right) + 1,14 \text{ de unde rezultă } \lambda = 0,0627.$$

Cu această valoare se corectează viteza și în final se determină valoarea debitului de apă de mare. Rezultă:

$$v_{\text{cor}} = 0,705 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow Q_{\text{cor}} = 0,886 \frac{\text{l}}{\text{s}}.$$

**3.7.** Printr-o conductă nouă de oțel se transportă aer la temperatura de 20°C. Conducta are dimensiunile  $d=40$  mm și  $l=100$  m, iar rugozitatea peretelui interior  $k=0,07$  mm. Să se determine ce debit de aer este transportat în condițiile în care aerul intră cu o presiune absolută de 3 bar și la capătul conductei căderea de presiune este de 0,015 bar.

### REZOLVARE

Densitatea aerului la 20°C și la presiunea atmosferică de 101325 Pa este:

$$\rho_{\text{aer } 20^{\circ}\text{C}} = 1,204 \text{ kg/m}^3. \text{ Vâscozitatea cinematică este } \nu = 14,86 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Ținând cont de ecuația de stare, la 3 bar densitatea aerului devine:

$$\rho_{\text{aer}} = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{3 \cdot 10^5}{287 \cdot 293,15} = 3,565 \text{ kg/m}^3, \text{ iar } \nu = 14,86 \cdot 10^{-6} / 3 = 4,953 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Considerând aerul incompresibil, rezultă:

$$\Delta p = p_1 - p_2 \quad \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \cdot \frac{d}{\lambda \cdot l}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta p \cdot d}{\rho \cdot g \cdot \lambda \cdot l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot \Delta p}{\rho \cdot \lambda \cdot l}} \text{ Pentru } \lambda_0 = 0,03 \text{ rezultă:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,04 \cdot 0,015 \cdot 10^5}{3,565 \cdot 0,03 \cdot 100}} = 3,349 \text{ m/s. Rezultă } Q = 4,208 \text{ l/s.}$$

Pentru corectarea valorii coeficientului  $\lambda$  calculăm criteriul Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{3,349 \cdot 0,04}{4,953 \cdot 10^{-6}} = 27049,7 \text{ așadar avem o mișcare turbulentă.}$$

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \frac{k}{d} \cdot 27049,7 \cdot \sqrt{0,03} \cdot \frac{0,07}{40} = 8,199 < 9,4 \text{ deci conducta este hidraulic netedă.}$$

Deoarece  $Re < 10^5$  putem avea formula lui Blasius pentru calcularea lui  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{1}{4 \sqrt[4]{100 \cdot Re}} = 0,024658 \text{ Corectăm valoare vitezei și a debitului și obținem:}$$

$$v_{\text{cor}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,04 \cdot 0,015 \cdot 10^5}{3,565 \cdot 0,024658 \cdot 100}} = 3,694 \text{ m/s.}$$

$$Q_{\text{cor}} = \frac{3,694 \cdot \pi \cdot 0,04^2}{4} = 4,462 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s.}$$

**3.8.** Să se determine coeficientul de frecare  $\lambda$  pe o porțiune a unei conducte prin care curge apă, fig.3.8, lungă de 150 m, având  $d=200$  mm, știind că indicația piezometrului diferențial cu mercur conectat la capete este  $h=1,2$  m, la un debit al apei de 175 l/s. Se dau densitățile masice ale apei  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup> și mercurului,  $\rho_{\text{Hg}}=13600$  kg/m<sup>3</sup>.

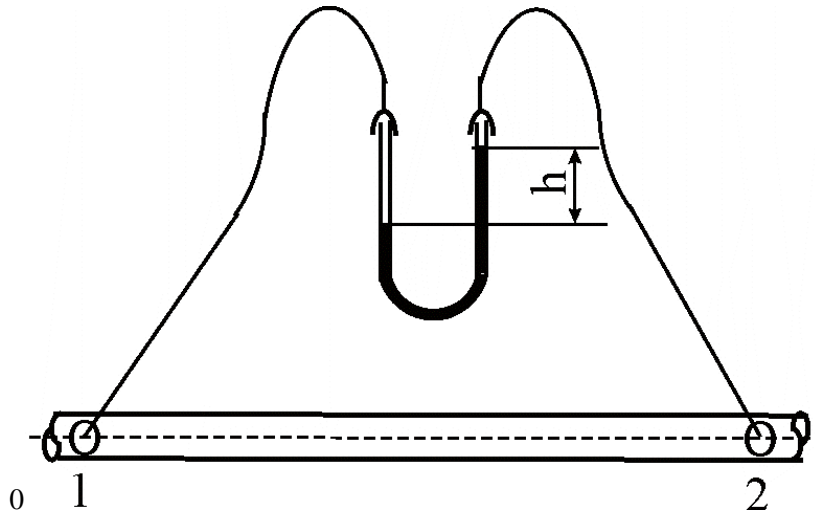


Fig. 3.8

**REZOLVARE**

Coeficientul de pierderi  $\lambda$  se determină din relația de transfer a energiei mecanice scrisă între secțiunile 1 și 2. Dacă se notează diferența de presiune pe această porțiune cu  $\Delta p$ , înseamnă că:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad \text{unde } v \text{ este viteza medie în conductă și se determină din:}$$

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,175}{\pi \cdot 0,2^2} = 5,570 \text{ m/s. Dar } \Delta p = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_{\text{Hg}} \quad \text{Rezultă:}$$

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot d}{1 \cdot v^2} = \frac{\rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg}}{\rho \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot g \cdot d}{1 \cdot v^2}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot g \cdot d \cdot h}{1 \cdot v^2} \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 1,2}{150 \cdot 5,57^2} \cdot \frac{13600}{1000} \Rightarrow \lambda = 0,013761$$

**3.9.** Printr-o conductă de oțel având  $d=400$  mm se pompează benzină în rezervorul R, cu ajutorul unei pompe centrifuge, fig.3.9. Un manometru plasat la intrarea în pompă indică presiunea  $p_i=0,14$  kgf/cm<sup>2</sup>, la un debit  $Q=0,2$  m<sup>3</sup>/s. Să se determine:

- Ce putere furnizează pompa benzinei?
- Ce presiune trebuie menținută la ieșirea din pompă?
- Desenați linia piezometrică .

Se dau  $v = 0,65 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s;  $k = 1,5$  mm;  $\rho = 725$  kg/m<sup>3</sup>.

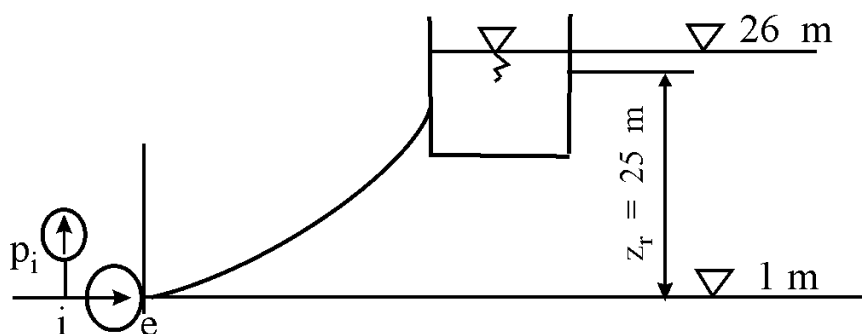


Fig. 3.9

### REZOLVARE

a). Puterea furnizată de pompă benzinei este de fapt puterea utilă a pompei, care se poate scrie ca:  $P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_p$ . Înălțimea de pompare  $H_p$  se determină din ecuația de transfer a energiei mecanice scrisă de la secțiunea de intrare în pompă până

la rezervorul R: 
$$z_i + \frac{p_i}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_i \cdot v_i^2}{2 \cdot g} + H_p = z_R + \frac{p_R}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_R \cdot v_R^2}{2 \cdot g} + h_{p_i-R}$$

Considerând nivelul energetic zero la 1 m,  $\alpha_i \approx 1$ ,  $\alpha_R \approx 1$  energiile specifice de presiune și cinetică la suprafața liberă a rezervorului ca fiind nule, rezultă:

$$0 + \frac{p_i}{\rho \cdot g} + \frac{v_i^2}{2 \cdot g} + H_p = z_R + 0 + 0 + \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v_i^2}{2 \cdot g} + \frac{v_i^2}{2 \cdot g}$$

$$\Rightarrow H_p = z_R + \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} - \frac{v^2}{2 \cdot g} - \frac{p_i}{\rho \cdot g} = z_R - \frac{p_i}{\rho \cdot g} + \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Viteza se calculează din ecuația de continuitate:  $v = \frac{4 \cdot 0,2}{\pi \cdot 0,4^2} = 1,592 \text{ m/s}$ .

Se stabilește regimul de curgere în conductă:

$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{1,592 \cdot 0,4}{0,65 \cdot 10^{-6}} = 979692 \Rightarrow$  mișcare turbulentă. Presupunem o valoare inițială  $\lambda_0 = 0,03$ . Criteriul lui Moody are valoarea:  $Re \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot \frac{k}{d} = 979692 \cdot \sqrt{0,03} \cdot \frac{1,5}{400} = 636,3 > 200$ , deci conducta este hidraulic rugoasă.

Se aplică relația lui Karman – Nikuradse pentru calculul lui  $\lambda$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg\left(\frac{d}{k}\right) + 1,14 \Rightarrow \lambda = 0,02785. \text{ Înlocuind în expresia înălțimii de pompare:}$$

$$H_p = 25 - \frac{0,14 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{725 \cdot 9,81} + 0,02785 \cdot \frac{1800}{0,4} \cdot \frac{1,592^2}{2 \cdot 9,81} = 39,258 \text{ m.}$$

Atunci puterea utilă rezultă:  $P = 725 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 39,258 = 55,842 \text{ kW}$ .

**b).** Pentru determinarea presiunii la ieșire din pompă se scrie ecuația transferului de energie mecanică între secțiunea de la ieșirea din pompă și rezervorul R:

$$z_e + \frac{p_e}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_e \cdot v_e^2}{2 \cdot g} = z_R + \frac{p_R}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_R \cdot v_R^2}{2 \cdot g} + \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Cum  $\alpha_i \approx 1$ ,  $\alpha_R \approx 1$ ,  $z_e = 0$ ,  $p_R = 0$  (rezervorul este deschis, la suprafața liberă a apei presiunea fiind egală cu presiunea atmosferică) și componenta cinetică la suprafața liberă neglijabilă, rezultă:

$$\frac{p_e}{\rho \cdot g} = z_e + \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 25 + 0,02785 \cdot \frac{1800}{0,4} \cdot \frac{1,592^2}{2 \cdot 9,81} = 41,189 \text{ m}$$

Atunci  $p_e = 725 \cdot 9,81 \cdot 41,189 = 292,946 \text{ kPa}$ .



c). Cele trei secțiuni remarcabile prezintă următoarele valori ale energiei specifice potențiale:

$$\frac{P_i}{\rho \cdot g} + z_i = 2,931 \text{ m}; \quad \frac{P_e}{\rho \cdot g} + z_e = 42,189 \text{ m}; \quad \frac{P_R}{\rho \cdot g} = 25 \text{ m}$$

Linia piezometrică este reprezentată în figura 3.9.1.

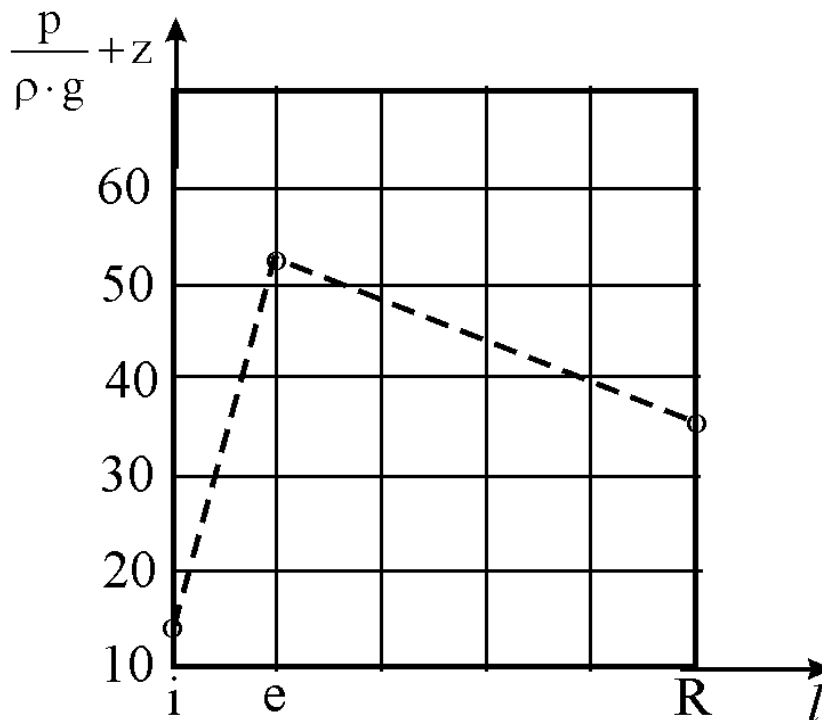


Fig. 3.9.1

**3.10.** Să se determine energiile specifice de presiune în cele două conducte ce unesc rezervorul A cu rezervorul B, în secțiunea contractată C (fig. 3.10). Se cunosc:  $H_1=27$  m,  $H_2=20$  m,  $H_3=18$  m. Dimensiunile conductei ce iese din rezervorul A sunt  $d_1=200$  mm,  $l_1=20$  m,  $\lambda_1=0,02$  iar a conductei ce intră în B,  $d_2=100$  mm,  $l_2=10$  m,  $\lambda_2=0,015$ . Coeficientul de pierdere locală pentru un cot de  $90^\circ$  este  $\zeta_c=0,5$  iar pentru contracția bruscă  $\zeta_{con}=0,75$ .

**REZOLVARE**

Energiile specifice de presiune în cele două conducte de dimensiuni diferite în dreptul secțiunii contractate se calculează utilizând ecuația transferului de energie mecanică și ecuația de continuitate. Pentru început studiem transferul de energie între secțiunile A și C:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_A \cdot v_A^2}{2 \cdot g} = z_C + \frac{p_C}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_C \cdot v_C^2}{2 \cdot g} + \sum_A^C h_p.$$

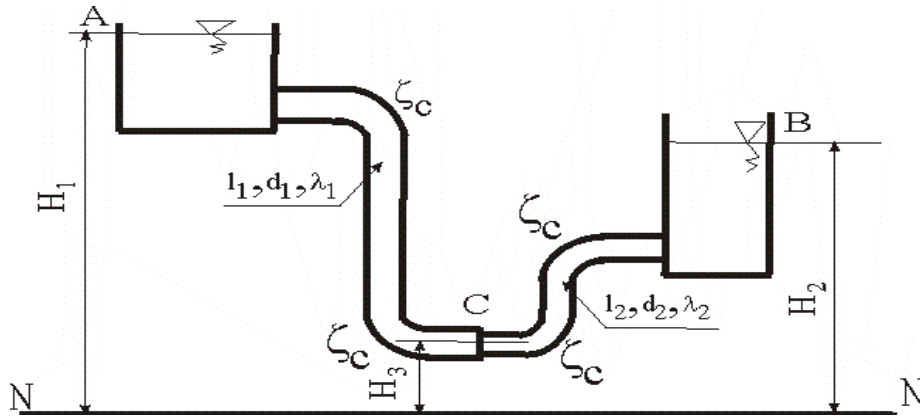


Fig. 3.10

Explicitând pierderile longitudinale pe conducta de diametru  $d_1$ , și locale în cele două coturi, avem:

$$H_1 + 0 + 0 = H_3 + \frac{p_{1C}}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_{1C} \cdot v_{1C}^2}{2 \cdot g} + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot \zeta_c \cdot \frac{v_{1C}^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{p_{1C}}{\rho \cdot g} = H_1 - H_3 - \frac{v_{1C}^2}{2 \cdot g} \cdot \left( 1 + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + 2 \cdot \zeta_c \right) \quad (*)$$

Relația de legătură între viteza  $v_{1C}$  și  $v_{2C}$  se determină din ecuația de continuitate:

$$Q = v_{1C} \cdot S_1 = v_{2C} \cdot S_2 \Leftrightarrow v_{1C} \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = v_{2C} \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \Rightarrow v_{2C} = v_{1C} \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2$$

Se scrie acum ecuația de transfer între secțiunile A și B:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_A \cdot v_A^2}{2 \cdot g} = z_B + \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_B \cdot v_B^2}{2 \cdot g} + \sum_A^B h_p.$$

Deoarece la suprafețele libere ale rezervoarelor energiile specifice cinetice sunt neglijabile, iar cele de presiune sunt egale, rezultă:

$$H_1 = H_2 + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_{1C}^2}{2 \cdot g} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot \zeta_c \cdot \frac{v_{1C}^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot \zeta_c \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} + \zeta_{con} \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g}$$

Înlocuind pe  $v_{2C}$ , rezultă:

$$H_1 - H_2 = \left( \lambda_1 \cdot \frac{d_1}{l_1} + \lambda_2 \cdot \frac{d_2}{l_2} \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 + 2 \cdot \zeta_c + 2 \cdot \zeta_c \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 + \zeta_{con} \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right) \cdot \frac{v_{1C}^2}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$v_{1C} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (H_1 - H_2)}{\lambda_1 \cdot \frac{d_1}{l_1} + \lambda_2 \cdot \frac{d_2}{l_2} \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 + 2 \cdot \zeta_c + 2 \cdot \zeta_c \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 + \zeta_{con} \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4}}$$

$$v_{1C} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot (27 - 20)}{0,02 \cdot \frac{20}{0,2} + 0,015 \cdot \frac{10}{0,1} \cdot 16 + 2 \cdot 0,5 \cdot (1 + 16) + 0,75 \cdot 16}} = 1,580 \text{ m/s.}$$

$\Rightarrow v_{2C} = v_{1C} \cdot 4 = 6,320 \text{ m/s.}$  Revenim în ecuația (\*):

$$\frac{p_{1C}}{\rho \cdot g} = 27 - 18 - 0,08053 \cdot \left( 1 + 0,02 \cdot \frac{20}{0,2} + 2 \cdot 0,5 \right) = 8,688 \text{ m}$$

Din ecuația de transfer a energiei mecanice între C și B rezultă:

$$z_C + \frac{p_{2C}}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_C \cdot v_{2C}^2}{2 \cdot g} = z_B + \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_B \cdot v_B^2}{2 \cdot g} + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} + 2 \cdot \zeta_c \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} + \zeta_{con} \cdot \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_{2C}}{\rho \cdot g} = z_B - z_C + \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} \cdot \left( \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} + 2 \cdot \zeta_c + \zeta_{con} - 1 \right) =$$

$$= H_2 - H_3 + \frac{v_{2C}^2}{2 \cdot g} \cdot \left( \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} + 2 \cdot \zeta_c + \zeta_{con} - 1 \right)$$

$$\frac{p_{2C}}{\rho \cdot g} = 20 - 18 + \frac{6,32^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \left( 0,015 \cdot \frac{10}{0,1} + 2 \cdot 0,5 + 0,75 - 1 \right) = 6,580 \text{ m.}$$

Așadar, energiile specifice de presiune sunt:  $\frac{p_{1C}}{\rho \cdot g} = 8,688 \text{ m}$  și  $\frac{p_{2C}}{\rho \cdot g} = 6,580 \text{ m}$ .

### 3.3.2 Probleme propuse spre rezolvare

**3.11.** Să se determine natura regimului de curgere într-o conductă având diametrul  $d=50 \text{ mm}$ , pentru un debit  $Q=2,309 \text{ l/s}$  de

a). apă la  $15^\circ\text{C}$  ( $\nu=1,145 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )

b). ulei având vâscozitatea cinematică  $\nu=4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

**R: a). Re=51352; b). Re=1470.**

**3.12.** Să se dimensioneze conducta prin care trebuie transportat  $25 \text{ l/s}$  combustibil lichid având vâscozitatea cinematică  $\nu=1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , cunoscând căderea de sarcină pe lungimea de  $1 \text{ km}$  ca fiind de  $25 \text{ m}$ . Se consideră curgerea laminară.

**R: d=20 mm.**

**3.13.** Cât trebuie să fie vâscozitatea absolută a uleiului care are densitatea de  $860 \text{ kg/m}^3$ , este pompat printr-o conduită orizontală lungă de  $250 \text{ m}$ , și diametru  $d=50 \text{ mm}$  astfel încât prin conductă să curgă laminar un debit  $Q=1,25 \text{ l/s}$ . Căderea de presiune pe conductă este de  $21 \text{ kPa}$ .

**R:  $\eta=1,03 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$**

3.14. Să se determine pierderea hidraulică de-a lungul unei conducte având diametrul  $d=200$  mm și lungimea 200 m, când prin ea curge cu o viteză de 1,5 m/s:

a). apă la  $15^{\circ}\text{C}$  ( $\nu=1,145 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )

b). țitei având  $\nu=0,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . Se consideră rugozitatea conductei  $k=0,5$  mm.

**R:  $h_{pd}=3,626$  m.**

3.15. Ce presiune este necesară la suprafața liberă a apei, în rezervorul închis R din figura 3.15, pentru a produce curgerea apei prin conducta din figură cu un debit  $Q=20$  l/s? Se dau vâscozitatea cinematică a apei  $\nu=1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , rugozitatea conductei  $k=0,5$  mm și coeficientul de pierdere locală la intrarea în conductă  $\zeta_i=0,5$ .

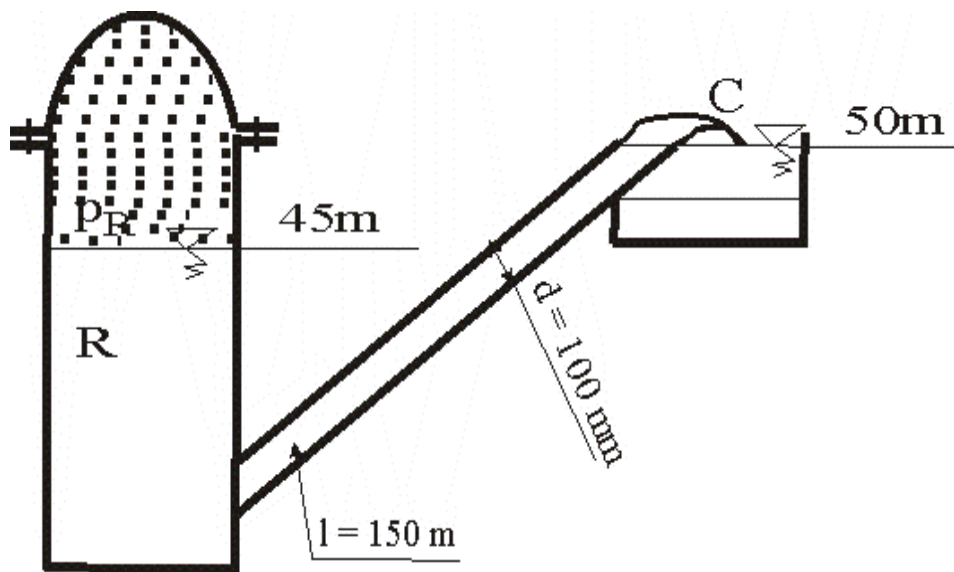


Fig. 3.15

**R:  $p_R=201359$  Pa**

**3.16** Apa curge printr-o conductă nouă de oțel, având diametrul  $d=150$  mm și rugozitatea  $k=0,06$  mm (fig. 3.16). La capetele conductei s-au montat două manometre care indică presiunile  $p_1=8,65$  kgf/cm<sup>2</sup> și respectiv  $p_2=3,4$  bar. Să se determine debitul de apă ce trece prin conductă, știind că apa are o temperatură de 65°C.

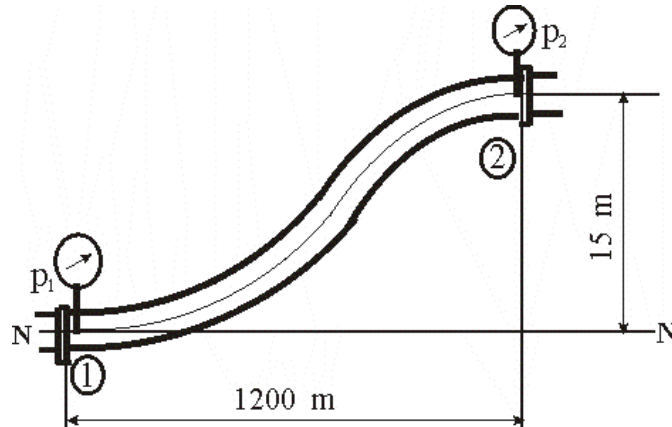


Fig. 3.16

**R:  $Q=40,94$  l/s.**

**3.17.** Printr-o conductă de oțel, fig.3.17, având  $d=65$  mm se transportă, la presiune constantă, un debit  $Q=15$  l/s de apă la 15°C. Să se afle cât de mult coboară conducta pe o lungime  $l=200$  m. Se cunosc rugozitatea conductei  $k=0,5$  mm și vâscozitatea cinematică a apei  $\nu=1,14 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

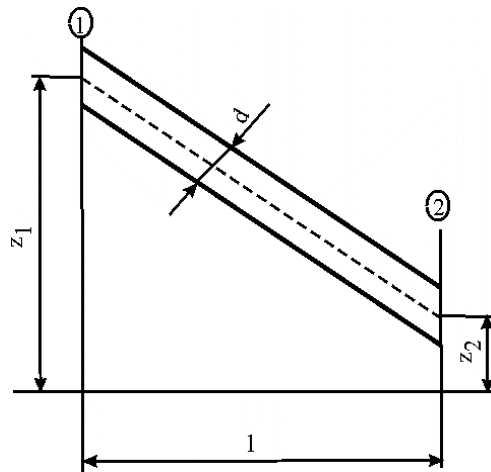


Fig. 3.17

**R:  $z_1 - z_2 \cong 111,2$  m**

**3.18.** Apa curge din rezervorul A în rezervorul B prin două conducte având dimensiunile  $d_1=200$  mm,  $l_1=50$  m și  $d_2=100$  mm,  $l_2=25$  m, ca în fig. 3.18. Punctul C al conductei în sifon se află la  $h=800$  mm față de cota suprafeței libere a rezervorului A. Cunoscând că pierderea datorată contracției la modificarea diametrului este de 75 mm și  $H=6$  m;  $v=1,01 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s;  $k_1=0,5$  mm;  $k_2=0,1$  mm să se determine:

- Debitul de apă;
- Energia specifică de presiune în punctul C aflat la  $\Delta l=25$  m față de rezervor.

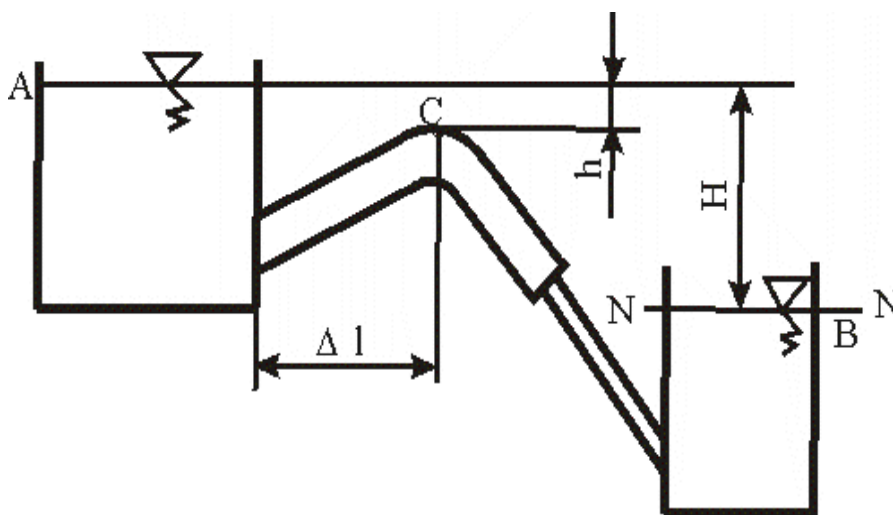


Fig. 3.18

**R: a).  $Q=33,5$  l/s; b).  $E_{sp}=0,556$  m.**

**3.19.** O pompă asigură transportul la  $0,1$  m<sup>3</sup>/s de apă din bazinul A în rezervorul B (figura 3.19). În secțiunea de aspirație a pompei, de diametru  $d_a=250$  mm, un manometru indică presiunea  $p_{Mv}=-0,12$  kgf/cm<sup>2</sup>, iar în cea de refulare, manometrul arată o presiune  $p_M=5,75$  bar. Știind că diametrul conductei de refulare este  $d_r=125$  mm, pe o lungime de conductă de  $l_1=15$  m, iar apoi are loc o destindere bruscă, la  $d_2=250$  mm, într-o conductă lungă de  $l_2=60$  m, ce dă în rezervorul B, să se determine presiunea  $p_B$  la suprafața liberă a apei din rezervor. Se dau  $\lambda_1=0,03$  și  $\lambda_2=0,02$  iar coeficientul de pierdere pe ventil  $\zeta_v=1$ . Să se traseze linia piezometrică și linia energetică.

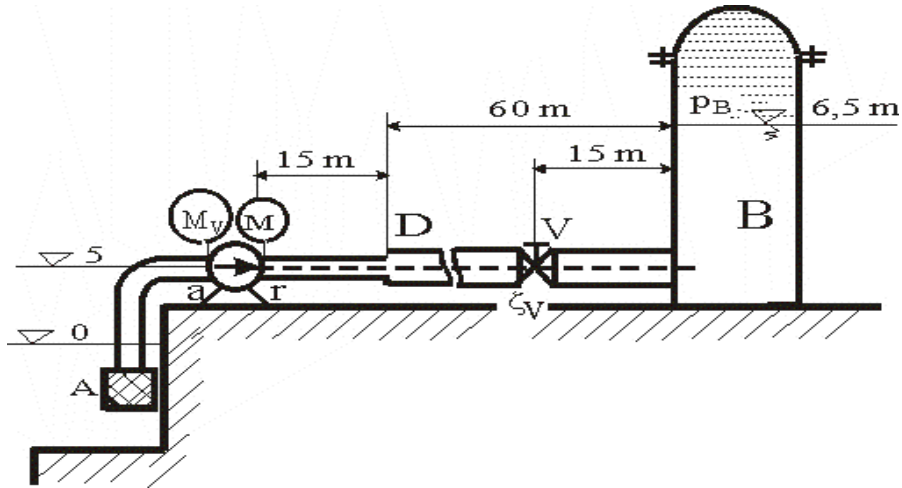


Fig. 3.19

3.20. O pompă centrifugă, fig.3.20, transportă apă din rezervorul A în rezervorul R, furnizând un debit  $Q=6,7$  l/s și  $3,2$  kW în sistem. Cunoscând dimensiunile conductei de la aspirație  $d_1=50$  mm,  $l_1=2,5$  m și ale celei de la refulare  $d_2=40$  mm,  $l_2=10$  m, precum și coeficienții de pierdere longitudinală  $\lambda_1=0,03$  respectiv  $\lambda_2=0,02$ ; coeficientul de pierdere locală în cot  $\zeta_c=0,45$  și pe ventil  $\zeta_v=5$ , să se determine ce înălțime  $h$  a apei poate fi asigurată în rezervorul R.

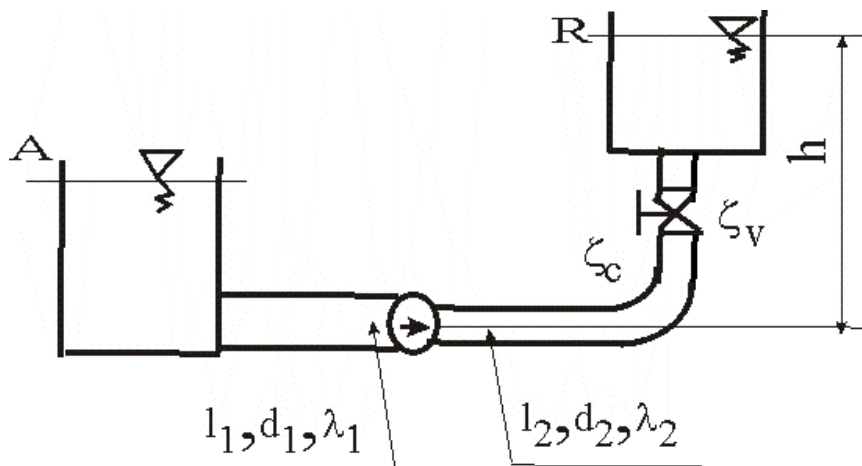


Fig. 3.20

R:  $h=32,653$  m.



## CAPITOLUL 4

### REȚELE DE CONDUCTE

#### NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE

$p$  - presiunea, în  $N/m^2$

$p_{at} = 101325 N/m^2$  - presiunea atmosferică

$\rho$  - densitatea mediului lichid, în  $kg/m^3$

$g = 9,80665 m/s^2$  - accelerația gravitațională

$v$  - viteza fluidului în conductă, în  $m/s$

$\lambda$  - coeficientul pierderilor longitudinale uniform distribuite

$\zeta$  - coeficientul pierderilor locale

$d, D$  - diametrul interior al unei conducte sau rezervor, în  $m$

$L, l$  - lungimea, în  $m$

$H$  - înălțimea, în  $m$

$z$  - cota geodezică, în  $m$

$Q$  - debitul de fluid, în  $m^3$

$M$  - modulul de rezistență al conductei, în  $s^2 \cdot m^{-5}$

#### 4.1 Introducere

Rețelele de conducte sunt sisteme hidraulice des întâlnite în practică. Ele sunt utilizate în foarte multe domenii: rețele de alimentare cu apă, transportul fluidelor de orice fel, etc. În funcție de aplicația practică, rețelele de conducte pot fi complexe și calculul corect al acestora este deosebit de important. În acest capitol se vor prezenta metodele de calcul ale rețelelor de conducte.

#### 4.2 Noțiuni teoretice

Pentru determinarea debitului  $Q$  ce trece printr-un sistem de conducte sau a sarcinii  $H$ , se aplică ecuația transferului energiei mecanice care, între secțiunile extreme ale sistemului  $i$  - intrare și  $e$  - ieșire, are forma:

$$\frac{\alpha_i v_i^2}{2 \cdot g} + \frac{p_i}{\rho \cdot g} + z_i = \frac{\alpha_e v_e^2}{2 \cdot g} + \frac{p_e}{\rho \cdot g} + z_e + h_{p_{i-e}}$$

unde:  $\frac{\alpha \cdot v^2}{2 \cdot g}$  = energia specifică cinetică

$\frac{p_i}{\rho \cdot g}$  = energia specifică potențială datorată presiunii

$z_i$  = energia specifică potențială datorată poziției

Pierderile hidraulice sunt de două tipuri:

$hp_{i-e}$  = pierderile hidraulice între intrare și ieșire

**Pierderi hidraulice locale** – apar în coturi, vane, variații bruște de secțiune, etc, și au expresia:

$$hp_{loc} = \zeta \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$\zeta$  - coeficient de pierdere corespunzător rezistenței locale

$v$  – viteza fluidului prin conductă

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$  – accelerația gravitațională

**Pierderi hidraulice longitudinale sau distribuite** – apar datorită frecărilor de-a lungul conductei și au forma:

$$hp_{long} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$\lambda$  - coeficient de pierderi longitudinale

$l$  – lungimea conductei

$d$  – diametrul conductei

La calculul rețelelor de conducte se consideră că avem conducte lungi, deci pierderile hidraulice locale sunt neglijabile în raport cu cele longitudinale.

În cazul conductelor lungi pierderile hidraulice se pot exprima sub forma:

$$hp_{long} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2 \cdot g} = MQ^2$$

Unde  $M$  este modulul de rezistență al conductei, exprimat prin:

$$M = \lambda \frac{1}{d} \frac{8}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}$$

**Conducte legate în serie**

Aplicând ecuația transferului energiei, sarcina  $H$  poate fi exprimată sub forma:

$$H = hp_1 + hp_2 + \dots + hp_n$$

Unde  $hp_i$ ,  $i=1\dots n$  reprezintă pierderile hidraulice longitudinale pe fiecare tronson de conductă, sau

$$H = M_1 \cdot Q^2 + M_2 \cdot Q^2 + \dots + M_n \cdot Q^2$$

$$H = (M_1 + M_2 + \dots + M_n) \cdot Q^2 = M \cdot Q^2$$

O conductă cu tronsoane legate în serie este echivalentă cu o conductă simplă. Modulul de rezistență al conductei în serie este suma modulelor tronsoanelor ce compun conducta:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i$$

### **Conducte legate în paralel**

Pentru conducte legate în paralel pierderea de sarcină pe fiecare tronson de conductă legat în paralel pierderea de sarcină este aceeași:

$$hp_1 = hp_2 = \dots = hp_n$$

deci

$$M_1 \cdot Q_1^2 = M_2 \cdot Q_2^2 = \dots = M_n \cdot Q_n^2$$

Debitul total  $Q$  este:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Sistemul format din mai multe conducte simple legate în paralel poate fi înlocuit cu o conductă simplă ce are modulul de rezistență calculat cu relația:

$$\frac{1}{\sqrt{M}} = \frac{1}{\sqrt{M_1}} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{M_n}}$$

## **4.3 APLICAȚII**

### **4.3.1 Probleme rezolvate**

**4.1** Apa curge din rezervorul A în rezervorul B printr-un sistem de conducte ca în fig.4.1. Cunoscând:  $d_1=0,16$  m,  $d_2=0,2$  m,  $d_3=0,18$  m,  $l_1=1000$  m,  $l_2=1600$  m,  $l_3=850$  m,  $\lambda_1=0,02$ ,  $\lambda_2=0,025$ ,  $\lambda_3=0,028$  și debitul  $Q=0,020$ m<sup>3</sup>/s, să se determine sarcina  $H$ , neglijând pierderile locale.

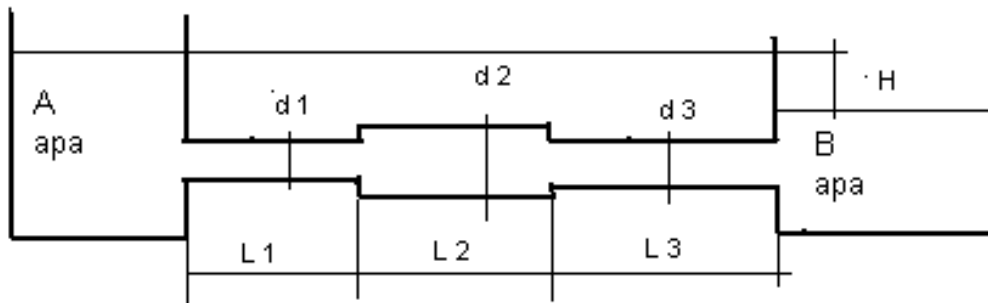


Fig. 4.1

**REZOLVARE**

Aplicând ecuația transferului energiei mecanice între suprafața liberă a apei din rezervorul A și suprafața liberă a apei din rezervorul B, se obține:

$$\frac{\alpha_A v_A^2}{2 \cdot g} + \frac{p_A}{\rho \cdot g} + z_A = \frac{\alpha_B v_B^2}{2 \cdot g} + \frac{p_B}{\rho \cdot g} + z_B + h_{p_{A-B}}$$

$$\alpha_A = \alpha_B = 1; \quad v_A = v_B = 0; \quad p_A = p_B = p_{\text{atm}}; \quad z_A = z_B = H$$

$$H = h_{p_{A-B}}$$

$$H = M_1 \cdot Q^2 + M_2 \cdot Q^2 + M_3 \cdot Q^2$$

$$M_1 = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_1^4 \cdot g}$$

$$M_2 = \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_2^4 \cdot g}$$

$$M_3 = \lambda_3 \frac{L_3}{d_{31}} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_3^4 \cdot g}$$

$$H = (M_1 + M_2 + M_3) \cdot Q^2 = M \cdot Q^2$$

$$H=47,67 \text{ m}$$

4.2 Să se calculeze debitul sistemului de conducte din fig. 4.2, cunoscând:

- pentru conducta AB:  $L=2400 \text{ m}$ ,  $d=150 \text{ mm}$ ,  $\lambda=0,03$
- pentru conducta B1C:  $L1=1500 \text{ m}$ ,  $d1=100 \text{ mm}$ ,  $\lambda1=0,02$
- pentru conducta B2C:  $L2=2100 \text{ m}$ ,  $d2=50 \text{ mm}$ ,  $\lambda2=0,04$
- pentru conducta CD:  $L3=900 \text{ m}$ ,  $d3=100 \text{ mm}$ ,  $\lambda3=0,02$
- sarcina  $H=30 \text{ m}$ .

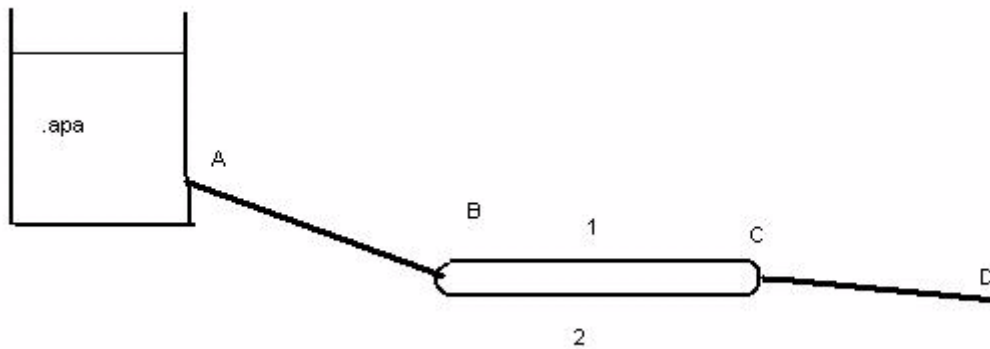


Fig.4. 2

### REZOLVARE

Sarcina  $H$  în cazul sistemului de conducte din fig. 4. 2 poate fi calculată cu relația:

$$H = M_{AB} \cdot Q^2 + M_{BC} \cdot Q^2 + M_{CD} \cdot Q^2 + \frac{v_D^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{M_{BC}}} = \frac{1}{\sqrt{M_{B1C}}} + \frac{1}{\sqrt{M_{B2C}}}$$

$$M_{AB} = \lambda \frac{L}{d} \frac{8}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot g}$$

$$M_{B1C} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_1^4 \cdot g}$$

$$M_{B2C} = \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_2^4 \cdot g}$$

$$M_{BC} = \left( \frac{\sqrt{M_{B1C}} \cdot \sqrt{M_{B2C}}}{\sqrt{M_{B1C}} + \sqrt{M_{B2C}}} \right)^2$$

$$M_{CD} = \lambda_3 \frac{L_3}{d_3} \frac{8}{\pi^2 \cdot d_3^4 \cdot g}$$

Pe tronsonul BC este valabilă relația:

$$M_{B1C} \cdot Q_{B1C}^2 = M_{B2C} \cdot Q_{B2C}^2 = M_{BC} \cdot Q_{BC}^2$$

$$Q_{B1C} + Q_{B2C} = Q_{BC} = Q_{AB} = Q_{CD} = Q$$

$$\frac{1}{\sqrt{M_{BC}}} = \frac{\sqrt{M_{B1C}} + \sqrt{M_{B2C}}}{\sqrt{M_{B1C}} \cdot \sqrt{M_{B2C}}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{H}{M_{AB} + M_{BC} + M_{CD}}} \quad v_D = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_{CD}^2}$$

$$Q = 0,00787 \text{ m}^3/\text{s}$$

**4.3** Un rezervorul deschis alimentează sistemul de conducte din fig. 4.3. Se cunosc diametrele:  $D_1=300$  mm,  $D_2=250$  mm,  $D_3=400$  mm, lungimile conductelor:  $L_1=800$  m,  $L_2=500$  m,  $L_3=700$  m, diferențele de nivel  $H_1=42$  m,  $H_2=50$  m și coeficienții de pierderi  $\lambda_1=0,04$ ,  $\lambda_2=0,035$  și  $\lambda_3=0,025$ . Să se determine debitele pe tronsoanele 1 și 2 ale conductei.

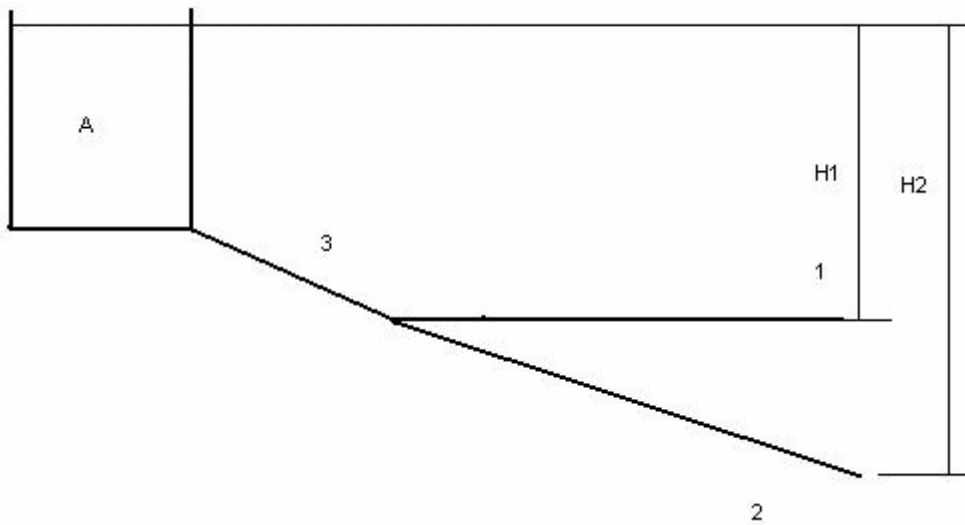


Fig. 4. 3

**REZOLVARE**

Modulele de rezistență sunt:

$$M_1 = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{8}{\pi^2 \cdot D_1^4 \cdot g}$$

$$M_2 = \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{8}{\pi^2 \cdot D_2^4 \cdot g}$$

$$M_3 = \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{8}{\pi^2 \cdot D_3^4 \cdot g}$$

Ecuția transferului energiei pe traseul A-3-1 este:

$$H_1 = M_3 \cdot Q_3^2 + M_1 \cdot Q_1^2$$

Ecuția transferului energiei pe traseul A-3-2 este:

$$H_2 = M_3 \cdot Q_3^2 + M_2 \cdot Q_2^2$$

Între debite există relația:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

Soluționând sistemul de ecuații, rezultă debitele:

$$Q_1 = 177 \text{ l/s}, Q_2 = 159 \text{ l/s} \text{ și } Q_3 = 336 \text{ l/s}.$$

**4.4** Pentru rețeaua inelară din fig. 4.4 se cunosc valorile debitelor în noduri:  $Q_a = 100 \text{ l/s}$ ,  $Q_{e2} = 10 \text{ l/s}$ ,  $Q_{e3} = 40 \text{ l/s}$ ,  $Q_{e4} = 50 \text{ l/s}$ . Să se determine repartizarea debitelor pe tronsoanele rețelei dacă se consideră, pentru a simplifica rezolvarea, că lungimile și modulele de rezistență sunt aceleași pentru fiecare tronson:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = M; \quad L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L$$

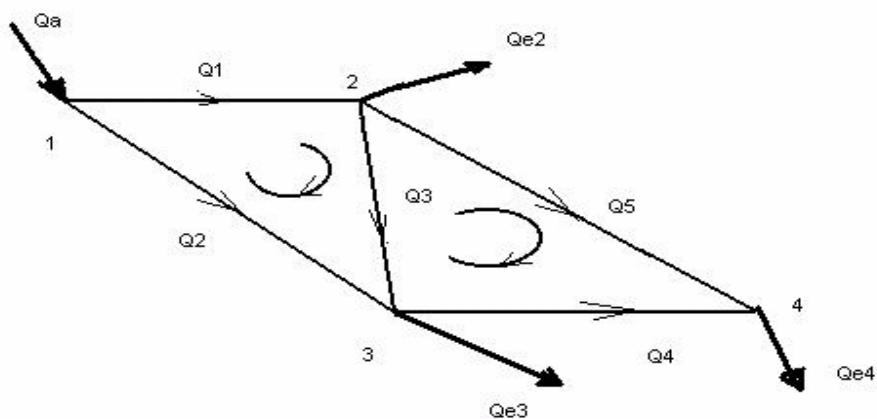


Fig. 4. 4.



**REZOLVARE**

Rețeaua este inelară, având  $B = 2$  bucle,  $N = 4$  noduri,  $T = 5$  tronsoane, numerotarea nodurilor, sensul de curgere impus și sensul convențional pozitiv acceptat sunt prezentate în fig.4.4

**Metoda analitică**

Aplicând ecuația transferului masei în noduri, rezultă ecuațiile:

$$Q_a = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = Q_{e2} + Q_3 + Q_5$$

$$Q_2 + Q_3 = Q_{e3} + Q_4$$

$$Q_5 + Q_4 = Q_{e4}$$

din care numai trei sunt independente. Condiția ca sumă algebrică a pierderilor pe fiecare buclă să fie nulă, conduce la:

$$Q_1^2 + Q_3^2 - Q_2^2 = 0$$

$$Q_5^2 - Q_4^2 - Q_3^2 = 0$$

Ecuațiile mai pot fi scrise sub forma:

$$(Q_1 + Q_2) \cdot (Q_1 - Q_2) = -Q_3^2$$

$$(Q_5 + Q_4) \cdot (Q_5 - Q_4) = Q_3^2$$

sau:

$$-Q_a \cdot (Q_1 - Q_2) = Q_3^2$$

$$Q_{e4} \cdot (Q_5 - Q_4) = Q_3^2$$

Egalând cele două expresii ale lui  $Q_3^2$  se obține:

$$Q_a \cdot (Q_1 - Q_2) = -Q_{e4} \cdot (Q_5 - Q_4)$$

Adunând și scăzând ecuațiile, rezultă:

$$Q_1 + Q_2 = Q_{e2} + Q_{e3} + Q_4 + Q_5$$

$$Q_1 - Q_2 = 2 \cdot Q_3 + Q_{e2} - Q_{e3} + Q_5 - Q_4$$

Se poate exprima:

$$Q_5 - Q_4 = -\frac{Q_a}{Q_{e4}} \cdot (Q_1 - Q_2)$$

$$-\frac{Q_a}{Q_{e4}} \cdot (Q_1 - Q_2) = (Q_1 - Q_2) - 2 \cdot Q_3 - Q_{e2} + Q_{e3}$$

Rezultă expresia lui  $Q_3$ :

$$Q_3 = \sqrt{Q_2^2 - Q_1^2} = \sqrt{Q_a \cdot (Q_2 - Q_1)}$$

Inlocuind se obține:

$$-\left(1 + \frac{Q_a}{Q_{e4}}\right) \cdot (Q_1 - Q_2) = Q_{e2} - Q_{e3} + 2 \cdot \sqrt{Q_a} \cdot \sqrt{Q_2 - Q_1}$$

Notând:  $\sqrt{Q_2 - Q_1} = u$  ecuația, devine:

$$\left(1 + \frac{Q_a}{Q_{e4}}\right) \cdot u^2 + 2 \cdot \sqrt{Q_a} \cdot u + Q_{e2} - Q_{e3} = 0$$

Soluția ecuației,  $u = 1,261$  conduce la :

$$Q_2 = 1,591 + Q_1$$

Înlocuind se obține:

$$Q_1 = 49,204 \text{ l/s}$$

cu care:  $Q_2 = 50,795 \text{ l/s}$

și:  $Q_3 = 12,613 \text{ l/s}$

Se poate determina:

$$Q_5 = 26,591 \text{ l/s}$$

$$Q_6 = 23,409 \text{ l/s}$$

### **Metoda aproximațiilor successive**

#### ***Aproximația inițială***

Se admite repartitia debitelor pe tronsoane, de exemplu:

Bucla I:

$$Q_1^0 = 40 \text{ l/s}$$

$$Q_2^0 = -60 \text{ l/s}$$

$$Q_3^0 = 10 \text{ l/s}$$

Bucla II:

$$Q_5^0 = 20 \text{ l/s}$$

$$Q_4^0 = -30 \text{ l/s}$$

$$Q_3^0 = -10 \text{ l/s}$$

Valorile sunt arbitrare, dar verifică, pentru fiecare nod, ecuația transferului masei, iar sensul este în concordanță cu sensul acceptat de parcurgere al buclilor.

Se calculează corecția pe fiecare bucla:

$$(\Delta Q^1)_I = \frac{M \cdot [(Q_1^0)^2 + (Q_3^0)^2 - (Q_2^0)^2]}{2 \cdot M \cdot (|Q_1^0| + |Q_3^0| + |Q_2^0|)}$$

$$(\Delta Q^1)_I = -8.636 \text{ l/s}$$

$$(\Delta Q^1)_{II} = \frac{M \cdot [(Q_5^0)^2 - (Q_4^0)^2 - (Q_3^0)^2]}{2 \cdot M \cdot (|Q_5^0| + |Q_4^0| + |Q_3^0|)}$$

$$(\Delta Q^1)_{II} = -5 \text{ l/s}$$

cu care se corectează debitele admise inițial:

$$Q_1^1 = Q_1^0 - (\Delta Q^1)_I = 48.636 \text{ l/s}$$

$$Q_2^1 = Q_2^0 - (\Delta Q^1)_I = -51.364 \text{ l/s}$$

$$(Q_3^1)_I = (Q_3^0)_I - (\Delta Q^1)_I + (\Delta Q^1)_{II} = 13.636 \text{ l/s}$$

$$(Q_3^1)_{II} = (Q_3^0)_{II} - (\Delta Q^1)_{II} + (\Delta Q^1)_I = -13.636 \text{ l/s}$$

$$Q_4^1 = Q_4^0 - (\Delta Q^1)_{II} = -25 \text{ l/s}$$

$$Q_5^1 = Q_5^0 - (\Delta Q^1)_{II} = 25 \text{ l/s}$$

***A doua aproximație:***

Cu valorile debitelor pe tronsoane rezultate din aproximația inițială, se calculează din nou corecțiile pe cele două bucle:

$$(\Delta Q^2)_I = \frac{M \cdot [(Q_1^1)^2 + (Q_3^1)^2 - (Q_2^1)^2]}{2 \cdot M \cdot (|Q_1^1| + |Q_3^1| + |Q_2^1|)}$$

$$(\Delta Q^2)_I = -0,382 \text{ l/s}$$

$$(\Delta Q^2)_{II} = \frac{M \cdot [(Q_5^1)^2 - (Q_4^1)^2 - (Q_3^1)^2]}{2 \cdot M \cdot (|Q_5^1| + |Q_4^1| + |Q_3^1|)}$$

$$(\Delta Q^2)_{II} = -1,461 \text{ l/s}$$

cu care rezultă a doua aproximație a debitelor pe tronsoane:

$$Q_1^2 = Q_1^1 - (\Delta Q^2)_I = 49,018 \text{ l/s}$$

$$Q_2^2 = Q_2^1 - (\Delta Q^2)_I = 50,982 \text{ l/s}$$

$$(Q_3^2)_I = (Q_3^1)_I - (\Delta Q^2)_I + (\Delta Q^2)_{II} = 12,557 \text{ l/s}$$

$$(Q_3^2)_{II} = (Q_3^1)_{II} - (\Delta Q^2)_{II} + (\Delta Q^2)_I = -12,557 \text{ l/s}$$

$$Q_4^2 = Q_4^1 - (\Delta Q^2)_{II} = -23,539 \text{ l/s}$$

$$Q_5^2 = Q_5^1 - (\Delta Q^2)_{II} = 26,461 \text{ l/s}$$

Procedând analog, după patru aproximații succesive se obține:

Prin metoda analitică:

$$Q_1=49,20 \text{ l/s}, Q_2=50,79 \text{ l/s}, Q_3=12,61 \text{ l/s}, Q_4=23,40 \text{ l/s}, Q_5=26,59 \text{ l/s}$$

Prin metoda aproximațiilor succesive:

$$Q_1=49,20 \text{ l/s}, Q_2=50,79 \text{ l/s}, Q_3=12,61 \text{ l/s}, Q_4=23,41 \text{ l/s}, Q_5=26,58 \text{ l/s}$$

4.3.2 Probleme propuse

4.5. Să se determine debitele pe tronsoane, pentru sistemul de conducte prezentat în fig.4.5. De cunosc:  $L_1=2,4$  km,  $D_1=60$  cm,  $\lambda_1=0,02$ ,  $L_2=1,2$  km,  $D_2=40$  cm,  $\lambda_2=0,028$ ,  $L_3=1,2$  km,  $D_3=30$  cm,  $\lambda_3=0,03$ .

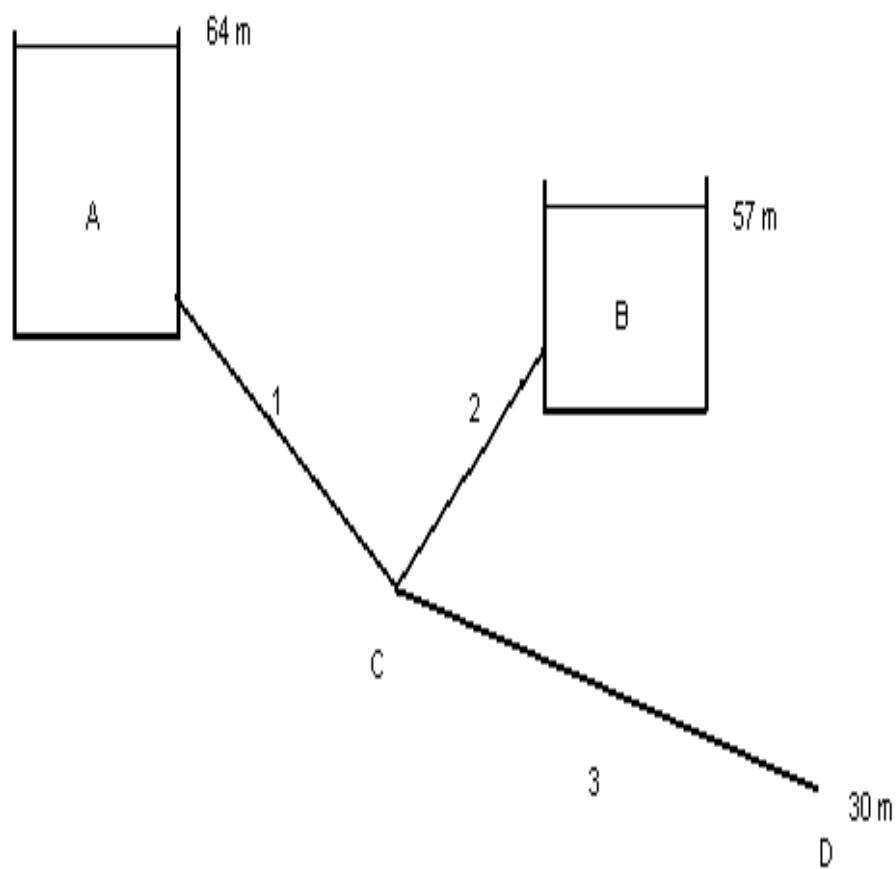


Fig. 4. 5

**R:  $Q_3=156$  l/s,  $Q_2=98$  l/s,  $Q_1=222$  l/s**

4.6. Să se calculeze debitul pentru sistemul de conducte din fig.4.6. Se cunosc:  $L_1=1,2$  km,  $D_1=50$  cm,  $\lambda_1=0,02$ ,  $L_2=2,4$  km,  $D_2=50$  cm,  $\lambda_2=0,028$ ,  $L_3=900$ m,  $D_3=60$  cm,  $\lambda_3=0,03$ ,  $L_4=1,8$  km,  $D_4=40$  cm,  $\lambda_4=0,02$ .

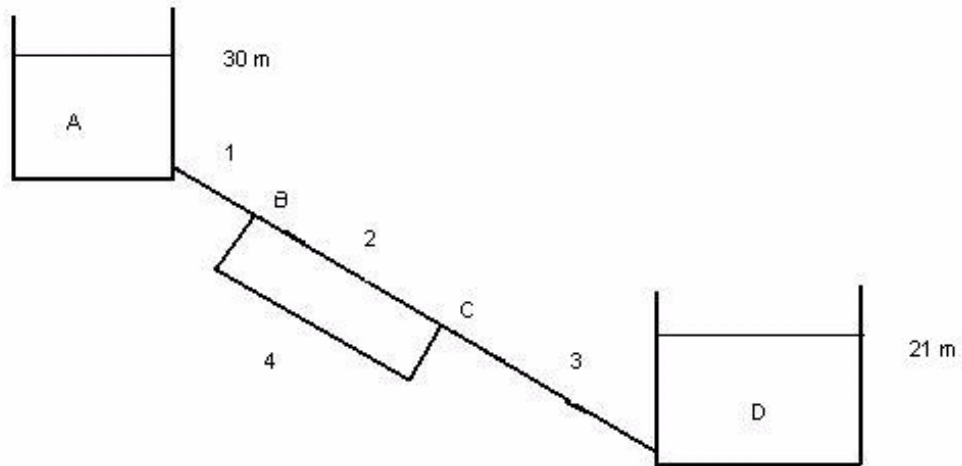


Fig. 4.6

**R: 190 l/s; 140 l/s; 50 l/s**

4.7. Pentru sistemul de conducte din fig.4.7 se cunosc: debitul total de apă ce se scurge din rezervorul A  $Q_A=380$  l/s și debitul de apă ce se scurge din rezervorul B  $Q_B=295$  l/s. Să se calculeze cota rezervorului B și lungimea conductei  $L_1$ . Se cunosc:  $D_1=60$  cm,  $\lambda_1=0,02$ ,  $L_2=1,8$  km,  $D_2=75$  cm,  $\lambda_2=0,028$ ,  $L_3=1,5$  km,  $D_3=50$  cm,  $\lambda_3=0,03$ ,  $L_4=4,5$  km,  $D_4=35$  cm,  $\lambda_4=0,03$ .

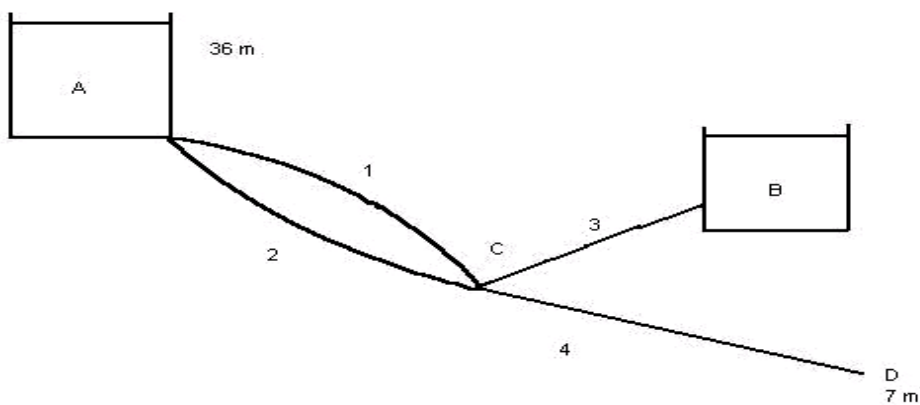


Fig. 4.7

**R:  $H_B=26,5$  m;  $L_1=7700$  m**

4.8. Se consideră o conductă alimentată la unul din capete de trei rezervoare, fig.4.8. Să se determine debitele pe fiecare tronson, cunoscând:  $L_{1,2}=600$  m,  $L_{2,3}=100$  m,  $L_{2,4}=150$  m,  $L_{2,5}=150$  m,  $D_{1,2}=250$  mm,  $D_{2,3}=100$  mm,  $D_{2,4}=150$  mm,  $D_{2,5}=200$  mm,  $z_1=0$ ,  $z_2=2$  m,  $z_3=28$  m,  $z_4=30$  m,  $z_5=29$  m.

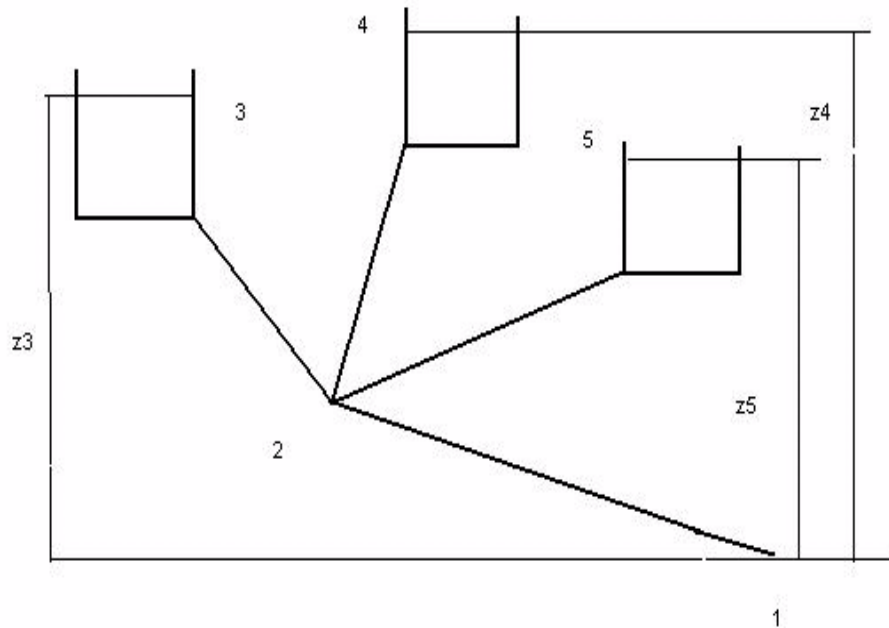


Fig. 4.8

R:  $Q_{2,3}=0,016$  m<sup>3</sup>/s;  $Q_{4,2}=0,042$  m<sup>3</sup>/s;  $Q_{5,2}=0,086$  m<sup>3</sup>/s;  $Q_{2,1}=0,145$  m<sup>3</sup>/s



## **CAPITOLUL 5**

### **TEOREMELE IMPULSULUI**

#### **NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE**

- $A, S$  – suprafața de control sau suprafața unei secțiuni, în  $[m^2]$ ,  
 $C_L, C_D$  – coeficienți de portanță, respectiv de rezistență la înaintare;  
 $c$  - viteza de propagare a undei de presiune (celeritate) în fluid, în  $[m/s]$ ,  
 $da$  – element unitar de arie, în  $[m^2]$ ,  
 $dVol$  - element unitar de volum, în  $[m^3]$ ,  
 $E$  – modul de elasticitate, în  $[N/m^2]$ ,  
 $\vec{f}$  = accelerația forțelor masice, în  $[m/s^2]$ ,  
 $\vec{F}_{L-P}$  - forța lichid-perete, în  $[N]$ ,  
 $g = 9,80665 [m/s^2]$  - accelerația gravitațională,  
 $\vec{G}_L$  - greutatea lichidului cuprins în volumul de control considerat, în  $[N]$ ,  
 $h_p$  – suma pierderilor locale și longitudinale, în  $[m]$ ,  
 $k$  – constantă de corecție, adimensională,  
 $m$  - masa, în  $[kg]$ ,  
 $M$  - moment, în  $[N \cdot m]$ ,  
 $n$  - turația, în  $[rot/min] = [rpm]$ ,  
 $p$  – presiune absolută, în  $[N/m^2] = [Pa]$ ,  
 $p_{at} = 101325 [Pa]$  – presiunea atmosferică,  
 $Q$  - debit volumic, în  $[m^3/s]$ ,  
 $R$  – raza cercului, în  $[m]$  sau constanta gazului, în  $[J/Kg \cdot ^0K]$ ,  
 $t$  – timpul, în  $[s]$  sau temperatura, în  $[^0C]$ ,  
 $T$  – temperatura, în  $[^0K]$ ,  
 $Vol$  – volumul de control, în  $[m^3]$ ,  
 $\vec{v}$  - viteza curentului de fluid, viteza absolută, în  $[m/s]$ ,  
 $x, y, z$  - coordonatele carteziene ale unui punct, în  $[m]$ ,  
 $\alpha$  - coeficient de neuniformitate a vitezei, pe o secțiune (diafragmă) – coeficientul energiei cinetice (coeficientul lui Coriolis),  
 $\beta$  – coeficient de neuniformitate a vitezei, pe o secțiune (diafragmă) - coeficientul impulsului (primul coeficient al lui Boussinesq),  
 $\gamma = \rho \cdot g$  - greutatea specifică, în  $[N/m^3]$ ,  
 $\eta$  - coeficientul (constitativ) de vâscozitate dinamică, în  $[Pa \cdot s]$ ,  
 $\nu$  - coeficientul (constitativ) de vâscozitate cinematică, în  $[m^2/s]$ ,  
 $\rho = 1000 [kg/m^3]$  - densitatea apei,  
 $\omega$  - viteza unghiulară, în  $[rad/s] = [s^{-1}]$ .

### 5.1. INTRODUCERE

În vederea calculului de rezistență al pieselor aflate în contact cu fluidul în mișcare este necesar a se cunoaște valoarea forțelor și momentelor exercitate de către acesta. Pentru determinarea acestora se folosesc teoremele impulsului. În cadrul acestui capitol vom calcula forțele ce apar la interacțiunea fluidului cu frontierele domeniului în care are loc mișcarea.

### 5.2. NOTIUNI TEORETICE

Pentru calculul forțelor exercitate de către fluidul în mișcare se folosește prima teoremă a impulsului, a cărei formă integrală, pentru mișcarea permanentă, este:

$$\int_S \rho \cdot \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot d\vec{a} = \int_{Vol} \rho \cdot \vec{f} \cdot dVol + \int_S \vec{t} \cdot d\vec{a} \quad (5.1)$$

Rezolvând integrala (5.1) în cazul curgerii permanente printr-un cot, se obține expresia forței lichid-perete:

$$\vec{F}_{L-P} = \rho \cdot Q_1 \cdot \beta_1 \cdot \vec{v}_1 - \rho \cdot Q_2 \cdot \beta_2 \cdot \vec{v}_2 - p_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot s_1 - p_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot s_2 + \vec{G}_L \quad (5.2)$$

Observație: pentru mișcarea laminară  $\beta = 4/3$ , iar pentru cea turbulentă  $\beta \cong 1$ .

În calcule se alege un sistem de axe de coordonate, relația (5.2) se proiectează pe aceste axe și se obțin componentele forței lichid-perete  $\vec{F}_{L-P}$  după aceste axe (fig.1).

În calcule, pe lângă relațiile de mai sus, se utilizează următoarele ecuații:

- ecuația de continuitate, care scrisă în curgerea permanentă, între două secțiuni (diafragme) are forma:

$$Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \quad (5.3)$$

- ecuația transferului de energie cinetică, care aplicată între două secțiuni, 1 și 2, are forma:

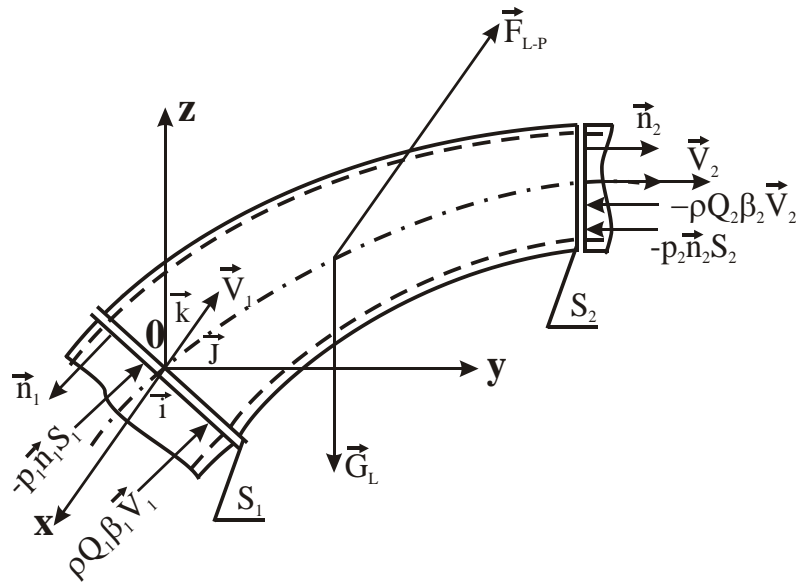
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + z_2 + h_{p1-2} \quad (5.4)$$

Observație: pentru mișcarea laminară  $\alpha$  are valori supraunitare, iar pentru mișcarea turbulentă se consideră  $\alpha \cong 1$ .

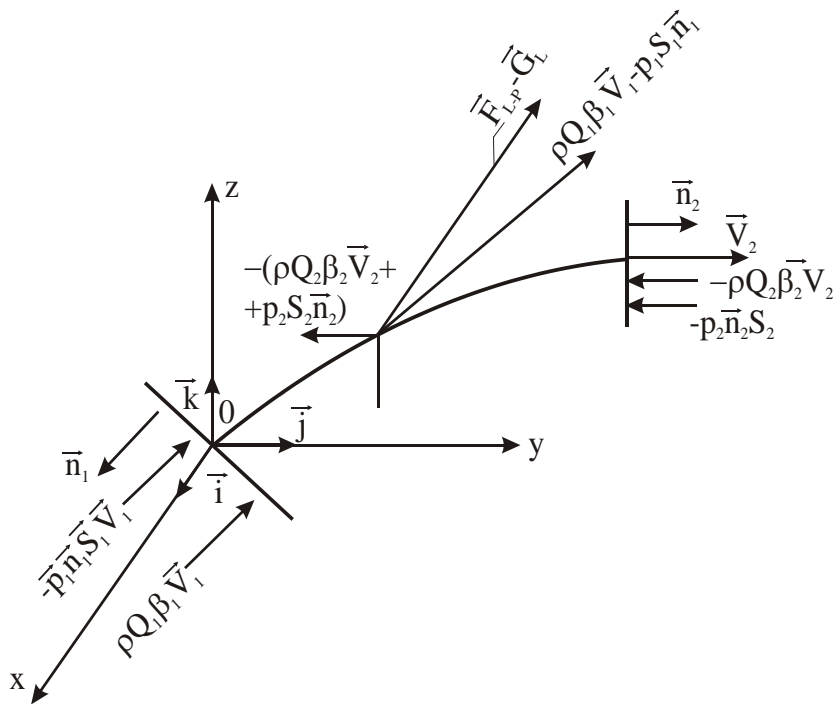
Toate mărimile din aceste ultime două relații se cunosc cu excepția termenului  $h_{p1-2}$ , care reprezintă pierderile hidraulice (locale și longitudinale) între cele două secțiuni, 1 și 2.

În cazul aerului, forța de portanță  $F_L$ , respectiv rezistență  $F_D$  ce acționează asupra unui corp aflat în mișcare, se calculează cu relația:

$$F_{L,D} = C_{L,D} \cdot \rho_{aer} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} \quad (5.5)$$



a. Componentele forței lichid-perete - situația reală



b. Schema de calcul a componentelor forței lichid-perete

Fig.1 Curgerea unui lichid prin conductă curbată

Această relație este valabilă și pentru lichide, atunci când se cunosc coeficienții de portanță  $C_L$ , respectiv de rezistență la înaintare  $C_D$ .

Suprapresiunea care apare la închiderea bruscă a unei vane, instalată pe o conductă care transportă lichid este:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot v. \quad (5.6)$$

Pentru conducte rigide, viteza de propagare a undei de presiune (celeritatea) are valoarea:

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (5.7)$$

iar pentru conducte elastice aceasta are valoarea este:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \cdot \frac{E}{E_0}}} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.8)$$

Tensiunea  $\sigma$ , ce apare în perete, datorită creșterii presiunii, este:

$$\sigma = \frac{\Delta p \cdot d}{2 \cdot \delta} \quad (5.9)$$

Pentru gaze, celeritatea se calculează cu relația:

$$c = \sqrt{k \cdot g \cdot R \cdot T} \quad (5.10)$$

în care  $k = 1,4$  și  $R = 29,3$  pentru aer.

### 5.3. APLICAȚII

#### 5.3.1 Probleme rezolvate

**5.1.** Să se determine coeficientul de corecție al cantității de mișcare  $\beta$  (coeficientul de neuniformitate al vitezei), dacă distribuția de viteze de-a lungul razei este verificată de ecuația  $v = v_{\max} \cdot (r_0^2 - r^2)/r_0^2$ , iar viteza medie are valoarea  $v_{\text{med}} = 0,5 \cdot v_{\max}$ .

#### REZOLVARE

Coeficientul  $\beta$ , se calculează cu relația:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{v}{v_{\text{med}}} \right)^2 \cdot dA$$

Cu datele din problemă, coeficientul  $\beta$  are valoarea:

$$\beta = \frac{1}{\pi \cdot r_0^2} \cdot \int_0^{r_0} \left( \frac{v_{\max} \cdot (r_0^2 - r^2) / r_0^2}{0.5 \cdot v_{\max}} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr =$$

$$= \frac{8}{r_0^6} \left( \frac{1}{2} \cdot r_0^6 - \frac{1}{2} \cdot r_0^6 + \frac{1}{6} \cdot r_0^6 \right) = \frac{8}{r_0^6} \cdot r_0^6 \cdot \frac{1}{6} = 4/3$$

$$\beta = 1,33.$$

**5.2.** Un jet de apă, cu diametrul  $d = 100$  mm, lovește o placă plană, menținută normal pe axa jetului (fig.5.2). Să se calculeze:

**a.** forța cu care trebuie acționat asupra plăcii, pentru a o menține în poziție verticală, dacă viteza jetului este de  $v_1 = 20$  m/s;

**b.** forța cu care trebuie acționat asupra plăcii, când acesta se deplasează cu o viteză de  $v_2 = 10$  m/s, în același sens cu jetul de apă;

**c.** forța cu care trebuie acționat asupra plăcii, când acesta se deplasează cu o viteză de  $v_3 = 10$  m/s, în sens contrar jetului de apă.

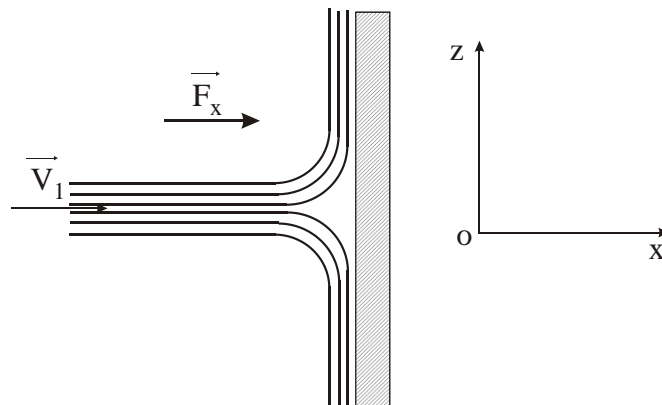


Fig.5.2 Jet de apă, care acționează perpendicular pe o placă verticală

### REZOLVARE

Se consideră sistemul de axe  $xOz$  (fig.5.2). Forța care apare este în direcția axei  $Ox$ , de valoare  $F_x$ . Particularizând relația (5.2)

$$d = 0.1 \text{ m}, v_1 = v_2 = v_3 = 10 \text{ m/s}, p_1 = p_2 = p_{at},$$

se obțin, pentru cele trei cazuri:

$$\text{a. } F_x = \rho \cdot Q \cdot v_1 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_1^2 = 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 20^2$$

$$F_x = 31416 \text{ N.}$$

$$\text{b. } F_x = \rho \cdot Q \cdot v_1 - \rho \cdot Q \cdot v_2 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (v_1^2 - v_2^2) = 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot (20^2 - 10^2)$$

$$F_x = 23562 \text{ N.}$$

$$c. F_x = \rho \cdot Q \cdot v_1 + \rho \cdot Q \cdot v_3 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (v_1^2 + v_3^2) = 1000 \cdot \frac{\pi \cdot 0.1^2}{4} \cdot (20^2 + 10^2)$$

$$F_x = 3927 \text{ N.}$$

**5.3.** O placă curbată, deviază un jet de apă cu un unghi  $\alpha = 45^\circ$  (fig.5.3). Știind că jetul are diametrul  $d = 100 \text{ mm}$  și viteza  $v = 40 \text{ m/s}$ , să se calculeze valoarea componentelor forței exercitate de jet asupra plăcii.

**REZOLVARE**

Se consideră sistemul de axe  $xOz$  (fig.5.3). Forța care apare are două componente: una în direcția axei  $Ox$ , de valoare  $F_x$  și alta în direcția axei  $Oz$ , de valoare  $F_z$ . Particularizând relația (5.2)

$d = 0.1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 40 \text{ m/s}$ ,  $p_1 = p_2 = p_{at}$ , se obține:

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_1 - \rho \cdot Q \cdot v_2 \cdot \cos \alpha = \rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_1^2 \cdot (1 - \cos \alpha) =$$

$$= 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 0.1^2}{4} \cdot 40^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$F_x = 36806 \text{ N.}$$

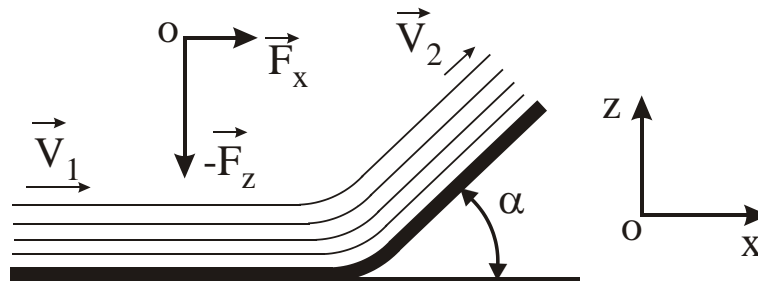


Fig.5.3 Deviația jetului de placa curbată

$$F_z = -\rho \cdot Q \cdot v_2 \cdot \sin \alpha = -\rho \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot v_1^2 \cdot \sin \alpha = -10^3 \cdot \frac{\pi \cdot 0.1^2}{4} \cdot 40^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_z = -8885,7 \text{ N.}$$

**5.4.** Jetul de apă care lovește o placă așezată în plan orizontal (fig.5.4), este divizat în două astfel încât, cele două debite deviate sunt egale:  $Q_{21} = Q_{22} = 30 \text{ l/s}$ . Viteza inițială a jetului este de  $v_1 = 15 \text{ m/s}$ . Să se afle forța cu care jetul lovește placa și unghiul  $\alpha$  cu care acesta acționează pe placă, față de axa  $Ox$ .

**REZOLVARE**

Se consideră sistemul de axe  $xOy$  (fig.5.4). Forța care apare are două componente: una în direcția axei  $Ox$ , de valoare  $F_x$  și alta în direcția axei  $Oy$ , de valoare  $F_y$ , date de jetul de apă deviat de porțiunea de placă înclinat cu un unghi de  $60^\circ$  față de axa  $Ox$ . Jetul de apă de pe porțiunea de placă paralelă cu axa  $Oy$ , alunecă în lungul acesteia. În relația (5.2):  $Q_{21} = Q_{22} = 30 \text{ l/s}$ ,  $Q_1 = Q_{21} + Q_{22} = 60 \text{ l/s}$ ,  $p_1 = p_2 = p_{at}$ ,  $v_1 = v_{21} = v_{22} = 15 \text{ m/s}$ . Cele două componente ale forței, sunt  $F_x$ ,  $F_y$ :

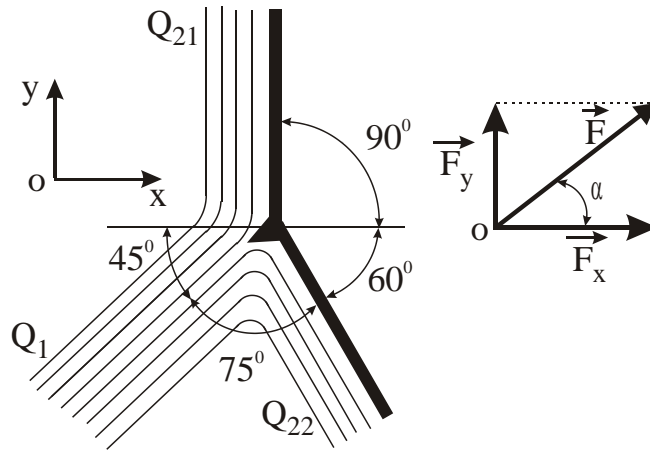


Fig.5.4 Deviația jetului în părți egale de placa așezată în plan horizontal

$$F_x = \rho \cdot Q_1 \cdot v_1 \cdot \sin 45^\circ - \rho \cdot Q_{22} \cdot v_{22} \cdot \cos 60^\circ$$

$$F_x = 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_x = 411,4 \text{ N.}$$

$$F_y = \rho \cdot Q_1 \cdot v_1 \cdot \cos 45^\circ - \rho \cdot Q_{22} \cdot v_{22} \cdot \sin 60^\circ$$

$$F_y = 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_y = 318,2 \text{ N.}$$

Forța  $F$  cu care jetul lovește placa are valoarea  $F$ :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{411,4^2 + 318,2^2}$$

$$F = 520,097 \text{ N}$$

care acționează sub un unghi  $\alpha$ , față de axa  $Ox$ , dat de relația  $\operatorname{tg} \alpha = F_y / F_x$ , din care rezultă:

$$\alpha = 37^\circ 43'$$

**5.5.** O placă curbată (fig.5.5.a), se deplasează în același sens cu jetul. Viteza plăcii este  $v_p = 20$  m/s, iar cea a jetului este  $v_j = 30$  m/s. Diametrul jetului înainte de lovirea plăcii este  $d = 100$  mm. Să se afle forța cu care jetul lovește placa și unghiul  $\beta$  cu care acesta acționează, față de axa Ox.

**REZOLVARE**

Debitul jetului este:  $Q = S \cdot v_j = \pi \cdot d^2 / 4 \cdot v_j = \pi \cdot 0,1^2 / 4 \cdot 30$

$Q = 0,236$  m<sup>3</sup>/s

Pe placa curbată, viteza jetului este  $v_1$ :

$$v_1 = v_j - v_p = 30 - 20$$

$$v_1 = 10 \text{ m/s}$$

Viteza  $v_2$  a jetului la ieșirea de pe placa curbată, este egală cu viteza  $v_1$ .

Dar, placa curbată are o viteză  $v_p = 20$  m/s, în direcția jetului. Prin urmare, jetul iese de placa curbată, cu viteza relativă  $v_{2-p}$  (fig.5.5.b).

Cum viteza  $v_2$  este tangentă la ieșirea de pe placa curbată sub unghiul  $\alpha$ , proiecția acesteia pe direcția vitezei  $v_p$ , este  $v_{2x}$ :

$$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \cos 30^\circ$$

$$v_{2x} = 8,66 \text{ m/s}$$

Astfel, proiecția vitezei  $v_{2-p}$  la ieșirea apei de pe placa curbată, după direcția x, este  $v_{2xr}$ :  $v_{2xr} = v_p - v_{2x} = 20 - 8,66$

$$v_{2xr} = 11,339 \text{ m/s}$$

iar după axa z:  $v_{2z} = v_2 \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin 30^\circ$

$$v_{2z} = 5 \text{ m/s.}$$

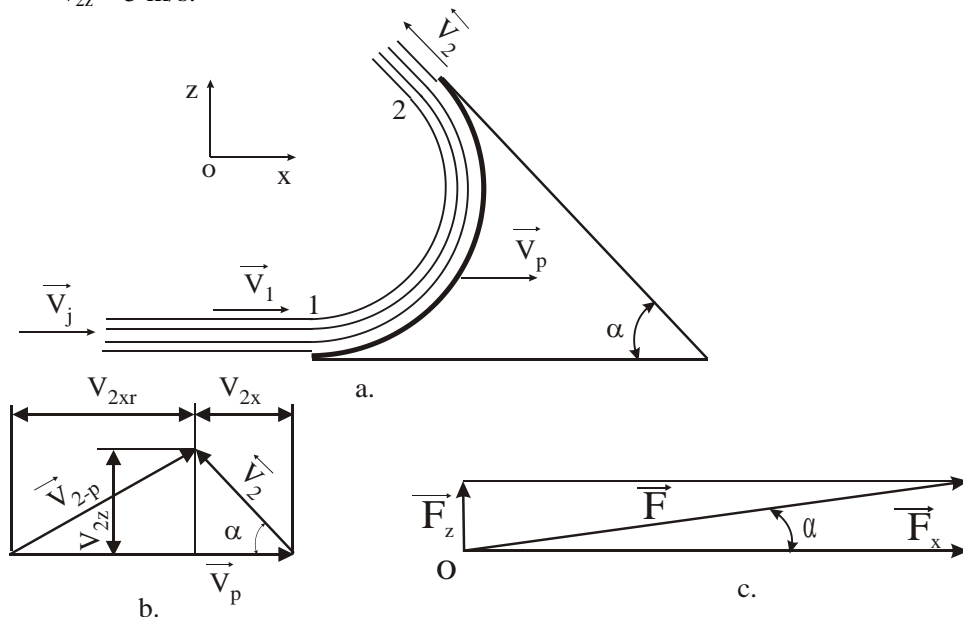


Fig.5.5 Deviația jetului cu unghiul  $\alpha$  de placa curbată aflată în mișcare



Valorile forțelor  $F_x$  după direcția x și  $F_z$  după direcția z, cu care acționează apa asupra plăcii curbate, conform relației (5.2) – cu precizările de mai sus, au valorile:

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_j - \rho \cdot Q \cdot v_{2xr} = \rho \cdot Q \cdot (v_j - v_{2xr}) = 1000 \cdot 0,236 \cdot (30 - 11,339)$$

$$F_x = 4404 \text{ N}$$

$$F_z = \rho \cdot Q \cdot v_{2z} = 1000 \cdot 0,236 \cdot 5$$

$$F_z = 1180 \text{ N}$$

Forța F, cu care lovește jetul de apă suprafața curbată, are valoarea:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{1180^2 + 4404^2}$$

$$F = 45559,34 \text{ N}$$

Unghiul  $\beta$ , dintre axa orizontală și direcția forței F, este:

$$\beta = \arctg(F_z / F_x) = \arctg(1180 / 4404)$$

$$\beta = 15^\circ$$

**5.6.** Jetul de apă (fig.5.6.a) acționează asupra unei palete de turbină Pelton. Viteza jetului este  $v_j = 15 \text{ m/s}$ , iar viteza periferică a paletelor este  $v_p = 6 \text{ m/s}$ . Să se calculeze:

- valoarea unghiului  $\alpha_0$  (de intrare a jetului pe paletă), pentru ca jetul să fie tangent la paletă (intrare fără șoc), dacă valoarea unghiului  $\alpha_1 = 40^\circ$ ;
- puterea produsă de paletă, dacă debitul jetului are valoarea  $Q = 150 \text{ l/s}$  și ieșirea jetului de pe palete, se face fără șoc, sub un unghi de valoare  $\alpha_2 = 45^\circ$ ;
- randamentul paletelor.

### REZOLVARE

a) Deoarece intrarea jetului se face pe o suprafață curbată în mișcare (paletă de turbină Pelton), unghiul  $\alpha_0$  de intrare fără șoc a jetului, trebuie să fie mai mic decât cel de intrare pe suprafața paletei  $\alpha_1$ . Cu datele din problemă, se scrie sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute, x, y,  $\alpha_0$  (fig.5.6.b):

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 = (v_p + x) / v_j \\ \sin \alpha_0 = y / v_j \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = y / x \end{cases} .$$

Eliminând necunoscutele x și y, se obține ecuația trigonometrică în  $\alpha_0$ :

$$\cos \alpha_0 - 1,192 \cdot \sin \alpha_0 - 0,4 = 0,$$

a cărei rezolvare conduce la determinarea unghiului  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = 25^\circ 5'$$

b) Puterea P (utilă) dezvoltată pe paletă, este dată de relația:

$$P = F_x \cdot v_p,$$

unde  $F_x$  este forța după direcția axei Ox dezvoltată de jet pe paletă, care se determină prin particularizarea relației (5.2):  $p_1 = p_2 = p_{at}$ ,  $Q_1 = Q_2 = Q$ ,  $|\vec{F}_{L-P}|_x = F_x$ ,  $|\vec{v}_1|_x = v_j$ ,  $|\vec{v}_2|_x = v_{2x}$ ,  $|\vec{G}_L|_x = 0$ . Astfel:

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_j \cdot \cos \alpha_0 - (-\rho \cdot Q \cdot v_{2x}).$$

Pentru determinarea vitezei  $v_{2x}$ , trebuie determinată viteza jetului pe paletă,  $v_l$ .  
Din fig. 5.6.b, rezultă:

în triunghiul OBA:  $y = v_j \cdot \sin \alpha_0 = 15 \cdot \sin(25,08) = 6,358 \text{ m/s}$

în triunghiul ABC:  $v_l = y / (\sin \alpha_1) = 6,358 / \sin 40 = 9,89 \text{ m/s}$

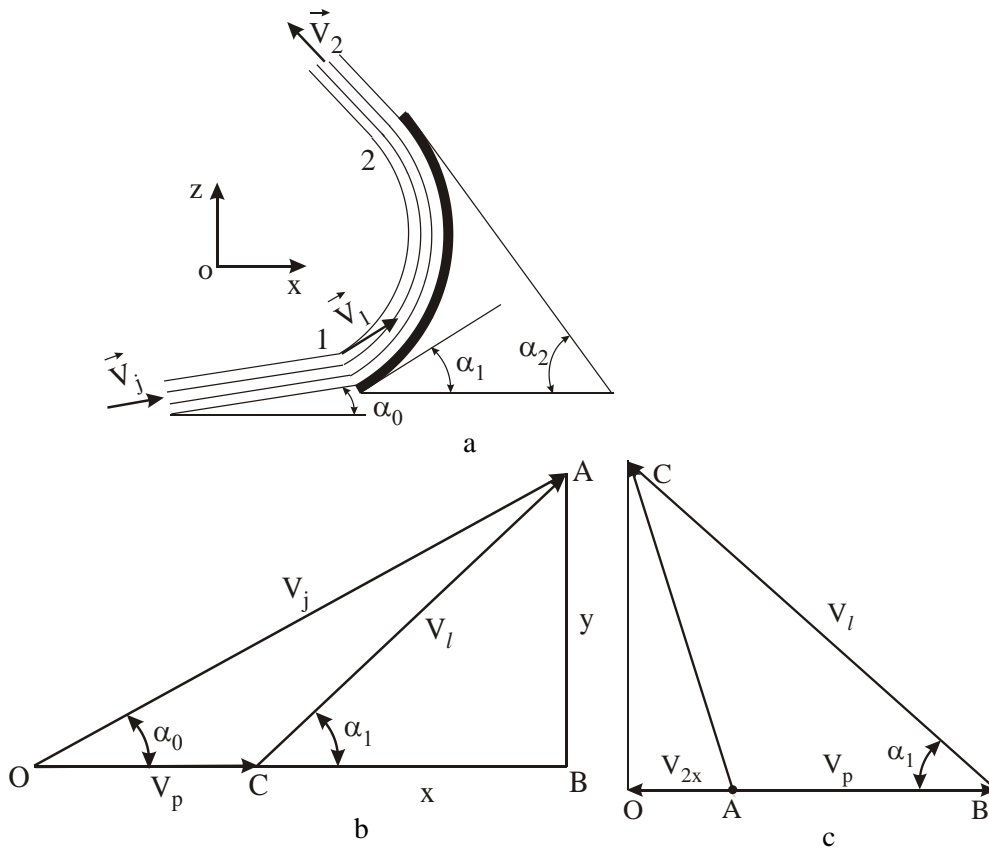


Fig.5.6 Paleta de turbină Pelton, sub acțiunea jetului de apă

Din fig.5.6.c, din triunghiul OBC rezultă:

$$OB = v_l \cdot \cos \alpha_2 = 9,89 \cdot \cos 45 \text{ m/s și astfel } OA = v_{2x} = OB - OA = 6,99 - 6$$

respectiv:

$$v_{2x} = 0,99 \text{ m/s.}$$

Forța  $F_x$  este:

$$F_x = 10^3 \cdot 0,15 \cdot 15 \cdot \cos(25,08) + 10^3 \cdot 0,15 \cdot 0,99$$

$$F_x = 2186,36 \text{ N}$$

Și puterea  $P$  este:  $P = 2186,36 \cdot 6$

$$P = 13118 \text{ W.}$$

c) Randamentul  $\eta$  este dat de relația:

$$\eta = P/P_j$$

unde  $P_j$  este puterea dezvoltată de jet.

Pentru a determina  $P_j$ , se scrie energia cinetică a jetului  $E_j$ , la intrare:

$$E_j = m \cdot v_j^2 / 2 = \rho \cdot \text{Vol} \cdot v_j^2 / 2.$$

Variația energiei în timp, conduce la determinarea puterii; cum  $Q = \text{Vol}/t$ , puterea la intrare a jetului va fi:

$$P_j = \rho \cdot Q \cdot v^2 / 2 = 10^3 \cdot 0,15 \cdot 15^2 / 2 = 16,875 \text{ W.}$$

Astfel că, randamentul paletelor va fi:  $\eta = 13118/16875$

$$\eta = 77,7 \text{ \%}.$$

**5.7.** Să se afle componentele forței hidrodinamice, după axele  $0_x$  și  $0_y$ , cu care uleiul mineral, de densitate  $\rho_u = 800 \text{ kg/m}^2$ , acționează asupra tronsonului de conductă curb (fig.5.7), dispus într-un tunel hidrodinamic în plan orizontal. Se cunosc: debitul vehiculat prin tunel  $Q = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ , diametrele la intrare  $d_1 = 200 \text{ mm}$  și la ieșire  $d_2 = 150 \text{ mm}$ , presiunea uleiului la intrare în tronson  $p_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  și unghiul  $\alpha = 60^\circ$ . Se neglijează prinderile hidraulice și greutatea uleiului din tronson.

### **REZOLVARE**

Considerăm volumul de control - reprezentat cu linie punctată în fig. 5.7.a. Atașăm tronsonului din fig. 5.7.a., schema simplificată din fig. 5.7.b. Forța hidrodinamică este dată de relația 5.2.

Se exprimă fiecare vector din această relație în funcție de versorii sistemului de axe ales. Se obține:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= -\vec{j} \\ \vec{n}_2 &= \vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha \\ \vec{v}_1 &= v_1 \vec{j} \\ \vec{v}_2 &= v_2 \cdot (\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha) \end{aligned}$$

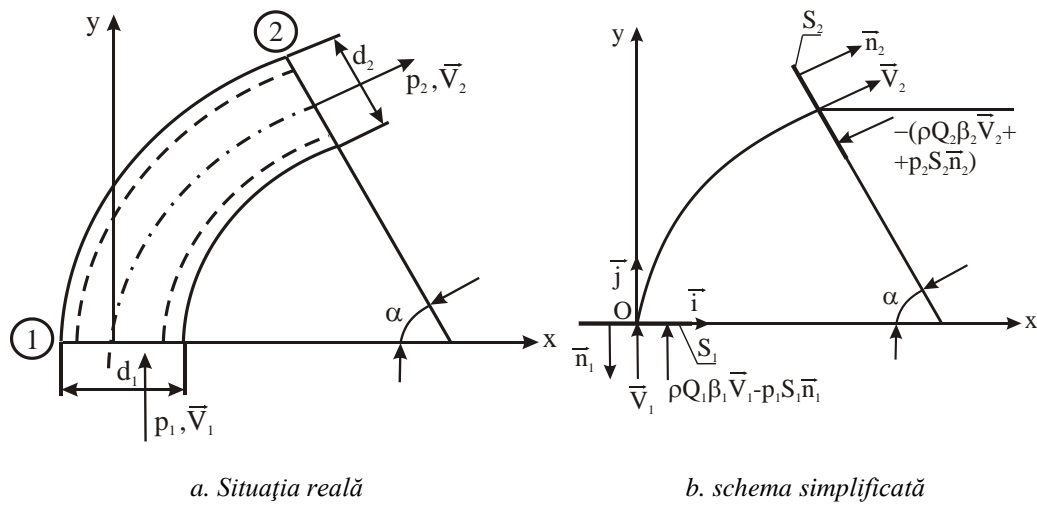


Fig.5.7. Tronson curbat cu unghiul  $\alpha$ , prin care circulă ulei mineral

Din ecuația de continuitate rezultă:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{Q}{s_1} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{\pi \cdot 0,2^2} = 1,591 \text{ m/s} \\ v_2 &= \frac{Q}{s_2} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_2^2} = \frac{4 \cdot 0,05}{\pi \cdot 0,1^2} = 2,829 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Se aplică ecuația transferului de energie cinetică (5.4) între secțiunea (1) și (2), în care pierderile hidraulice sunt  $h_{p1-2} = 0$ . Se obține:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + z_2$$

Cum tronsonul este în plan orizontal avem:  $z_1 = z_2$ .

Considerând  $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv 1$ , din ecuația transferului de energie cinetică se obține:

$$p_2 = \gamma \cdot \left( \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} \right) = \rho_u \cdot g \cdot \left( \frac{p_1}{\rho_u \cdot g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} \right)$$

$$p_2 = 800 \cdot 9,80665 \cdot \left( \frac{5 \cdot 10^4}{800 \cdot 9,80665} + \frac{(1,591)^2 - (2,829)^2}{2 \cdot 9,80665} \right)$$

$$p_2 = 4,7811 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

Proiectând relația (5.2) pe axele de coordonate se obține:

$$(F_{L-P})_x = -\rho \cdot Q \cdot \beta_2 \cdot v_2 \cdot \sin \alpha - p_2 \cdot s_2 \cdot \sin \alpha$$

$$(F_{L-P})_y = \rho \cdot Q \cdot \beta_1 \cdot v_1 - \rho \cdot Q \cdot \beta_2 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha + p_1 \cdot s_2 - p_2 \cdot s_2 \cdot \cos \alpha$$

Considerând  $\beta_1 = \beta_2 \approx 1$ , se obțin componentele forței  $F_{L-P}$ :

$$(F_{L-P})_x = -800 \cdot 0,05 \cdot 2,829 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4,7811 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(F_{L-P})_x = 839,68 \text{ N}$$

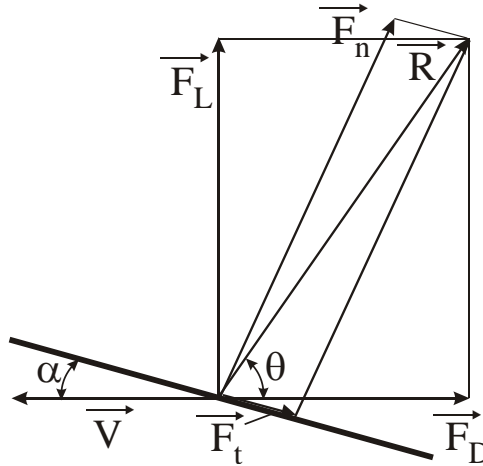
$$(F_{L-P})_y = 800 \cdot 0,05 \cdot 1,591 - 800 \cdot 0,05 \cdot 2,829 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} -$$

$$- 4,7811 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$(F_{L-P})_y = 112678 \text{ N}$$

**5.8.** O placă plană, de suprafața dreptunghiulară de  $1,2 \times 0,6 \text{ m}^2$ , se deplasează prin aer ( $\rho_{\text{aer}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ) cu viteza  $v = 12 \text{ m/s}$  (fig.5.8). Placa face un unghi  $\alpha = 12^\circ$ , cu direcția de deplasare. Știind că valorile coeficienților de rezistență și portanță sunt  $C_D = 0,17$ , respectiv  $C_L = 0,72$ , să se calculeze:

- rezultanta forțelor exercitate de aer asupra plăcii și unghiul  $\theta$  pe care îl face aceasta cu direcția forței rezultante;
- forța de rezistență datorată frecării;
- puterea necesară realizării mișcării plăcii.

Fig.5.8 Deplasarea plăcii dreptunghiulare în aer, sub un unghi  $\alpha$ **REZOLVARE**

a. Cele două forțe, de portanță, respectiv de rezistență, sunt date de relația 5.5 (fig.5.8). Acestea au valorile:

$$F_D = C_D \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} = 0,17 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{12^2}{2}$$

$$F_D = 10,6 \text{ N}$$

$$F_L = C_L \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} = 0,72 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{12^2}{2}$$

$$F_L = 44,8 \text{ N}$$

Astfel, forța rezultantă R, ce acționează pe placă, este:

$$R = \sqrt{F_D^2 + F_L^2} = \sqrt{10,6^2 + 44,8^2}$$

$$R = 46,08 \text{ N}$$

Unghiul  $\theta$  (fig.5.8), este dat de relația:

$$\text{tg} \theta = \frac{F_L}{F_D} = \frac{44,8}{10,6} = 4,23$$

$$\theta = \arctg 4,23 = 76,68^\circ = 76^\circ 40' 5''$$

b. Forța de rezistență  $F_t$ , apare în lungul plăcii. Pentru a o determina, se calculează unghiul  $\alpha + \theta$  (fig.5.8):

$$\alpha + \theta = 6 + 76,68 = 82,68^{\circ}$$

și forța de rezistență are valoarea:

$$F_t = R \cdot \cos(\alpha + \theta) = 46,68 \cdot 0,127$$

$$F_t = 5,9 \text{ N}$$

c. Puterea P, necesară deplasării plăcii, trebuie să învingă forța de rezistență. Aceasta este dată de relația:

$$P = F_D \cdot v = 10,6 \cdot 12$$

$$P = 127,2 \text{ W.}$$

**3.9.** Un profil de aripă, având suprafața  $S = 40 \text{ m}^2$ , se deplasează prin aer cu viteza  $v = 25 \text{ m/s}$ , sub un unghi de atac  $\alpha_0 = 6^{\circ}$ . Știind că variația coeficientului de rezistență  $C_D$  este liniară cu unghiul de atac  $\alpha$  ( $C_R = 0,04$  pentru  $\alpha = 4^{\circ}$  și  $C_R = 0,12$  pentru  $\alpha = 14^{\circ}$ ), iar coeficientul de portanță al profilului are valoarea  $C_L = 0,70$ , pentru  $\alpha_0 = 6^{\circ}$ , să se calculeze:

- puterea necesară realizării mișcării;
- portanța profilului;
- numerele Reynolds și Mach, dacă lungimea corzii este  $l = 1,5 \text{ m}$ .

Se cunosc: densitatea aerului  $\rho_{\text{aer}} = 1,125 \text{ kg/m}^3$  și vâscozitatea cinematică a acestuia  $\nu_{\text{aer}} = 1,77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

### REZOLVARE

a. Pentru a determina puterea necesară realizării mișcării, trebuie determinat coeficientul de rezistență  $C_D$ , pentru unghiul de atac  $\alpha_0 = 6^{\circ}$ . În acest scop, se construiește diagrama  $C_D = C_D(\alpha)$ , funcție de datele problemei (fig.5.9).

În această diagramă se calculează ecuația dreptei CD. Aceasta este:

$$5 \cdot C_D - 0,004 \cdot \alpha - 0,04 = 0 \text{ (ecuația unei drepte prin două puncte),}$$

din care pentru  $\alpha_0 = 6^{\circ}$ , rezultă  $C_{D_0} = 0,056$ .

Astfel că forța ce trebuie învinsă de aripă, este (ecuația 5.5):

$$F_D = C_{D_0} \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} = 0,056 \cdot 1,125 \cdot 40 \cdot 25^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_D = 787,7 \text{ N}$$

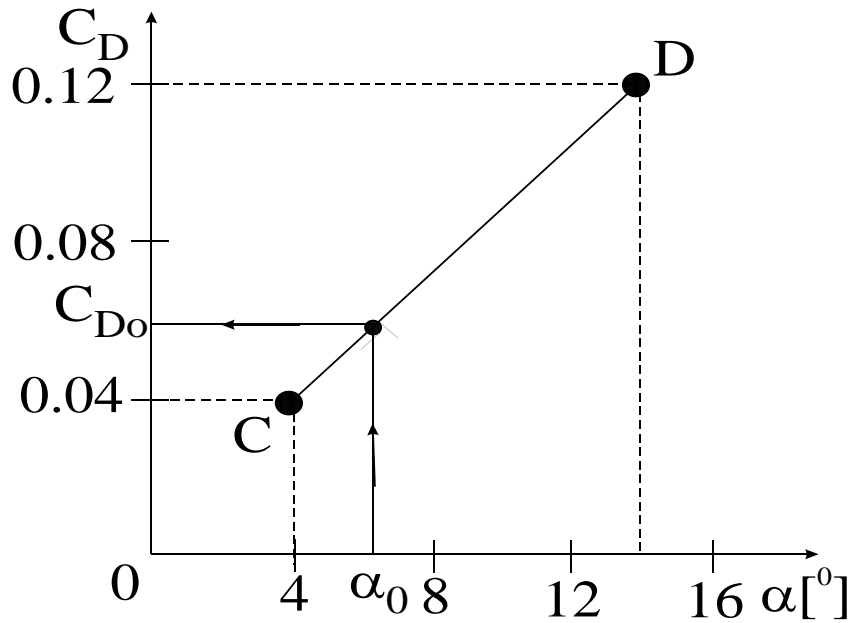


Fig. 5.9 Variația coeficientului de rezistență  $C_D$ , funcție de unghiul de incidență  $\alpha$

Cunoscând forța rezistentă, puterea necesară realizării mișcării, este:

$$P = F_D \cdot v = 787,5 \cdot 23$$

$$P = 19687,5 \text{ W}$$

b. Conform relației 3.5, portanța profilului este:

$$F_L = C_L \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} = 0,7 \cdot 1,125 \cdot 40 \cdot 25^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_L = 984375 \text{ N}$$

c. Conform relațiilor din literatură, numerele  $Re$  și  $Ma$ , sunt date de relațiile:

$$Re = v \cdot l / \nu \quad Ma = v / c$$

Deci, valorile acestor numere, sunt:

$$Re = 25 \cdot 1,5 / (1,77 \cdot 10^{-6}) = 21,186 \cdot 10^6 \quad \text{și}$$

$$Ma = 25 / 340 = 0,07353$$

**3.10.** O aripă de avion cu suprafața  $S = 50 \text{ m}^2$ , este expusă normal pe direcția unui curent de aer, cu densitatea  $\rho_{\text{aer}} = 1,125 \text{ kg/m}^3$ . Viteza avionului este de 16 km/oră. Să se calculeze forța rezultantă  $R$ , ce acționează asupra aripii, atunci când:

a) aripa este imobilă,  $v_{\text{pal}} = 0$ ; se cunoaște  $C_D = 1,30$ ;

b) aripa se deplasează cu viteză  $v_{\text{ar}} = 45 \text{ km/oră}$ , perpendicular pe direcția curentului de aer (fig.5.10.a), având:  $C_D = 0,25$  și  $C_L = 0,60$ .



**REZOLVARE**

a. Dacă aripa de avion este imobilă, nu există portanță. Forța rezultantă, se confundă atunci cu cea de rezistență. Astfel, forța rezultantă este:

$$R = F_D = C_D \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v^2}{2} = 1,3 \cdot 1,125 \cdot 50 \cdot \left(16 \cdot \frac{1000}{3600}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$R = 722,2 \text{ N}$$

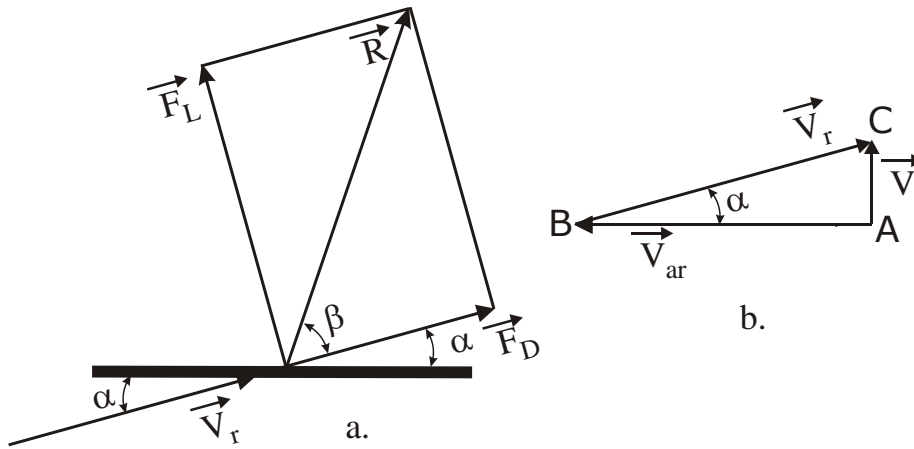


Fig.3.10 Aripă de avion expusă normal pe viteza vântului

b. Dacă aripa de avion este în mișcare, există portanță. În triunghiul vitezelor (fig.5.10.b), între viteza relativă  $v_r$ , viteza curentului  $v$  și cea de deplasare a aripii  $v_{ar}$ , există relația vectorială:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_{ar}$$

Dar viteza curentului este perpendiculară pe cea a aripii, deci triunghiul ABC este dreptunghic și se poate scrie relația:

$$v_r = \sqrt{v^2 + v_{ar}^2} = \sqrt{16^2 + 45^2}$$

$$v_r = 47,8 \text{ Km/h} = 13,3 \text{ m/s}$$

Unghiul  $\alpha$ , dintre viteza aripii și cea relativă este:

$$\alpha = \arctg \frac{v}{v_{ar}} = \frac{16}{45} = 0,3556$$

$$\alpha = 19,6^\circ$$

Cele două forțe, de rezistență și portanță, sunt:

$$F_D = C_D \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v_r^2}{2} = 0,25 \cdot 1,125 \cdot 50 \cdot 13,3^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_D = 1240 \text{ N}$$

$$F_L = C_L \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot \frac{v_r^2}{2} = 0,6 \cdot 1,125 \cdot 50 \cdot 13,3^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$F_L = 2985 \text{ N}$$

Forța rezultantă R, este:

$$R = \sqrt{F_D^2 + F_L^2} = \sqrt{1240^2 + 2985^2}$$

$$R = 3232 \text{ N}$$

Unghiul  $\beta$ , dintre forța rezultantă și direcția vitezei relative este:

$$\beta = \arctg \frac{F_L}{F_D} = \arctg \frac{2985}{1240} = \arctg 2,407$$

$$\beta = 67,4^{\circ}$$

Unghiul  $\gamma$ , dintre forța rezultantă și aripă este:

$$\gamma = \alpha + \beta = 19,6 + 67,4$$

$$\gamma = 87^{\circ}$$

**5.11.** Un om având masa  $m = 80 \text{ kg}$ , sare dintr-un avion cu parașuta. Parașuta are diametrul  $d = 5,5 \text{ m}$  și masa  $m_{\text{par}} = 10 \text{ kg}$ . Considerând că valoarea coeficientului de rezistență este  $C_D = 1$  și densitatea aerului  $\rho_{\text{aer}} = 1,2 \text{ Kg/m}^3$ , să se determine viteza minimă de coborâre.

**REZOLVARE**

La limită, este necesar ca parașuta să echilibreze greutatea omului și a parașutei, G. Prin cădere, parașuta întâmpină o rezistență  $F_D$ . Are loc egalitatea:

$$G = F_D$$

adică,  $(m + m_{\text{par}}) \cdot g = C_D \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S \cdot v_{\text{min}}^2 / 2$ .

Egalitate din care se calculează viteza minimă,  $v_{\text{min}}$ :

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{2(m + m_{\text{par}}) \cdot g}{C_D \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (80 + 10) \cdot 9,80665}{1 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot 5,5^2 / 4}}$$

$$v_{\text{min}} = 7,868 \text{ m/s}.$$

**5.12.** Printr-o țevă lungă și rigidă, având diametrul  $d = 30$  cm, curge cu aceeași viteză  $v = 1,2$  m/s, succesiv: apă la temperatura  $t = 15^{\circ}\text{C}$  ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 206 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>), glicerină la temperatura  $t_{gl} = 20^{\circ}\text{C}$  ( $\rho_{gl} = 1262$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_{gl} = 443,5 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>) și ulei la temperatura  $t_u = 18^{\circ}\text{C}$  ( $\rho_u = 800$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_u = 141 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>). Curgerea se întrerupe brusc. Se cere:

- să se compare vitezele undelor de presiune;
- să se compare creșterile de presiune.

### REZOLVARE

**a.** Viteza undei de presiune se calculează din relația (5.7), relație care se aplică pentru cele trei lichide. Se obține succesiv:

- pentru apă:  $c = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{206 \cdot 10^7 / 10^3}$   
 $c = 1435,27$  m/s
- pentru glicerină:  $c = \sqrt{E_{gl}/\rho_{gl}} = \sqrt{443,5 \cdot 10^7 / 1262}$   
 $c = 1878,8$  m/s
- pentru ulei:  $c = \sqrt{E_u/\rho_u} = \sqrt{141 \cdot 10^7 / 800}$   
 $c = 1327,5$  m/s

Se obține următoarea relație de inegalitate:

$$c_u < c < c_{gl}$$

**b.** Creșterea de presiune, este dată de relația (5.6), relație care se aplică pentru cele trei lichide. Se obține succesiv:

- pentru apă:  $\Delta p = \rho \cdot c \cdot v = 10^3 \cdot 1435,27 \cdot 1,2$   
 $\Delta p = 1722,32 \cdot 10^3$  Pa
- pentru glicerină:  $\Delta p_{gl} = \rho_{gl} \cdot c_{gl} \cdot v_{gl} = 1262 \cdot 1878,8 \cdot 1,2$   
 $\Delta p = 2845,25 \cdot 10^3$  Pa
- pentru ulei:  $\Delta p = \rho_u \cdot c_u \cdot v_u = 800 \cdot 1327,5 \cdot 1,2$   
 $\Delta p = 1274,4 \cdot 10^3$  Pa

Se obține următoarea relație de inegalitate:

$$\Delta p_u < \Delta p < \Delta p_{gl}$$

**5.13.** O țevă confecționată din oțel, are următoarele dimensiuni: diametrul  $d = 1200$  mm, grosimea peretelui  $\delta = 9,5$  mm și lungimea  $l = 3$  km. Această țevă este utilizată la transportul apei. Viteza de curgere a apei prin conductă este  $v = 1,8$  m/s. Vana aflată la capătul conductei este închisă în 2,5 s. Să se determine, tensiunea produsă în peretele conductei, prin creșterea presiunii apei. Se cunosc: modulul de elasticitate al oțelului  $E_{otel} = 710 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>, cel al apei  $E = 206 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup> și densitatea apei  $\rho = 1000$  Kg/m<sup>3</sup>.

### REZOLVARE

Prin închiderea vanei, are loc o creștere a presiunii, care se propagă cu viteza  $c_a$ . Conducta fiind lungă, deci elastică, valoarea vitezei  $c_a$ , se calculează cu relația (5.8):

$$c_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \cdot \frac{E}{E_{\text{otel}}}}} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1,2}{9,5 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{206 \cdot 10^7}{710 \cdot 10^7}}} \cdot \sqrt{\frac{206 \cdot 10^7}{10^3}}$$

$$c_a = 233,9 \text{ m/s}$$

Cum lungimea conductei este  $l$ , timpul de propagare  $t_{\text{pr}}$ , este:

$$t_{\text{pr}} = \frac{l}{c_a} = \frac{3000}{233,9} = 12,83 \text{ s}$$

Căderea de presiune  $\Delta p_a$  este, conform relației (5.6):

$$\Delta p_a = \rho \cdot c_a \cdot v = 10^3 \cdot 233,9 \cdot 1,8$$

$$\Delta p_a = 420 \cdot 10^3 \text{ Pa.}$$

Tensiunea  $\sigma_a$ , ce ia naștere în peretele conductei, este dată de relația (5.9):

$$\sigma_a = \frac{\Delta p_a \cdot d}{2 \cdot \delta} = \frac{420 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 9,5 \cdot 10^{-3}}$$

$$\sigma_a = 26,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

**5.14.** Printr-o conductă de secțiune pătrată, având latura interioară de  $l_1 = 1500$  mm, circulă aerul de ventilație a unei hale, având viteza de  $5 \text{ m/s}$  ( $\rho_{\text{aer}} = 1,12 \text{ Kg/m}^3$ ). Temperatura curentului de aer este  $t = 27^\circ \text{C}$ . Să se determine forța exercitată, datorită vitezei aerului, pe suprafața plană de închidere, atunci când dispozitivul de comandă a clapetei de la capătul conductei, comandă închiderea bruscă a acesteia.

#### **REZOLVARE**

Pentru a determina forța ce apare datorită închiderii bruște a clapetei, trebuie calculată căderea de presiune  $\Delta p_a$ , ce apare. Conform relației (5.6):

$$\Delta p = \rho_{\text{aer}} \cdot c \cdot v$$

Celeritatea, conform relației (3.10), are valoarea:

$$c = \sqrt{k \cdot g \cdot R \cdot T} = \sqrt{1,4 \cdot 9,80665 \cdot 29,3 \cdot (273 + 27)}$$

$$c = 347,5 \text{ m/s.}$$

Deci,

$$\Delta p = 1,12 \cdot 347,5 \cdot 5 = 1946 \text{ Pa}$$

Forța  $F_{\text{aer}}$ , ce apare pe clapetă, va fi:

$$F_{\text{aer}} = \Delta p \cdot S = \Delta p \cdot l^2 = 1946 \cdot 1,5^2$$

$$F_{\text{aer}} = 4378,5 \text{ N.}$$

### 5.3.2 Probleme propuse spre rezolvare

**5.15.** Să se afle debitul unui jet de apă, având diametrul de 20 mm., știind că forța cu care acesta lovește o placă perpendiculară pe axa sa este de 700 N.

$$\mathbf{R: Q = 0,01482 \text{ m}^3/\text{s} = 14,82 \text{ l/s.}}$$

**5.16.** Poarta de formă pătrată având latura  $l_1 = 1,2 \text{ m}$ , este lovită în centrul său de greutate, de către un jet de apă având diametrul  $d = 50 \text{ mm}$  (fig.5.16). În momentul impactului cu jetul, poarta face un unghi  $\alpha = 30^\circ$ , cu direcția acestuia. Poarta pivotează în jurul punctului A. Să se afle, forța P care trebuie aplicată la extremitatea liberă a porții, pentru ca aceasta să rămână în poziția inițială, dacă viteza jetului este  $v_1 = 20 \text{ m/s}$  (frecarea porții în articulație se neglijează).

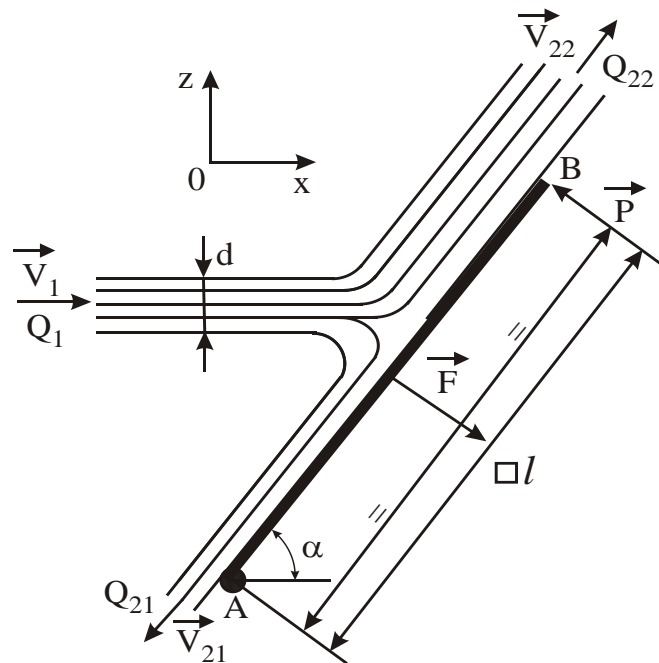
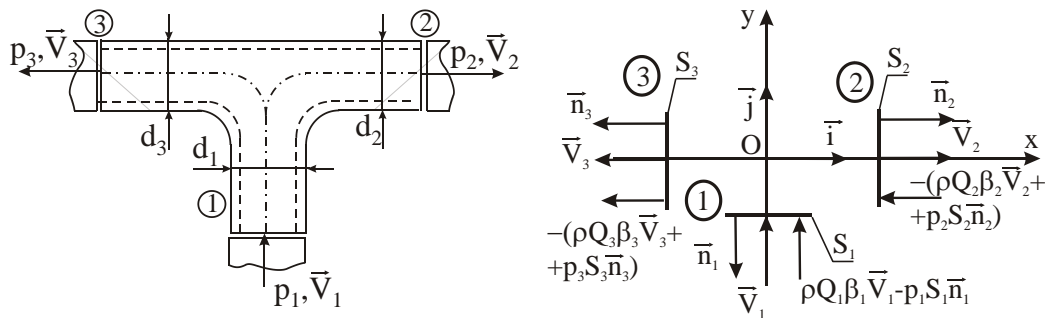


Fig.5.16 Acțiunea jetului asupra porții cu punct de pivotare în A

$$\mathbf{R: F_{L-P} = 2154,12 \text{ N.}}$$

**5.17.** La ieșirea dintr-un teu, folosit la sistemul de irigații (fig.5.18.a.), s-au măsurat presiunile  $p_2 = p_3 = 1$  bar și viteza de la intrare  $v_1 = 2$  m/s. Știind că,  $d_1 = 150$  mm și  $d_2 = d_3 = 100$  mm, să se afle forța cu care apa acționează asupra teului, aflat în plan orizontal, neglijând greutatea lichidului din teu și pierderile hidraulice.



a. Situația reală

b. Schema de calcul

Fig.5.17. Teu folosit la irigații

**R:  $F_{L-P} = 1914,55$  N.**

**5.18.** Vântul, având viteza  $v = 80$  km/oră, lovește un panou dreptunghiular plan, de suprafață  $2 \times 2,5$  m<sup>2</sup> (fig.3.18) Panoul este situat perpendicular pe direcția vântului. Cu ce forță acționează vântul asupra panoului dacă presiunea atmosferică este normală și densitatea aerului este  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>. Se cunoaște  $C_D = 1,2$ .

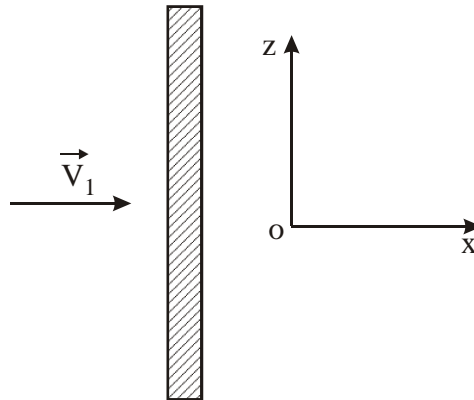


Fig.5.18. Acțiunea vântului asupra unui panou, aflat perpendicular pe direcția sa

**R:  $F_D = 1777,8$  N**

**5.19.** O placă plană subțire având suprafață plană pătrată de  $1,2 \times 1,2 \text{ m}^2$ , se deplasează după o direcție perpendiculară pe planul său, cu viteza  $v = 6,5 \text{ m/s}$ . Mișcarea se realizează la presiunea atmosferică normală. Se cunoaște  $C_D = 1,3$ . Să se calculeze:

**a.** rezistența întâmpinată de placă, la deplasarea prin aer, când temperatura acestuia este de  $20^\circ \text{C}$  ( $\rho_{\text{aer}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$ );

**b.** rezistența întâmpinată de placă, la deplasarea prin apă, cu temperatura de  $15^\circ \text{C}$  ( $\rho = 1020 \text{ kg/m}^3$ ).

**R:** a.  $F_{\text{Daer}} = 49,4 \text{ N}$ ; b.  $F_{\text{Dapa}} = 40337 \text{ N}$ .

**5.20.** Un avion având masa  $m = 3800 \text{ kg}$ , are mărimea suprafeței fiecărei aripi de valoare  $S_{a1} = S_{a2} = 14 \text{ m}^2$ . Care este unghiul de atac  $\alpha_0$ , făcut de aripi cu direcția de mișcare, dacă avionul se deplasează cu viteza  $v = 160 \text{ km/oră}$ ? (se consideră densitatea aerului  $\rho_{\text{aer}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$  și o variație liniară a coeficientului de portanță  $C_L$  cu unghiul de atac  $\alpha$ , de valori  $C_L = 0,35$  pentru  $\alpha = 0^\circ$  și  $C_L = 0,80$  pentru  $\alpha = 6^\circ$ ).

**R:**  $\alpha_0 = 3,8^\circ = 3^\circ 48'$

**5.21.** O bilă din oțel ( $\rho_{\text{oțel}} = 7,87 \text{ kg/dm}^3$ ) având diametrul  $d = 3 \text{ mm}$ , cade în ulei cu densitatea  $\rho_u = 900 \text{ kg/m}^3$  și vâscozitatea cinematică  $\nu_u = 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . Să se calculeze viteza minimă a bilei dacă:

**a.** nu se ține cont de densitatea uleiului;

**b.** se ține cont de densitatea uleiului.

Se cunoaște coeficientul de rezistență al bilei în ulei  $C_{Ru} = 3$ .

**R:** a.  $V_{\text{min}} = 0,154 \text{ m/s}$ ; b.  $V_{\text{min}} = 0,138 \text{ m/s}$

**5.22.** O sferă cu diametrul de  $d = 15 \text{ mm}$  se deplasează în ulei vertical în sus, cu viteza de  $v = 0,9 \text{ m/s}$ . Să se afle densitatea materialului din care este confecționată sfera. Se cunosc: coeficientul de rezistență al bilei în ulei  $C_{Ru} = 3,9$  și densitatea uleiului  $\rho_u = 930 \text{ kg/m}^3$ .

**R3:**  $\rho = 917,754 \text{ kg/m}^3$

**5.23.** O sferă confecționată din oțel ( $\rho_{\text{oțel}} = 7,81 \text{ kg/dm}^3$ ) cade liber, în aer de densitate  $\rho_{\text{aer}} = 1,245 \text{ kg/m}^3$ . Să se determine diametrul sferei, pentru care aceasta poate atinge viteza sunetului. Se consideră, coeficientul de rezistență al sferei  $C_D = 0,8$ , iar viteza sunetului  $340 \text{ m/s}$ .

**R:**  $d = 0,141 \text{ m}$

**5.24.** O vană, situată pe o conductă rigidă cu diametrul  $d = 7,5$  cm, se închide brusc. Prin conductă se transportă glicerină la temperatura de  $t = 20$  °C ( $\rho_{gl} = 1262$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_{gl} = 443,5 \cdot 10^7$  N/m<sup>2</sup>). Creșterea de presiune produsă de închiderea bruscă a vanei, este de  $\Delta p = 70$  N/cm<sup>2</sup>. Să se determine debitul glicerinei transportate prin conductă.

**R:  $Q = 1,3 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s**

**5.25.** Un proiectil având diametrul  $d = 200$  mm, se deplasează prin aer cu viteza  $v = 660$  m/s ( $p = 1$  atm). Temperatura aerului este  $t = 38$  °C, iar densitatea acestuia este,  $\rho_{aer} = 1,11$  Kg/m<sup>3</sup>. Să se determine:

a) numărul și unghiul lui Mach;

b) forța de rezistență întâmpinată de proiectil, cunoscând coeficientul său de rezistență în aer,  $C_{Daer} = 0,6$ .

**R:  $Ma = 1,866$ ,  $\alpha = 32^{\circ} 24'$ ;  $F_D = 4557$  N**

**5.26.** Studiarea unei fotografii de către specialiștii de la criminalistică, a dus la concluzia că unghiul lui Mach sub care se deplasa proiectilul ucigaș avea valoarea,  $\alpha = 38^{\circ}$ . Să se calculeze viteza proiectilului, știind că la momentul crimei aerul avea presiunea  $p = 1$  atm și temperatura  $t = 36$  °C.

**R:  $v = 572,657$  m/s**



## **CAPITOLUL 6**

### **CURGEREA LICHIDELOR PRIN CANALE ȘI CONDUCTE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ**

#### **NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE**

- $S$  - secțiunea canalului, în  $m^2$  ;  
 $P_u$  - perimetrul solid udat, în  $m$ ;  
 $R_h$  - raza hidraulică, în  $m$ ;  
 $C$  - coeficientul lui Chézy, în  $m^{0,5}/s$ ;  
 $Re$  - numărul Reynolds;  
 $Fr$  - criteriul Froude;  
 $H$  - adâncimea totală a canalului, în  $m$ ;  
 $B$  - lățimea canalului la suprafața liberă a apei, în  $m$ ;  
 $Q$  - debitul volumic de lichid, în  $m^3/s$ ;  
 $Q_p$  - debitul volumic de lichid la secțiune plină, în  $m^3/s$ ;  
 $F$  - forța hidrodinamică, în  $N$ ;  
 $G$  - greutatea masei de lichid, în  $N$ ;  
 $r$  - raza cercului, în  $m$ ;  
 $v$  - viteza medie pe secțiune, în  $m/s$ ;  
 $i$  - panta liniei de fund a canalului, în %;  
 $V$  - vâscozitatea cinematică a lichidului, în  $m^2/s$ ;  
 $n$  - coeficientul de rugozitate al albiei canalului;  
 $m$  - parametru geometric al canalului;  
 $h$  - adâncimea curentă a apei în canal, în  $m$ ;  
 $h_{critic}$  - adâncimea critică a apei, în  $m$ ;  
 $i_{critic}$  - panta critică a liniei de fund a canalului, în %;  
 $v_{critic}$  - viteza critică de curgere, în  $m/s$ ;  
 $\varphi_{critic}$  - unghiul critic la centru, în rad;  
 $p$  - presiunea, în  $N/m^2$ ;  
 $\rho$  - densitatea lichidului, în  $kg/m^3$ ;  
 $n^*$  - turația, în rot / min;  
 $m$  - masa, în  $kg$ ;  
 $\mu$  - gradul de umplere al canalului, în %;  
 $\eta$  - vâscozitatea dinamică a lichidului, în  $N \cdot s / m^2$ ;  
 $g = 9.80665 m/s^2$ , - accelerația gravitațională;  
 $\infty = 1,05, \dots, 1, 10$ , - coeficientul lui Coriolis;

## 6.1. INTRODUCERE

Studiul mișcării lichidelor, în acest caz, face parte din categoria problemelor importante analizate în cadrul disciplinei de **HIDRAULICĂ**, datorită tocmai caracterului lor aplicativ. Analiza mișcării lichidelor prin canale și conducte cu suprafață liberă se face utilizând, în general, ecuațiile fundamentale ale dinamicii fluidului vâscos incompresibil, puse sub o formă specială, particulară, dar apelând și la relații de hidraulică specifice, așa după cum se va vedea în continuare.

În cadrul acestui capitol, sunt prezentate relațiile, criteriile și principiile fundamentale privind mișcarea lichidelor prin sisteme hidraulice cu nivel liber (canale și conducte cu suprafață liberă), precum și câteva dintre cele mai importante aplicații în domeniu, care se pot regăsi în domeniile menționate mai sus.

## 6.2. NOȚIUNI TEORETICE

Să considerăm tubul de curent care mărginește domeniul curgerii/ mișcării unui lichid. Dacă numai o parte din suprafața tubului de curent este o suprafață de separație solid-lichid, iar restul este o suprafață de separație gaz-lichid, atunci, spunem că avem o mișcare cu suprafață liberă.

Din punct de vedere al comportării în timp, mișcările cu suprafață liberă se împart în mișcări staționare și mișcări nestaționare.

Din punctul de vedere al comportării în spațiu, deosebit, de asemenea, două categorii de mișcări, respectiv mișcări uniforme și mișcări neuniforme.

Mișcarea uniformă reprezintă mișcarea în care toate liniile de curent sunt drepte paralele între ele. Rezultă că, frontiera mișcării uniforme este o suprafață riglată. Mișcarea neuniformă este mișcarea în care liniile de curent ale mișcării nu mai sunt toate drepte paralele între ele.

Să considerăm o mișcare cu suprafață liberă staționară/nestaționară, uniformă și o secțiune ortogonală pe liniile de curent. În aceste condiții, intersecția, între suprafața perpendiculară pe liniile de curent și frontiera solidă, poate să fie o curbă plană închisă sau deschisă. Dacă curba de intersecție este o curbă închisă, fig. 6.1.a, atunci, se definește mișcarea lichidelor în canale cu profil închis sau conducte cu suprafață liberă. Dacă curba de intersecție nu este o curbă închisă, atunci, se definește mișcarea în canale (deschise), fig.6. 1.b.

Din punctul de vedere al ingineriei mecanice, prezintă un interes deosebit cunoașterea mișcării cu suprafață liberă, staționară și uniformă în canale cu profil închis (conducte cu suprafață liberă) și în canale (deschise), datorită multiplelor sale aplicații.

### a).Curgerea lichidelor prin canale deschise în regim staționar și uniform

Relația generală de calcul hidraulic este formula lui Chezy, care oferă viteza medie pe secțiune, respectiv:

$$v = C \cdot \sqrt{R_h} \cdot \sqrt{i}, \quad (6.1)$$

în care:  $v$ -este viteza medie pe secțiune, în [ m /s]:

$R_h$  –este raza hidraulică, în [m];

$i$ -este panta liniei de fund a canalului, [-];

$C$ -este coeficientul lui Chezy, în [ $m^{0.5}$  / s];

În regim staționar și uniform, panta liniei de fund a canalului,  $i$ , este egală cu panta liniei piezometrice și a liniei energetice ale canalului.

Pentru coeficientul lui Chezy, există mai multe relații de calcul în literatură și care sunt utilizate în practică, dintre care prezentăm următoarele:

-formula lui MANNING: 
$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^{1/6}; \quad (6.2)$$

-formula lui POWELL : 
$$C = -23,2 \cdot \lg(1,811 \cdot \frac{C}{Re} + \frac{\varepsilon}{R_h}); \quad (6.3)$$

-formula lui N.N.PAVLOVSKI: 
$$C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y; \quad (6.4)$$

-formula lui KUTTER: 
$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}} \cdot (23 + \frac{0,00155}{i})}; \quad (6.5)$$

-formula lui BAZIN: 
$$C = \frac{87}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}}}; \quad (6.6)$$

-formula pentru curgere laminară:

$$C = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{f}} = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{64}} \cong 1,107 \cdot \sqrt{Re}, \quad (6.7)$$

în care:  $f = \frac{64}{Re}$ ;  $Re = \frac{4 \cdot R_h \cdot v}{\nu}$ ;

$Re$ -este numărul Reynolds;

$\nu$  -este vâscozitatea cinematică a lichidului, în [ $m^2$ /s];

$$y = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot R_h \cdot (\sqrt{n} - 0,10), \text{ pentru } R_h \in [0,1, \dots, 3,0], \text{ în [m];}$$

sau  $y = 1,5 \cdot \sqrt{n}$ , pentru  $R_h \in [0,1, \dots, 1,0]$ , în [m];

$$y = 1,3 \cdot \sqrt{n}, \text{ pentru } R_h \in [1,0, \dots, 3,0], \text{ în [m];}$$

$n$ -este coeficientul de rugozitate al albiei canalului;

Pentru albi bine conformate și nu foarte dezvoltate, se folosește o rugozitate medie calculată ca o medie ponderată, conform relației următoare:

$$n = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \cdot P_{u_i}}{P_u},$$

în care:  $P_{u_i}$  -este partea din perimetrul solid udat aferentă rugozității  $n_i$ ;

$$P_u = \sum_{i=1}^k P_{u_i}, \text{ - este perimetrul solid udat;}$$

Pentru calcule practice, valorile coeficientului de rugozitate,  $n$ , sunt date în tabele în literatură, [5], iar, pentru câteva cazuri reprezentative sunt indicate în Tabelul 6.1.

Raza hidraulică,  $R_h$ , reprezintă raportul între aria secțiunii vii,  $S$ , (arie prin care trece lichidul) și perimetrul solid udat,  $P_u$ , (perimetrul suprafeței de separație solid-lichid), conform relației următoare:

$$R_h = \frac{S}{P_u}, \text{ în [m];} \tag{6.8}$$

unde:  $S$ -este suprafața secțiunii transversale a curentului lichid (aria secțiunii vii), în  $[m^2]$ ;

$P_u$  – este perimetrul solid udat, în [m];

Să considerăm un canal deschis de secțiune trapezoidală, fig.6.1.b.

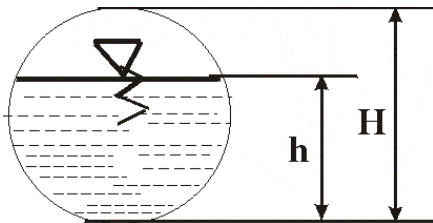


Fig. 6.1 a).

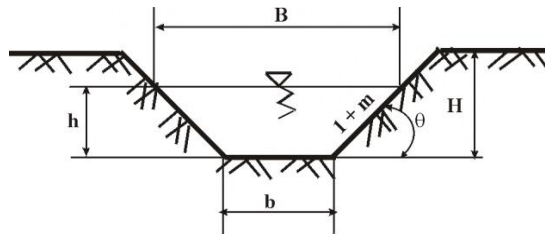


Fig. 6.1 b).

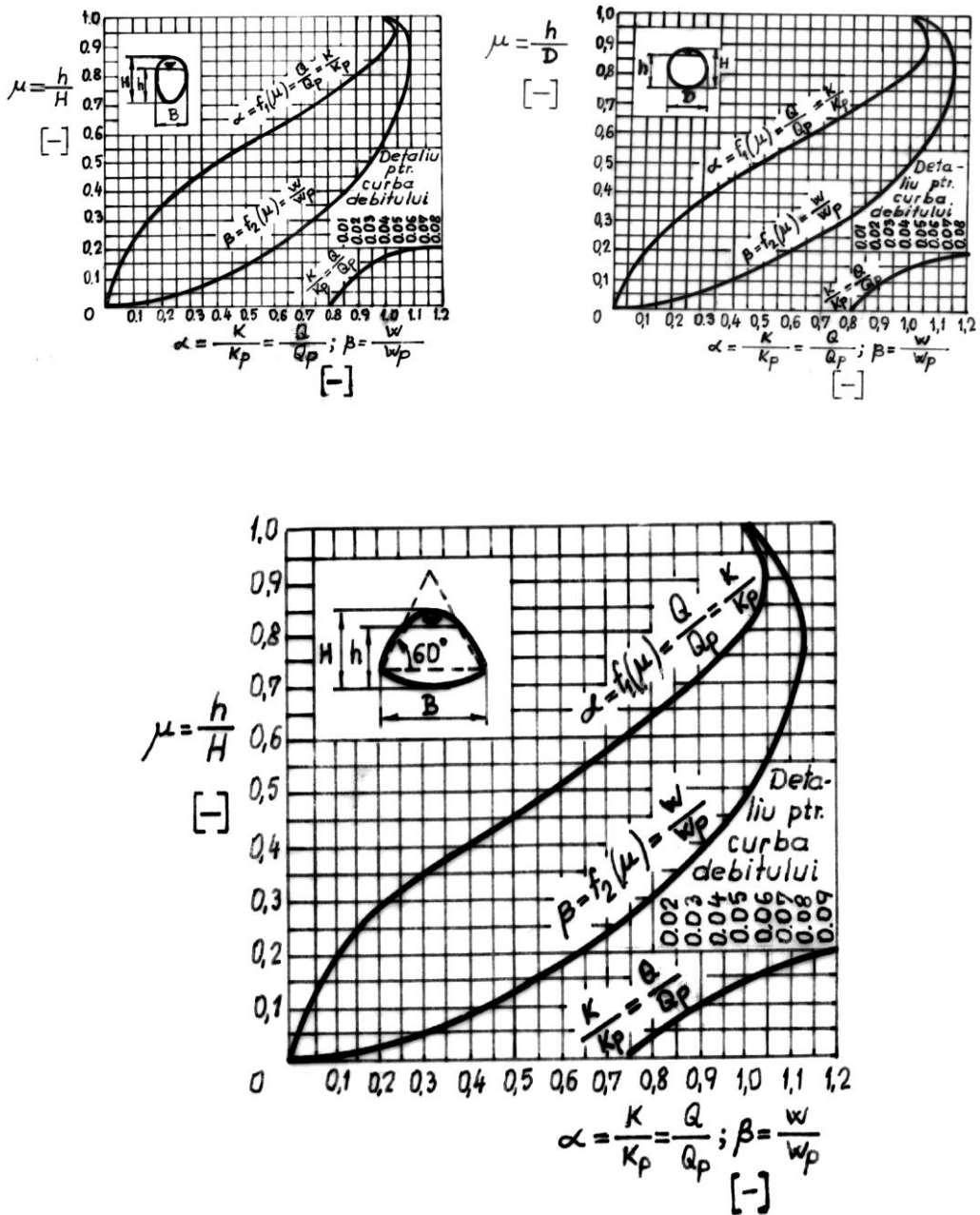


Fig. 6. 1 c) (vezi și anexa)

Tabelul 6.1. Valorile coeficientului de rugozitate

Natura peretelui sau tipul canalului:	Coeficientul de rugozitate, n [-]:
0	1
Suprafețe lăcuite sau emailate:	0,009
Metal:-fontă curată, nouă:	0,012
-tablă bituminată în funcțiune:	0,012
Lemn:-lemn geluit:	0,011,.....,0,012
-lemn negeluit:	0,015,.....,0,017
Beton și ciment:-beton netencuit executat cu cofraj metalic:	0,013
-beton netencuit executat cu cofraj de scânduri:	0,014,.....,0,016
-beton sclivisit:	0,011,.....,0,012
-beton tororetat:	0,018,.....,0,019
-azbociment,ciment ccntrifugat centrifugat:	0,011
Cărămidă și piatră:-piatră sau cărămidă, execuție îngrijită:	0,013
-piatră brută rotunjită:	0,018
-bolovani de râu cu mortar:	0,022
-tuburi de argilă arsă pentru drenaj:	0,013
-conducte de canalizare vitrificate:	0,014
Stâncă:-stâncă necăptușită:	0,022,.....,0,040
-stâncă parțial căptușită:	0,020,.....,0,025
Gresie, faianță:	0,010,.....,0,011
Canale de pământ:-canale în loess:	0,017
-canale cu pereți acoperiți cu argilă:	0,022
-canale cu pundiș mijlociu:	0,025
-canale cu maluri înverzite:	0,030

Conform fig.6.1, notând cu  $H$  dimensiunea caracteristică a conductei/canalului, iar cu  $h$  înălțimea ocupată de lichid, atunci, se definește gradul de umplere  $\mu$ , prin relația  $\mu = \frac{h}{H}$ : se observă că  $\mu \in [0, \dots, 1, 0]$ .

Conform fig.6 .1.b, unghiul  $\theta$  al malului canalului este determinat de unghiul de taluz natural al terenului în care este construit canalul. Notăm prin:

$$m = \operatorname{ctg} \theta \quad (6.9)$$

Câteva valori orientative pentru parametrul  $m$ , în funcție de natura terenului, sunt indicate în Tabelul 6.2, [5].

Tabelul 6 .2. Valorile parametrului  $m$

Categoria terenului:	Parametrul $m$ , [-]:
Teren nisipos (neconsolidat):	2,.....,2,5
Nisip argilos (compact):	1,5,.....,2,0
Pietriș:	1,5
Teren argilos:	1,0,.....,1,5
Stâncă:	0,5,.....,1,0

Aria secțiunii canalului,  $S$ , și perimetrul solid udat,  $P_u$ , sunt date de relațiile:

$$S = \frac{2.b + 2.m.h}{2} .h = b.h + m.h^2 = (\beta + m).h^2; \quad (6.10)$$

$$P_u = b + 2h \sqrt{1 + m^2} = (\beta + 2\sqrt{1 + m^2})h = (\beta + m')h, \quad (6.11)$$

unde:  $\beta = \frac{b}{h}; \quad (6.12)$

$$m' = 2\sqrt{1 + m^2}; \quad (6.13)$$

Raza hidraulică,  $R_h$ , conform definiției sale, (6 .8), este:

$$R_h = \frac{S}{P_u} = \frac{(\beta + m)}{(\beta + m')} h; \quad (6.14)$$

Debitul canalului și respectiv modulul de debit se obțin utilizând formula lui Chezy, (6.1), astfel:

$$Q = v \cdot S = C \cdot S \cdot \sqrt{R_h \cdot i}; \quad \text{în } [\text{m}^3 / \text{s}]; \quad (6.15)$$

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = CS \sqrt{R_h}; \quad \text{în } [\text{m}^3 / \text{s}]; \quad (6.16)$$

Sau, utilizând, de exemplu, formula lui N.N.Pavlovski, (6.4), relația (6.15) devine:

$$Q = v S = C S \sqrt{R_h \cdot i} = \frac{1}{n} S R_h^{y+0,5} i^{0,5} = \frac{1}{n} \frac{S^{y+0,5}}{P_u^{y+0,5}} i^{0,5}; \quad (6.17)$$

Sau, cu relațiile (6.10) și (6.11), relația (6.17) devine:

$$Q = \frac{1}{n} (\beta + m)^{y+1,5} \cdot \frac{1}{(\beta + m')^{y+0,5}} \cdot h^{y+2,5} \cdot i^{0,5}; \quad (6.18)$$

Condiția de funcționare optim hidraulică a canalului este:

$$\beta_0 = m' - 2m = 2(\sqrt{1 + m^2} - m) = \frac{b}{h}; \quad (6.19)$$

Raza hidraulică pentru profilul hidraulic optim, este :

$$R_{h_0} = \frac{\beta_0 + m}{\beta_0 + m'} h = \frac{m' - 2m + m}{m' - 2m + m'} h = \frac{h}{2}; \quad (6.20)$$

Relația (6.18) permite calculul canalelor deschise. În expresia (6.18), apar mărimile  $Q$ ,  $b(\beta)$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $n$ , dintre care,  $m$  și  $n$  se presupun cunoscute întotdeauna.

Problema determinării debitului, deci, problema de funcționare a canalelor, este o problemă simplă, care nu prezintă nici un fel de dificultăți. Apar, însă, mai multe probleme de dimensionare a canalelor deschise, astfel:

- 1). Se dă:  $Q$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $n$ ; Se cere:  $b$ ;
- 2). Se dă:  $Q$ ,  $b$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $n$ ; Se cere:  $h$ ;
- 3). Se dă:  $Q$ ,  $\beta$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $n$ ; Se cere:  $b$ ,  $h$ ;
- 4). Se dă:  $Q$ ,  $v$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $n$ ; Se cere:  $b$ ,  $h$ ;



Cele patru tipuri de probleme de dimensionare se rezolvă pe cale grafică, utilizând relațiile (6.1),..., (6.20). Pentru canale de secțiune trapezoidală și dreptunghiulară, se pot utiliza metodele grafice de rezolvare de tip N.N.Pavlovski, V.D.Jurin, I.I.Agroschin, P.G.Kiselev, prezentate în lucrarea “Îndreptar pentru calcule hidraulice”, de P.G.Kiselev, pag. 200, ..., 225, [8].

Într-o prezentare succintă, cele patru tipuri de probleme de dimensionare se rezolvă astfel:

1). Se admit mai multe valori pentru  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Se calculează cu relația (6.12) valorile corespunzătoare ale lui  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  și, apoi, cu relația (6.18), se determină valorile lui  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Se reprezintă grafic dependența  $Q_i = f(b_i)$ , apoi, din grafic, pentru  $Q_{\text{dat}}$  prin enunțul problemei, rezultă  $b_{\text{necesar}}$ . Trebuie subliniat faptul că, acest tip de problemă necesită ca debitul dat să fie mai mare decât debitul  $Q|_{b=0}$ , care corespunde unui canal deschis triunghiular.

În concluzie, condiția de rezolvare a problemei este:

$$Q > Q|_{b=0} = \frac{1}{n} \frac{m^{y+1,5}}{m'^{y+0,5}} h^{y+2,5} i^{0,5}; \quad (6.21)$$

2). Se admit valori pentru  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Se calculează  $\beta_i$  și  $Q_i$  cu relațiile (6.12) și (6.18). Se reprezintă grafic dependența  $Q_i = f(h_i)$  și, apoi, pentru  $Q_{\text{dat}}$  prin enunț, rezultă  $h_{\text{necesar}}$ .

3). Soluția problemei este simplă în acest caz, deoarece, din relația (6.18), rezultă  $h$  și, apoi, din relația (6.12), rezultă lățimea  $b$ ,  $b = \beta \cdot h$ .

4). Se admit valori pentru  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , care permit, cu ajutorul relației (6.18), calculul înălțimii  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Utilizând relația (6.10), se calculează suprafețele  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , și se reprezintă grafic dependența  $S_i = f(\beta_i)$ .

Pentru datele problemei, se calculează  $S_{\text{necesar}} = \frac{Q}{v}$  și, apoi, din grafic rezultă

$\beta_{\text{necesar}}$ . În continuare, determinarea dimensiunilor geometrice  $b$  și  $h$  se face conform cazului precedent, 3).

Se poate demonstra că, [3], ultimul tip de problemă, 4), necesită ca datele inițiale să satisfacă următoarea relație de condiție:

$$\frac{Q}{4v(m' - m)} \geq \left(\frac{nv}{\sqrt{i}}\right)^3; \quad (6.22)$$

Viteza de curgere în canale,  $v$ , este limitată inferior din motive de împotmolire și superior din considerente de eroziune a peretelui /malului. Stabilirea valorii vitezei de curgere în canale se face pe baza datelor și recomandărilor existente

în literatura de specialitate, [5]. În acest sens, se pot utiliza valorile indicate în Tabelul.6 .3.

Tabelul 6. 3.

Natura materialului perimetrului solid udat:	Viteza maximă, $v_{\max}$ , [m/s]
Teren natural:-nămoluri :	0,5,.....,0,6
-nisip argilos ușor, nisip foarte fin, loess :	0,7,.....,0,8
-nisip argilos mediu sau compact :	1,0
-nisip argilos greu:	1,1,.....,1,2
-agrilă ușoară:	0,7
-argilă normală:	1,2,.....,1,4
-argilă compactă:	1,5,.....,1,8
Căptușeală:-din cărămidă	1,40
-din piatră sedimentară	2,40
-din piatră eruptivă sau metamorfică:	5,80
-din lemn:	6,0
-din beton, marca:B75:	3,80
B100:	4,40
B150:	6,0
B200:	7,40

Calculul adâncimii critice,  $h_{cr}$ , se face cu relații diferite, în funcție de forma canalului cu suprafață liberă. Astfel, relația generală de calcul este:

$$\left(\frac{S^3}{B}\right)_{critic} = \frac{\infty Q^2}{g}, \quad (6.23)$$

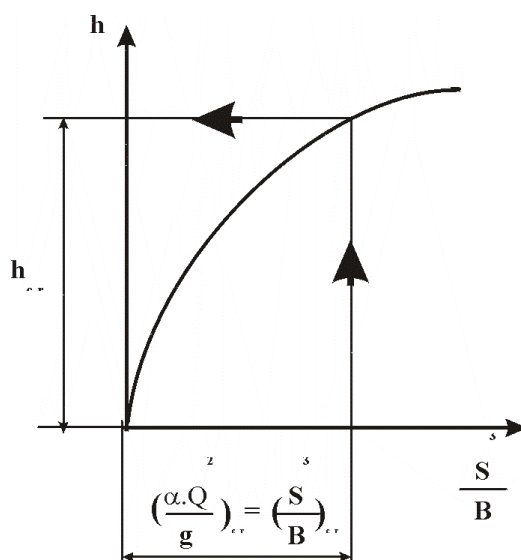
în care: S - este suprafața secțiunii transversale a canalului;

B - este lățimea canalului la suprafața liberă a apei, (Fig. 6 .1.b);

$\infty = 1,05, \dots, 1,10$ , - este coeficientul Coriolis de neuniformitate a repartiției de viteze pe secțiune;

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , este accelerația gravitațională;

Relația ( 6.23), pentru secțiuni oarecare, se rezolvă pe cale grafo-analitică sau prin încercări, conform Fig. 6 .2.



Astfel, relația de calcul a adâncimii critice,  $h_{critic}$ , este:

-pentru canal deschis dreptunghiular:

$$h_{critic} = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot q^2}{g}}; \quad (6.24)$$

în care:  $q = \frac{Q}{b}$ , - este debitul specific, în  $[m^3/s \cdot m]$ ;

-pentru albi trapezoidale (trapez isoscel):

$$\frac{[(b + h_{cr}m)h_{cr}]^3}{b + 2h_{cr}m} = \frac{\alpha Q^2}{g}; \quad (6.25)$$

În acest caz, se poate utiliza și metoda I.I. Agroschin, prezentată în [8], pagina nr.255.

-pentru albi triunghiulare:

$$h_{critic} = \sqrt[5]{\frac{2 \alpha Q^2}{g m_1^2}}, \quad (6.26)$$

în care:  $m_1 = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ ;  $\varphi$  - este unghiul la fundul albiei;

-pentru albi parabolice:

$$h_{\text{critic}} = \sqrt[4]{\frac{27 \propto Q^2}{64gp}}, \quad (6.27)$$

în care: p- este parametrul ecuației parabolice:  $h = \frac{x^2}{2.p}$ ;

-pentru albi circulare:

$$h_{\text{critic}} = r \cdot \left[ 1 + \cos\left(\frac{\varphi_{\text{critic}}}{2}\right) \right]; \quad (6.28)$$

în care:  $\varphi_{cr}$  - este unghiul critic la centru, care rezultă din relația următoare:

$$\frac{16 \propto Q^2}{gr^5} = \frac{(\varphi_{cr} - \sin \varphi_{cr})^3}{\sin\left(\frac{\varphi_{cr}}{2}\right)}; \quad (6.29)$$

unde: r- este raza cercului;

Criteriile de stabilire a regimului de mișcare în canale sunt:

1).Criteriul adâncimii:

- pentru  $h > h_{\text{critic}}$ , avem regim lent de mișcare;
- pentru  $h = h_{\text{critic}}$ , avem regim critic de mișcare;
- pentru  $h < h_{\text{critic}}$ , avem regim rapid de mișcare;

2).Criteriul pantei liniei de fund a canalului:

$$\text{Se definește: } i_{\text{critic}} = \frac{Q^2}{S_{cr}^2 C_{cr}^2 R_{h_{cr}}}, \quad (6.30)$$

În care :  $S_{\text{critic}}$ ,  $C_{\text{critic}}$ ,  $R_{h_{\text{critic}}}$ , - sunt suprafața, coeficientul lui Chezy și raza hidraulică pentru  $h = h_{\text{critic}}$ ;

- Atunci:- pentru  $i < i_{\text{critic}}$ , avem regim lent de mișcare ;
- pentru  $i > i_{\text{critic}}$ , avem regim rapid de mișcare;
  - pentru  $i = i_{\text{critic}}$ , avem regim critic de mișcare;

Pentru albi dreptunghiulare,  $i_{\text{critic}}$  este:

$$i_{\text{critic}} = \frac{g}{\propto C_{\text{critic}}^2} \quad (6.31)$$

3). Criteriul vitezei:

- pentru  $v < v_{critic}$ , avem regim lent de mișcare;
- pentru  $v = v_{critic}$ , avem regim critic de mișcare;
- pentru  $v > v_{critic}$ , avem regim rapid de mișcare;

Pentru alpii dreptunghiulare, viteza  $v_{critic}$  este:

$$v_{critic} = \sqrt{\frac{q}{\alpha} h_{critic}}; \quad (6.32)$$

4). Criteriul lui Froude:

Se definește: 
$$Fr = \frac{\alpha v^2}{gh_{mediu}}, \quad (6.33)$$

în care: Fr- este numărul Froude, format cu adâncimea medie,  $h_{mediu}$ , ( $h_{mediu} = \frac{S}{B}$ );

- Atunci: - pentru  $Fr < 1$ , avem regim lent de mișcare;  
 - pentru  $Fr = 1$ , avem regim critic de mișcare;  
 - pentru  $Fr > 1$ , avem regim rapid de mișcare;

**b). Curgerea lichidelor prin canale cu profil închis în regim staționar și uniform**

Aceste canale pot avea formă circulară, -(v. fig.6 .1.a ), ovoidală, clopot, etc.

Pentru calculul lor, se pot utiliza graficele întocmite pentru funcțiile  $\alpha = \frac{K}{K_p}$  și

$\beta = \frac{W}{W_p}$ , - diagrame oferite de literatura de specialitate, [6], [7], -în raport de gradul

de umplere al canalului cu profil închis,  $\mu = \frac{h}{H}$ . Semnificația notațiilor utilizate este următoarea:

K - este modulul de debit pentru o adâncime oarecare a apei în canal, h;

$K_p$  - este modulul de debit la secțiune plină;

$W = C \sqrt{R_h}$ , - este modulul de viteză la adâncimea curentă, h;

$W_p$ - este modulul de viteză la secțiune plină;

h- este adâncimea curentă /oarecare a apei în canal;

H- este adâncimea totală a canalului, (v. fig.6 .1).

În Fig.6 .1.c, sunt date curbele  $\alpha = f_1\left(\frac{h}{H}\right)$  și  $\beta = f_2\left(\frac{h}{H}\right)$ , pentru un canal de secțiune circulară, ovoidală și clopot.

La calculul canalelor cu profil închis, (conducte cu suprafață liberă), intervin următoarele mărimi: Q, H,  $h(\mu)$ , n, forma secțiunii. La calcul, se presupun întotdeauna cunoscute coeficientul de rugozitate  $n$  și forma secțiunii (circulară, ovoidală, clopot, etc.). În calculul canalelor cu profil închis, pot apărea următoarele probleme de exploatare:

1). Să se determine debitul Q, dacă se cunosc dimensiunea caracteristică H, gradul de umplere  $\mu$  și panta liniei de fund  $i$ . Rezolvarea problemei se face după următoarea metodică: pentru  $n$  și H, se determină din tabele modulul de debit  $K_p$ ; pentru  $\mu$  dat, din graficul corespunzător formei secțiunii, (fig.6.1.c), rezultă funcția  $\alpha = \frac{K}{K_p}$ . Atunci, din relația (6.34), rezultă debitul volumic  $Q = f_1(\mu)K_p\sqrt{i} = K\sqrt{i}$ ;

2). Să se determine gradul de umplere  $\mu$ , dacă se cunosc: dimensiunea caracteristică H, debitul Q și panta liniei de fund  $i$ . Pentru rezolvare, se extrage din tabele, pentru  $n$  și H, modulul de debit  $K_p$ . Din relația (6.35), rezultă raportul  $K = \frac{Q}{\sqrt{i}}$ , iar din relația (6.34), se obține  $f_1(\mu) = \frac{K}{K_p}$ .

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{\frac{1}{n}SR_h^{y+0,5}i^{0,5}}{\frac{1}{n}S_pR_{h_p}^{y+0,5}i^{0,5}} = \frac{K}{K_p} = \frac{S}{S_p}\left(\frac{R_h}{R_{h_p}}\right)^{y+0,5} = f_1(\mu); \quad (6.34)$$

$$Q = v.S = \frac{1}{n}.S.R_h^{y+0,5}.i^{0,5} = K.i^{0,5}; \quad (6.35)$$

În continuare, utilizând graficul corespunzător formei secțiunii, pentru  $f_1(\mu) = \frac{K}{K_p}$  dat, rezultă gradul de umplere  $\mu$ .

3). Să se determine panta liniei de fund  $i$ , dacă se cunosc: dimensiunea caracteristică H, debitul Q și gradul de umplere  $\mu$ . Atunci, se determină, pentru H și n date, modulul de debit  $K_p$ . Apoi, se calculează, din relația (6.34), modulul de debit K,  $K = K_p \cdot f_1(\mu)$  cu valoarea lui  $f_1(\mu)$  determinată pentru gradul de umplere  $\mu$  impus. Atunci, panta liniei de fund  $i$  rezultă din relația (6.35).

Problema de proiectare constă în determinarea dimensiunii caracteristice  $H$ , dacă se cunosc debitul  $Q$ , gradul de umplere  $\mu$  și panta liniei de fund  $i$ . Având  $Q$  și  $i$ , și utilizând relația (6.35), rezultă  $K = \frac{Q}{\sqrt{i}}$ . Corespunzător lui  $\mu$ , se alege  $f_1(\mu)$  și,

apoi, din relația (6.34), rezultă  $K_p = \frac{K}{f_1(\mu)}$ .

Pentru  $K_p$  și  $n$  cunoscute, se extrage din tabele valoarea lui  $H$ . Se adoptă valoarea rotunjită superior și, apoi, în funcție de valoarea impusă  $i$  sau  $\mu$ , se rezolvă problema de exploatare corespunzătoare.

### 6.3. APLICAȚII

#### 6.3.1. Probleme rezolvate

**6.1.** Să se calculeze lățimea  $b$  a unui canal trapezoidal prin care se transportă un debit volumic  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$ , la o adâncime  $h = 1,5 \text{ m}$ . Se dau:  $m = 2,0$ ;  $n = 0,025$ ;  $i = 0,0005$ .

#### REZOLVARE

Se utilizează relația (6.16), pentru modulul de debit, rezultând:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{15,0}{\sqrt{0,0005}} = 670,8203932 \text{ m}^3/\text{s}.$$

În continuare, problema se rezolvă pe cale grafo-analitică, fiind o problemă de dimensionare a canalelor deschise de tipul 1), aplicând metoda prezentată succint mai sus, în breviar. Rezolvarea grafo-analitică este dată în Tabelul 6.4, iar graficul corespunzător este prezentat în fig. 6.3.

Tabelul 6.4

$b$ [m]	$S$ [m <sup>2</sup> ]	$P_u$ [m]	$R_h$ [m]	$C$ [m <sup>0,5</sup> /s]	$K$ [m <sup>3</sup> /s]	$\beta$ [-]
4	10,50	10,7082	0,98	39,8205	413,913	2,666666
5	12,000	11,7082	1,025	40,2185	488,6174	3,333333
6	13,50	12,7082	1,0623	40,533	563,982	4,000
7	15,00	13,7082	1,094235	40,792	640,054	4,666666
8	16,50	14,7082	1,121823	41,0075	716,653	5,333333
0	1	2	3	4	5	6

**OBSERVAȚIE:** În Tabelul 6.4, coeficientul lui Chezy a fost calculat cu relația lui N.N.Pavlovski, (6.4).

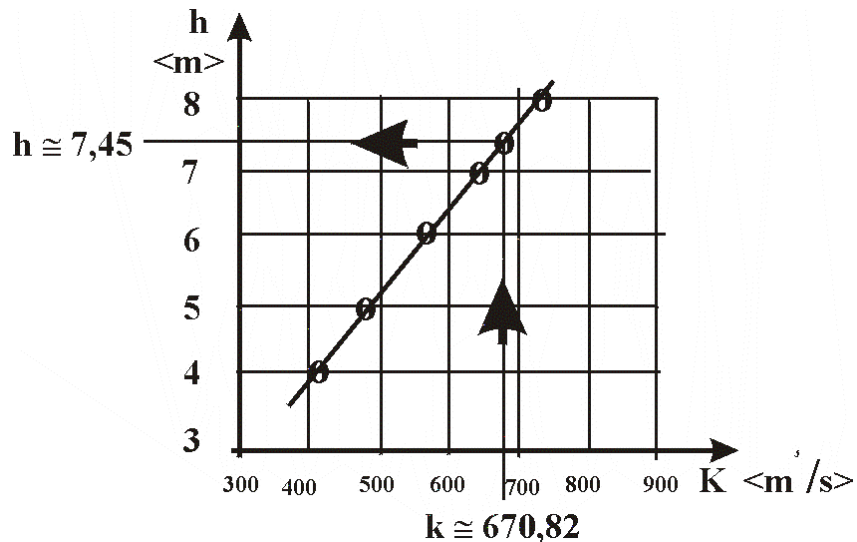


Fig. 6.3.

Din graficul de mai sus, rezultă lățimea necesară a fundului canalului trapezoidal,  $b \cong 7,45m$ .

**6.2.** Să se calculeze adâncimea apei  $h$  într-un canal deschis de secțiune dreptunghiulară, prin care se transportă un debit volumic  $Q = 25m^3/s$ , dacă se cunosc:  $b = 6m$ ;  $i = 0,0003$ ;  $n = 0,014$ .

#### REZOLVARE

Problema se rezolvă pe cale grafo-analitică, fiind o problemă de dimensionare a canalelor deschise de tipul 2), aplicând metodică cunoscută în acest caz. Astfel, utilizând relația (6.16), pentru modulul de debit, se obține:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{25,0}{\sqrt{0,0003}} = 1443,375673 \text{ m}^3/s;$$

Rezolvarea grafo-analitică, respectiv calculele numerice sunt prezentate în Tabelul 6.5, iar graficul corespunzător este prezentat în fig. 6.4.



Tabelul 6.5.

h [m]	S [m <sup>2</sup> ]	P <sub>u</sub> [m]	R <sub>h</sub> [m]	C[m <sup>0,5</sup> /s]	K [m <sup>3</sup> /s]	β[-]
1	6,0	8,0	0,750	68,3037	354,91644	6
2	12,0	10,0	1,20	73,40	964,865434	3
3	18,0	12,0	1,50	75,76	1670,1565	2
4	24,0	14,0	1,7143	77,1206	2423,4	1,5

**OBSERVAȚIE:** În Tabelul 6.5, coeficientul lui Chezy a fost calculat cu relația lui N.N.Pavlovski, (6.4).

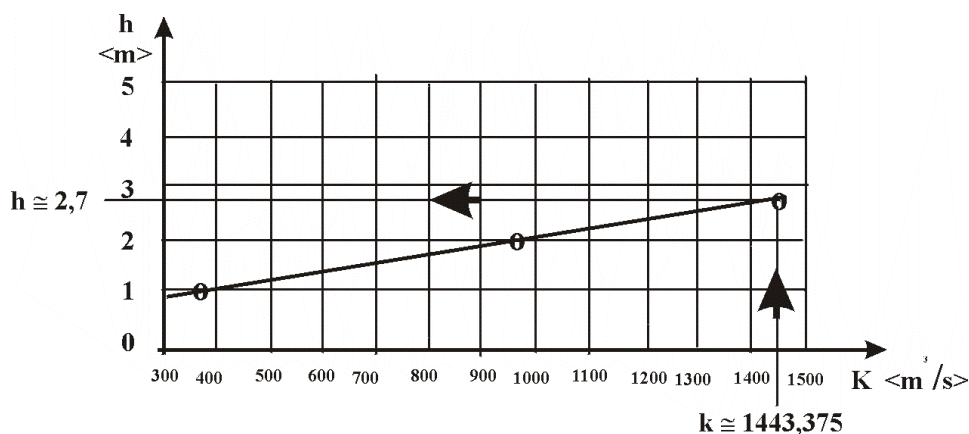


Fig. 6.4

Din graficul prezentat în fig.6.4, rezultă adâncimea  $h$  a apei în canalul dreptunghiular,  $h \cong 2,70$  m.

**6.3.** Să se efectueze dimensionarea hidraulică a unui canal de formă trapezoidală cu profilul hidraulic optim realizat din beton, cunoscându-se următoarele date:  $Q = 10,0 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $m = 1,0$ ,  $i = 0,004$  și  $n = 0,014$ .

#### **REZOLVARE**

Din condiția profilului hidraulic optim, (6.19), rezultă:

$$\beta_0 = m' - 2m = 2(\sqrt{1+m^2} - m) = 2(\sqrt{1+1^2} - 1) = 0,828427124;$$

Pentru  $\beta_0 = \beta = \frac{b}{h}$ , din relația debitului (6.18), se obține:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(\beta_0 + m)^{y+1,5}}{(\beta_0 + m')^{y+0,5}} h^{y+2,5} i^{0,5},$$

unde:  $y = \frac{1}{6} \cong 0,167$ .

Atunci, relația debitului devine:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(\beta_0 + m)^{5/3}}{(\beta_0 + m')^{2/3}} h^{8/3} i^{0,5};$$

De unde, explicitând adâncimea,  $h$ , se obține:

$$h = \left[ \frac{Q \cdot n}{i^{0,5}} \cdot \frac{(\beta_0 + m')^{2/3}}{(\beta_0 + m)^{5/3}} \right]^{3/8} = \left[ \frac{(10,0 \cdot 0,014 \cdot (0,828427124 + 2,828427124)^{2/3})}{\sqrt{0,004} \cdot (0,828427124 + 1,0)^{5/3}} \right]^{3/8} = 1,277586m;$$

În continuare, rezultă:  $b = \beta_0 \cdot h = 0,828427124 \cdot 1,277586 = 1,058386895m$ ;

Constructiv, se adoptă lățimea  $b \cong 1,0m$  și se recalculează adâncimea canalului  $h$ , după metoda grafo-analitică cunoscută, prezentată succint mai sus. Astfel, din relația (6.16), se determină modulul de debit,  $K$ , necesar, rezultând:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{10,00}{\sqrt{0,004}} = 158,113883m^3/s;$$

Rezolvarea grafo-analitică, pentru lățimea  $b \cong 1,00m$ , este prezentată în Tabelul 6.6 și în graficul corespunzător din fig. 6.5.

Tabelul 6.6.

h [m]	b [m]	$\beta$ [-]	K [m <sup>3</sup> /s]
0,5	1,0	2,00	24,57292875
1,0	1,0	1,0	92,66342649
1,5	1,0	0,6666666666	214,235126
2,0	1,0	0,50	399,8938102
2,5	1,0	0,40	659,5757904
3,0	1,0	0,333333333	1002,629411
3,5	1,0	0,285714285	1439,01

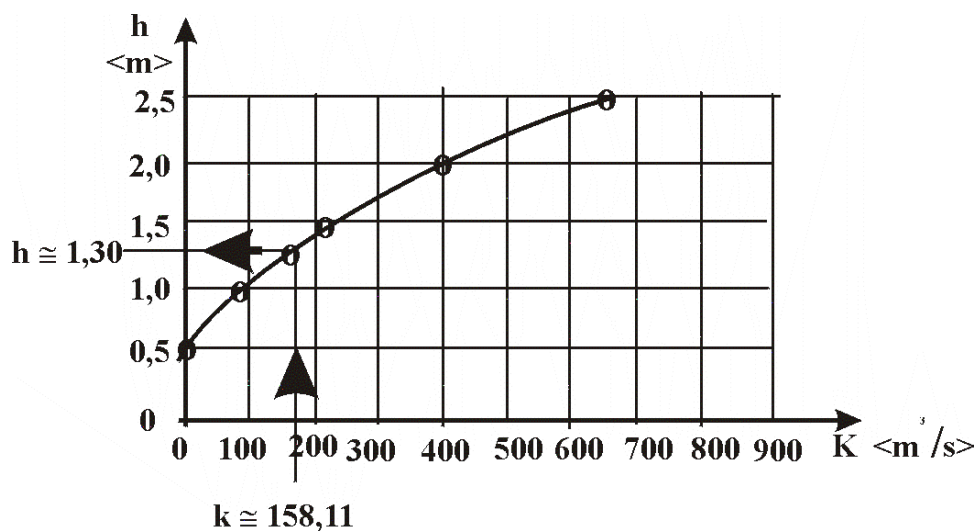


Fig. 6.5

Din graficul prezentat în fig. 6 .5, rezultă adâncimea necesară a canalului trapezoidal,  $h \cong 1,30\text{m}$ .

**6.4.** Să se dimensioneze un canal trapezoidal care să transporte un debit volumic  $Q = 15,0 \text{ m}^3/\text{s}$ , astfel încât viteza medie în secțiunea transversală a canalului să nu depășească valoarea  $v = 0,8 \text{ m/s}$ . Se mai dau:  $i = 1,6 \cdot 10^{-4}$ ;  $m = 0,5$ ;  $n = 0,018$ .

#### REZOLVARE

Această problemă este o problemă de dimensionare a canalelor deschise de tipul 4), pentru rezolvarea căreia se aplică metoda prezentată succint în breviarul introductiv. În consecință, la început, se verifică condiția de compatibilitate, respectiv, se verifică dacă datele inițiale ale problemei satisfac relația de condiție, (6.22), adică:

$$\frac{Q}{4v(m' - m)} \geq \left(\frac{nv}{\sqrt{i}}\right)^3; \quad (6.22)$$

$$\text{unde : } m' = 2 \cdot \sqrt{1 + m^2} = 2 \cdot \sqrt{1 + (0,5)^2} = 2,236067976;$$

$$\text{Atunci: } \frac{15,0}{4,0,8, (2,236067976 - 0,5)} \geq \left( \frac{0,018 \cdot 0,8}{\sqrt{0,00016}} \right)^3;$$

Deci:  $2,700067084 \triangleright 1,4753923$ ; (condiția de compatibilitate este verificată).

Din relația debitului, ( 6.15), se calculează aria secțiunii canalului trapezoidal, S, rezultând:

$$S = \frac{Q}{v} = \frac{15,0}{0,80} = 18,750 \text{ m}^2$$

În continuare, problema se rezolvă pe cale grafo-analitică, utilizând metoda descrisă anterior pentru acest tip de probleme de dimensionare. Rezultatele calculului numeric sunt prezentate în Tabelul 6.7, iar dependența grafică corespunzătoare,  $S_i = f(\beta_i)$ , este prezentată în fig. 6.6.

Tabelul 6.7.

$\beta$ [-]	$h$ [m]	S [ m <sup>2</sup> ]
1,0	3,2635423	15,976062
5,0	1,7742486	17,31376955
10,0	1,3531468	19,22556615
15,0	1,1572433	20,75778755
20,0	1,0366995	22,03229095

Relațiile utilizate în Tabelul . 6.7 sunt relațiile (6.18) și (6.10). Astfel, vom avea:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\beta + m)^{y+1,5}}{(\beta + m')^{y+0,5}} \cdot h^{y+2,5} i^{0,5}; \quad (6.18)$$

$$h = \left[ \frac{Qn}{i^{0,5}} \cdot \frac{(\beta + m')^{y+0,5}}{(\beta + m)^{y+1,5}} \right]^{\frac{1}{y+2,5}}; \quad (6.18)'$$

unde :  $\beta = \frac{b}{h}$ ;  $y = \frac{1}{5}$ ;

Atunci, relația ( 6.18)' devine:

$$h = \left[ \frac{Qn}{i^{0,5}} \cdot \frac{(\beta + m')^{0,7}}{(\beta + m)^{1,7}} \right]^{\frac{1}{2,7}}; \quad (6.18)''$$

Iar:  $S = (\beta + m) \cdot h^2$ ; (6.10)

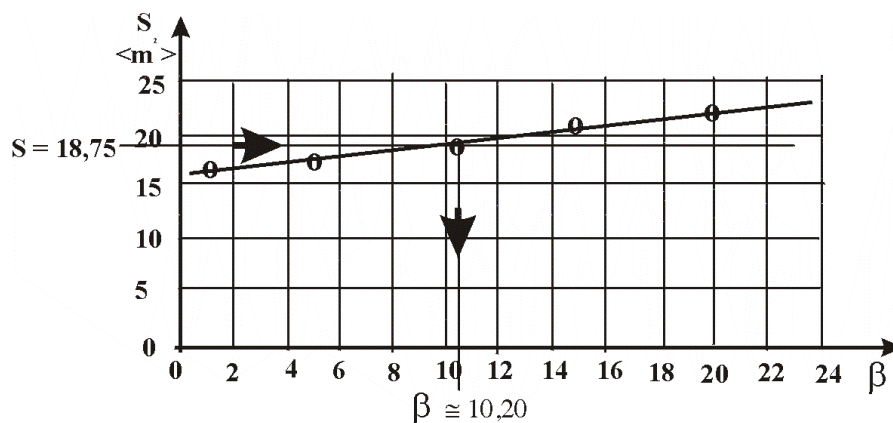


Fig. 6.6.

Din graficul prezentat în fig.6.6, a rezultat parametrul geometric  $\beta$  ca fiind  $\beta \cong 10,20$ . În continuare, determinarea dimensiunilor geometrice  $b$  și  $h$  se face conform cazului 3) de probleme de dimensionare, prezentat în breviarul introductiv. Astfel, cunoscând parametrul  $\beta_{necesar} \cong 10,20$ , se calculează cu relația (6.18) valoarea înălțimii  $h$  a canalului, rezultând:

$$h = \left[ \frac{Q \cdot n}{i^{0,5}} \cdot \frac{(\beta + m')^{0,7}}{(\beta + m)^{1,7}} \right]^{\frac{1}{2,7}} = \left[ \frac{15,0 \cdot 0,018}{\sqrt{0,00016}} \cdot \frac{(10,20 + 2,236067976)^{0,7}}{(10,20 + 0,5)^{1,7}} \right]^{\frac{1}{2,7}} = 1,3427988 \text{ m};$$

Cunoscând înălțimea  $h \cong 1,343$  m, atunci, din relația (6.12), rezultă lățimea  $b$  a canalului trapezoidal, astfel:

$$b = \beta \cdot h = 10,20 \cdot 1,3427988 = 13,69654776 \text{ m};$$

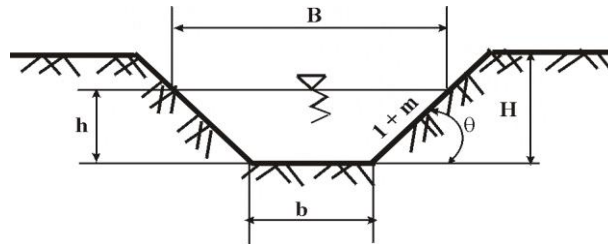
Deci, a rezultat :  $b \cong 13,7$  m;

**6. 5.** Să se determine adâncimea critică ,  $h_{critic}$  în cazul unui canal trapezoidal, având cunoscute următoarele date:  $b = 12,0$  m;  $m = 1,50$  m;  $Q = 18,0$  m<sup>3</sup>/s;  $g \cong 9,81$  m/s<sup>2</sup>;  $\alpha \cong 1,1$ .

### REZOLVARE

Determinarea adâncimii critice,  $h_{critic}$ , se face cu ajutorul relației (6.23), rezultând:

$$\left(\frac{S^3}{B}\right)_{critic} = \frac{\alpha \cdot Q^2}{g} = \frac{1,10 \cdot (18,0)^2}{9,81} \cong 36,330 m^5;$$



În continuare, pentru rezolvarea problemei, se aplică metoda grafo- analitică, astfel încât, pentru diferite valori date adâncimii  $h$  a apei în canal, se obțin valorile corespunzătoare ale funcției  $\frac{S^3}{B}$ . Rezultatele calculului numeric sunt prezentate în Tabelul 6.8. Relațiile de calcul utilizate sunt următoarele:

$$\left(\frac{S^3}{B}\right)_{critic} = \frac{[(b + mh_{critic})h_{critic}]^3}{b + 2mh_{critic}} = \frac{\alpha Q^2}{g};$$

Deci, funcția calculată este:  $\left(\frac{S^3}{B}\right) = \frac{[(b + m \cdot h) \cdot h]^3}{b + 2 \cdot m \cdot h}$ ;

Tabelul 6. 8.

h [m]	m·h [m]	b+m·h [m]	B = b+2·m·h [m]	S = h·(b+m·h) [m <sup>2</sup> ]	[(b+m·h)·h] <sup>3</sup> [m <sup>6</sup> ]	$\left(\frac{S^3}{B}\right)$ , [m <sup>5</sup> ]
0,20	0,30	12,30	12,60	2,460	14,88693	1,181503
0,40	0,60	12,60	13,20	5,040	128,0240	9,6987923
0,50	0,75	12,75	13,50	6,375	259,0839	19,19141
0,60	0,90	12,90	13,80	7,740	463,68482	33,60035
0,70	1,050	13,050	14,10	9,135	762,29953	54,0638
0,80	1,20	13,20	14,40	10,560	1177,5836	81,77664
0,90	1,350	13,350	14,70	12,015	1734,4881	117,9924
1,00	1,50	13,50	15,00	13,50	2460,375	164,025
0	1	2	3	4	5	6

Se trasează grafic dependența, fig. 6.7.

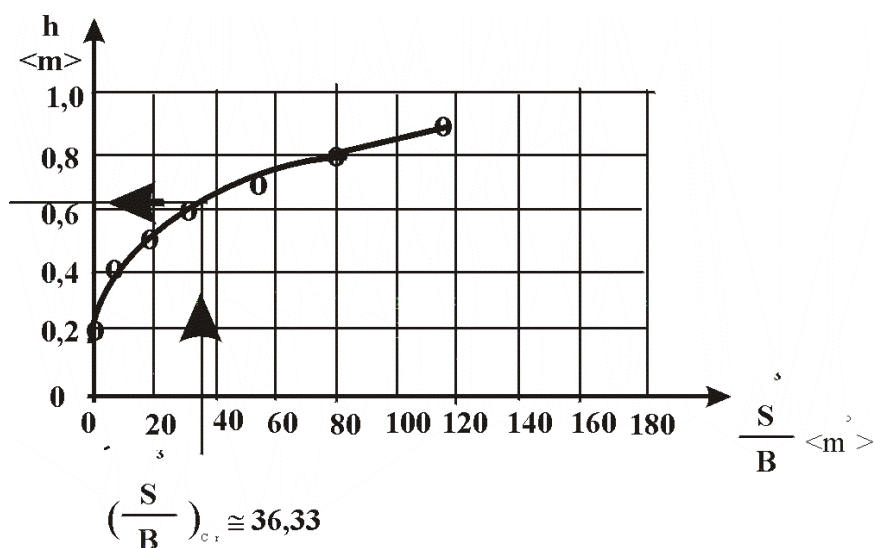


Fig. 6.7

Din fig.6.7, pentru valoarea  $(\frac{S^3}{B})_{critic} \cong 36,33m^5$ , rezultă adâncimea critică  $h_{critic} \cong 0,615$  m

**6.6.** Să se specifice care este regimul de curgere al apei într- un canal de secțiune dreptunghiulară, dacă se cunosc următoarele date:  $Q = 5,5$  m<sup>3</sup> /s;  $B = 4$  m;  $n = 0,015$ ;  $i = 0,0015$ ;  $\alpha \cong 1,1$ ;  $g \cong 9,81$  m/s<sup>2</sup>

#### REZOLVARE

Pentru rezolvarea problemei, se utilizează unul dintre criteriile de stabilire a regimului de mișcare a apei în canale cu suprafață liberă, prezentate în breviarul introductiv, și anume, criteriul adâncimilor. Prin urmare, se va calcula adâncimea în regim stați-nar și uniform,  $h_0$ , și adâncimea critică,  $h_{critic}$ .

Pentru adâncimea  $h_0$ , se vor utiliza relațiile (6.1),..., (6.18), respectiv:

$$Q = CS \cdot \sqrt{R_h \cdot i}; \quad K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = C \cdot S \cdot \sqrt{R_h};$$

în care, pentru canal de secțiune dreptunghiulară, avem:

$$S = B \cdot h; \quad P_u = B + 2 \cdot h; \quad R_h = \frac{S}{P_u} = \frac{B \cdot h}{B + 2 \cdot h}; \quad C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y; \quad y \cong \frac{1}{6};$$

Astfel, efectuând calculul numeric, se obține, pentru modulul de debit, valoarea:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{5,50}{\sqrt{0,0015}} = 142,0093893 m^3 / s;$$

În continuare, problema se rezolvă pe cale grafo- analitică, rezultatele calculului numeric fiind prezentate în Tabelul 6. 9.

Tabelul 6. 9.

$h[m]$	$S[m^2]$	$P_u[m]$	$R_h[m]$	$C[m^{0,5} / s]$	$K[m^3 / s]$
0	1	2	3	4	5
0,3	1,20	4,60	0,260869	53,290012	32,66166354
0,5	2,0	5,0	0,40	57,2251	72,38453563
0,70	2,80	5,40	0,518520	59,75441	120,4788122
0,90	3,60	5,80	0,620691	61,572653	174,633574
1,10	4,40	6,20	0,709681	62,96312	233,3834534

Se trasează dependența grafică  $h = f(K)$ , Figura nr. 6. 8.

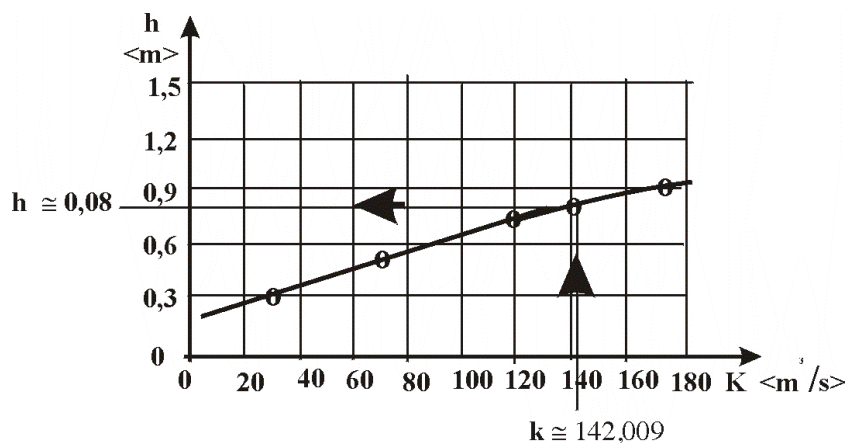


Fig.6. 8.



Din graficul prezentat mai sus, a rezultat adâncimea în regim permanent și uniform  $h_0 \cong 0,80\text{ m}$ . Adâncimea critică,  $h_{critic}$ , se determină cu relația (6.24), astfel:

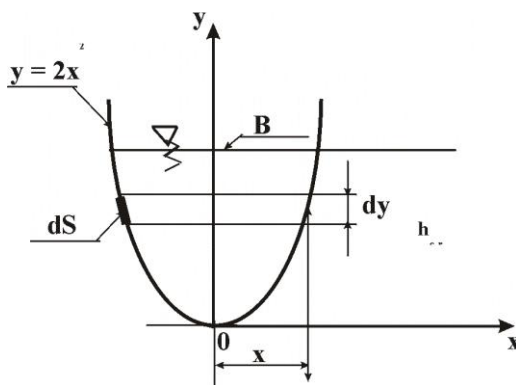
$$h_{critic} = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot B^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,10 \cdot (5,5)^2}{9,81 \cdot 4^2}} = 0,59627\text{ m};$$

Comparând, acum, cele două adâncimi,  $h_0$  și  $h_{critic}$ , rezultă:

$$h_0 \cong 0,8\text{ m} > h_{critic} \cong 0,5963\text{ m};$$

Rezultă că, în canalul dreptunghiular, avem un regim lent de mișcare.

**6.7.** Să se determine adâncimea critică,  $h_{critic}$ , în cazul unui canal parabolic deschis, prin care se transportă un debit volumic  $Q = 4\text{ m}^3/\text{s}$ . Se mai dau următoarele constante:  $\alpha \cong 1,05$ ;  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ . Ecuația parabolei generatoare a canalului este  $y = 2 \cdot x^2$ .



### REZOLVARE

Se pornește de la relația generală de calcul (6.23), respectiv:

$$\left(\frac{S^3}{B}\right)_{critic} = \frac{\alpha \cdot Q^2}{g}; \quad (6.23)$$

Suprafața secțiunii transversale critice a canalului,  $S_{critic}$  conform figurii de mai sus, este:

$$S_{critic} = 2 \cdot \int_0^{h_{critic}} dS; \quad dS = x \cdot dy;$$

$$S_{critic} = 2 \cdot \int_0^{h_{critic}} x \cdot dy = 2 \cdot \int_0^{h_{critic}} \left(\frac{y}{2}\right)^{0,5} dy = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{h_{critic}} y^{0,5} dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y^{1,5}}{1,5} \Big|_0^{h_{critic}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{h_{critic}^{1,5}}{1,5} = \frac{\sqrt{2}}{1,5} \cdot h_{critic}^{1,5} = 0,942809041 \cdot h_{critic}^{1,5};$$

$$B = 2 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_{critic}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{h_{critic}} = 1,414213562 \cdot h_{critic}^{0,5};$$

Atunci, conform relației (6.23), se obține:  $g \cdot S_{critic}^3 = \alpha \cdot B_{critic} \cdot Q^2$ ;

$$\text{Deci ;} \quad (0,942809041)^3 \cdot g \cdot h_{critic}^{4,5} = 4^2 \cdot 1,414213562 \cdot \alpha \cdot h_{critic}^{0,5};$$

$$\text{Sau ;} \quad (0,942809041)^3 \cdot 9,81 \cdot h_{critic}^{4,5} = 4^2 \cdot 1,414213562 \cdot 1,05 \cdot h_{critic}^{0,5};$$

$$8,221294828 \cdot h_{critic}^{4,5} = 22,62741699 \cdot h_{critic}^{0,5};$$

$$\text{Sau;} \quad h_{critic} = \sqrt[4]{\frac{22,62741699}{8,221294828}} = 1,28802321m;$$

**6.8.** Se cere să se dimensioneze optim hidraulic un canal de secțiune dreptunghiulară din beton, care să transporte un debit volumic  $Q = 10,0m^3/s$ . Se mai cunosc:  $i = 0,005$ ;  $n = 0,014$ .

#### REZOLVARE

Din condiția profilului hidraulic optim, (6.19), rezultă:

$$\beta_0 = m' - 2 \cdot m = 2 \cdot (\sqrt{1 + m^2} - m) = 2; (m = 0);$$

$$m' = 2 \cdot \sqrt{1 + m^2} = 2; (m = 0); \text{ deci , } \beta_0 = m' = 2;$$

Atunci, pentru  $\beta_0 = \beta \equiv B/h$ , din relația debitului (6.18), se obține:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta_0^{y+1,5}}{(\beta_0 + m')^{y+0,5}} \cdot h^{y+2,5} \cdot i^{0,5};$$

unde :  $y = \frac{1}{6} = 0,16666 \cong 0,167;$

Astfel, relația debitului devine:  $Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta_0^{5/3}}{(\beta_0 + m')^{2/3}} \cdot h^{8/3} \cdot i^{0,5};$

Explicitând adâncimea canalului,  $h$ , din ultima relație, rezultă:

$$h = \left[ \frac{Q \cdot n}{i^{0,5}} \cdot \frac{(\beta_0 + m')^{2/3}}{\beta_0^{5/3}} \right]^{3/8} = \left[ \frac{10,0 \cdot 0,014}{\sqrt{0,005}} \cdot \frac{(2+2)^{2/3}}{2^{5/3}} \right]^{3/8} = 1,184711m;$$

În continuare, rezultă:  $B = \beta_0 \cdot h = 2,1,1847109 = 2,3694218m;$

Constructiv, se adoptă lățimea  $B \cong 2,4$  m și se recalculează adâncimea canalului  $h$ , după metoda grafo –analitică cunoscută, prezentată succint în breviar. Astfel, din relația (6.16), se determină modulul de debit,  $K$ , necesar, rezultând:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{10,0}{\sqrt{0,005}} = 141,4213562m^3 / s;$$

Rezolvarea grafo-analitică a problemei, pentru lățimea adoptată  $B \cong 2,4m$ , este prezentată în Tabelul 6.10 și în graficul corespunzător din fig.6.9.

Tabelul 6.10.

h [m]	B [m]	$\beta$	K [m <sup>3</sup> /s]
0,5	2,40	4,80	42,80765829
1,0	2,40	2,40	114,4429137
1,50	2,40	1,60	196,2367269
2,0	2,40	1,20	283,0223381
0	1	2	3

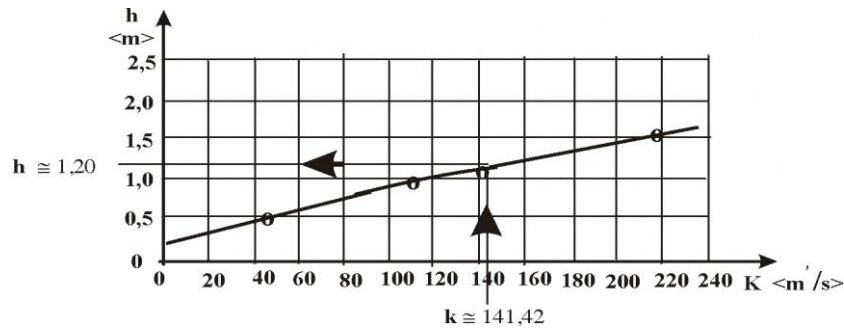


Fig. 6.9

Din graficul prezentat în fig.6.9, a rezultat adâncimea necesară a canalului dreptunghiular,  $h \cong 1,20m$ .

**6.9.** Să se determine debitul volumic  $Q$  și viteza medie de curgere,  $v$ , pentru un grad de umplere  $\mu = 0,70$  la un canal circular cu diametrul  $D=1,0m$ . Sedau următoarele:  $n = 0,0125$ ;  $i = 0,0015$ ;  $\alpha \cong 1,1$ ;  $g = 9,81m/s^2$ .

**REZOLVARE**

Pentru rezolvare, se aplică relațiile (6.1), (6.6), (6.8), (6.34) și (6.35). Astfel, pentru canalul circular având secțiunea plină, avem:

$$S_p = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,0^2}{4} = 0,785398163m^2; \quad R_{h_p} = \frac{D}{4} = \frac{1,0}{4} = 0,25m;$$

Din relația lui N.N.Pavlovski, (6.4), rezultă coeficientul lui Chezy, adică:

$$C = \frac{1}{n} \cdot R_{h_p}^y = \frac{1}{0,0125} \cdot (0,25)^{1/6} = 63,4960424 \frac{m^{0,5}}{s};$$

Pentru gradul de umplere  $\mu = \frac{h}{H} = 0,70$ , din diagrama  $\alpha = \frac{K}{K_p} = f_1(\mu)$ ,

(fig.6.1.c, pentru canale de secțiune circulară ),- rezultă raportul  $\frac{K}{K_p} \cong 0,784$  :

Viteza medie de curgere, pentru conducte complet umplute,  $v_p$ , este:

$$v_p = \frac{1}{n} \cdot R_{h_p}^{y+0,5} \cdot i^{0,5} = \frac{1}{0,0125} \cdot (0,25)^{\frac{1}{6}+0,5} \cdot (0,0015)^{0,5} = 1,229595557m/s;$$

Debitul de lichid, pentru conducte complet umplute,  $Q_p$ , este:

$$Q_p = v_p \cdot S_p = \frac{1}{n} \cdot S_p \cdot R_{h_p}^{y+0,5} \cdot i^{0,5} = \frac{1}{0,0125} \cdot 0,785398163 \cdot (0,25)^{\frac{1}{6}+0,5} \cdot (0,0015)^{0,5} = 0,965722091 m^3 / s;$$

Atunci, din relația (6.34), rezultă debitul  $Q$ , corespunzător canalului circular umplut până la nivelul  $h$ , astfel:

$$Q = K \cdot i^{0,5} = Q_p \cdot \frac{K}{K_p} = 0,965722091 \cdot 0,7840 \cong 0,757126119 m^3 / s;$$

Pentru gradul de umplere  $\mu = \frac{h}{H} = 0,70$ , din diagrama  $\beta = \frac{W}{W_p} = f_2(\mu)$ ,

(fig. 6.1.c), - rezultă raportul  $\frac{W}{W_p} \cong 1,06 \cong \frac{v}{v_p}$ .

Atunci, viteza medie de curgere  $v$ , pentru canalul umplut până la nivelul  $h$ , este dată de relația (6.1), sub forma următoare:

$$v = \frac{1}{n} \cdot R_h^{y+0,5} \cdot i^{0,5} \cong v_p \cdot f_2(\mu) = v_p \cdot \frac{v}{v_p} = 1,229595557 \cdot 1,060 \cong 1,3034 m / s;$$

Este evident că :

$$\frac{v}{v_p} = \frac{\frac{1}{n} \cdot R_h^{y+0,5} \cdot i^{0,5}}{\frac{1}{n} \cdot R_{h_p}^{y+0,5} \cdot i^{0,5}} = \left( \frac{R_h}{R_{h_p}} \right)^{y+0,5} = f_2(\mu) \cong 1,060;$$

**6.10.** Să se determine panta hidraulică  $i$  pentru o aducțiune din beton având diametrul  $D = 2,0$  m, dacă la gradul de umplere  $\mu = 0,75$ , transportă debitul de apă  $Q = 8,0 m^3 / s$ . Se dă coeficientul de rugozitate  $n = 0,0135$ .

### REZOLVARE

Această problemă este o problemă de exploatare a canalelor cu profil închis de tipul 3), din breviarul prezentat. Pentru gradul de umplere  $\mu = 0,750$ , din diagrama

$f_1(\mu) = \frac{K}{K_p}$ , rezultă raportul  $\frac{K}{K_p} \cong 0,90$ . Pentru gradul de umplere  $\mu = 0,750$ , din

diagrama  $f_2(\mu) = \frac{W}{W_p} = \frac{v}{v_p}$ , rezultă raportul  $\frac{v}{v_p} \cong 1,135$ . Atunci, pot fi determinate mărimile  $Q_p$  și  $v$ , astfel:

$$Q_p = Q \cdot \frac{K_p}{K} = 8,0 \cdot \frac{1}{0,90} = 8,888888888m^3/s \cong 8,9m^3/s;$$

$$v_p = \frac{Q_p}{S_p} = \frac{4 \cdot Q_p}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 8,9}{\pi \cdot 2^2} = 2,829421207m/s;$$

Atunci, viteza  $v$  este:

$$v \cong 1,135 \cdot v_p = 1,135 \cdot 2,829421207 \cong 3,2114m/s.$$

Apoi, avem panta hidraulică  $i$  din formula lui Chezy, ( 6.1), scrisă sub forma următoare:  $v_p = \frac{1}{n} \cdot R_{h_p}^{y+0,5} \cdot i^{0,5}$ ; rezultă:  $R_{h_p} = \frac{D}{4} = \frac{2,0}{4} = 0,5m$ ;

Deci:

$$i = \left[ \frac{v_p \cdot n}{(R_{h_p})^{y+0,5}} \right]^2 = \left[ \frac{2,829421207 \cdot 0,0135}{(0,5)^{\frac{1}{6}+0,5}} \right]^2 = 3,6765127 \cdot 10^{-3} \cong 0,003677.$$

**6.11.** Să se determine ce adâncime a apei  $h$  corespunde debitului volumic  $Q = 5,0 m^3/s$ , dacă se cunosc următoarele : diametrul conductei / canalului  $D = 3,0 m$ ; coeficientul de rugozitate  $n = 0,02$ ;  $g \cong 9,81m/s^2$ ; panta hidraulică  $i = 0,0009$ .

### **REZOLVARE**

Această problemă este o problemă de exploatare a canalelor cu profil închis de tipul 2), din breviarul prezentat anterior.

Astfel, raza hidraulică pentru conducta complet umplută,  $R_{h_p}$ , este:

$$R_{h_p} = \frac{D}{4} = \frac{3,0}{4} = 0,750m;$$

Aria secțiunii transversale a conductei,  $S_p$ , este :

$$S_p = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3,0^2}{4} = 7,06858347m^2;$$

Debitul de apă transportat prin conducta complet umplută,  $Q_p$ , este dat de relația următoare:

$$Q_p = v_p \cdot S_p = \frac{1}{n} \cdot S_p \cdot R_{h_p}^{y+0,5} i^{0,5} = \frac{1}{0,02} \cdot 7,06858347 \cdot (0,750)^{\frac{1}{6}+0,5} \cdot (0,0009)^{0,5} =$$

$$= 8,7525 \text{ m}^3 / \text{s} :$$

Atunci, raportul  $f_1(\mu)$  este dat de relația cunoscută:

$$f_1(\mu) = \frac{K}{K_p} = \frac{Q}{Q_p} = \frac{5,0}{8,752480614} = 0,571266618;$$

Pentru această valoare  $f_1(\mu) = 0,571266618$ , rezultă din graficul corespunzător pentru canale circulare, (fig. 6.1.c), valoarea gradului de umplere

$$\mu = \frac{h}{H} \equiv \frac{h}{D} \cong 0,550. \text{ Atunci, adâncimea apei în canal, } h, \text{ este:}$$

$$h \cong 0,550 \cdot D = 0,550 \cdot 3,0 \cong 1,650 \text{ m.}$$

### 6.3.2. Probleme propuse spre rezolvare

**6.12.** Să se determine lățimea minimă,  $b$ , a unui canal deschis trapezoidal, prin care se transportă un debit volumic  $Q = 8,0 \text{ m}^3/\text{s}$ , la o adâncime  $h = 1,4 \text{ m}$ . Se cunosc:  $m = 1,0$ ;  $n = 0,0135$ ;  $i = 0,001$ .

$$\mathbf{R: } b \cong 1,60 \text{ m.}$$

**6.13.** Un canal de formă trapezoidală, având înclinarea taluzelor  $m = 1,50$ , panta radierului  $i = 0,0002$  și coeficientul de rugozitate  $n = 0,012$ , transportă un debit volumic  $Q = 5,50 \text{ m}^3 / \text{s}$  cu viteza medie  $v = 1,0 \text{ m} / \text{s}$ . Se cere să se facă dimensionarea hidraulică a canalului.

$$\mathbf{R: } h \cong 1,22 \text{ m}; b = 2,684 \text{ m.}$$

**6.14.** Să se determine adâncimea critică,  $h_{critic}$ , a unui canal de secțiune trapezoidală, dacă se cunosc următoarele date:  $Q = 19,5 \text{ m}^3 / \text{s}$ ;  $b = 11,0 \text{ m}$ ;  $m = 1,50$ ;  $\alpha \cong 1,10$ ;  $g \cong 9,81 \text{ m} / \text{s}^2$ .

$$\mathbf{R: } h_{critic} \cong 0,725 \text{ m.}$$

**6.15.** Să se determine elementele geometrice  $B$  și  $h$  ale secțiunii unui canal triunghiular perat cu piatră, ( $K = 50$ ), având panta liniei de fund  $i = 0,001$ , coeficientul de rugozitate  $n = 0,02$  și care să transporte un debit volumic  $Q = 0,02 \text{ m}^3 / \text{s}$ .

$$\mathbf{R: } B \cong 0,42 \text{ m}; h \cong 0,214 \text{ m};$$

**6.16.** Să se determine dimensiunile secțiunii transversale  $h$  și  $b$  ale unui canal trapezoidal betonat, ( $K = 75$ ), care să transporte un debit volumic  $Q = 30,0 \text{ m}^3/\text{s}$ , dacă se cunosc următoarele date:  $n = 0,014$ ;  $\beta = 3,0$ ;  $m = 1,50$ ;  $i = 0,00016$ .

$$\mathbf{R: } b \cong 6,90\text{m}; h \cong 2,30\text{m}.$$

**6.17.** Să se specifice care este regimul de mișcare al apei într-un canal de secțiune trapezoidală, care să transporte un debit volumic  $Q = 10,5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Se dau:  $b = 3,50 \text{ m}$ ;  $m = 1,0$ ;  $n = 0,014$ ;  $i = 0,0005$ ;  $\alpha \cong 1,05$ ;  $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$ ;  $C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y$ ;  $y \cong \frac{1}{6}$ .

**R: Regim lent de mișcare**

**6.18.** Să se stabilească care este regimul de mișcare al apei într-un canal de secțiune dreptunghiulară, știind că sunt cunoscute următoarele:  $Q = 4 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $B = 4 \text{ m}$ ;  $n = 0,015$ ;  $i = 0,001$ ;  $\alpha \cong 1,10$ ;  $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$ ;  $C = \frac{1}{n} \cdot R_h^y$ ;  $y \cong \frac{1}{6}$ .

**R: Regim lent de mișcare**

**6.19.** Să se determine debitul volumic  $Q$  și viteza medie  $v$  într-un canal circular cu profil închis (conductă), dacă se cunosc: diametrul conductei  $D = 3,0 \text{ m}$ ; adâncimea apei în conductă  $h = 2,10 \text{ m}$ ; coeficientul de rugozitate  $n = 0,02$ ; panta hidraulică  $i = 0,0009$ .

$$\mathbf{R: } v = 1,4\text{m/s}; Q \cong 7,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

**6.20.** Să se determine panta hidraulică critică,  $i_{critic}$ , a unui canal de formă trapezoidală realizat din pământ, dacă se cunosc:  $Q = 18 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $b = 12 \text{ m}$ ;  $n = 0,026$ ;  $m = 1,50$ ;  $\alpha \cong 1,10$ ;  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

$$\mathbf{R: } i_{critic} \cong 0,007512.$$

**6.21.** Să se calculeze panta liniei de fund,  $i$ , a unui canal de secțiune circulară, cunoscând următoarele: debitul transportat  $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ ; diametrul  $D = 3 \text{ m}$ ; coeficientul de rugozitate  $n = 0,02$ ; gradul de umplere  $\mu = \frac{h}{H} \cong \frac{h}{D} = 0,4$ .

$$\mathbf{R: } i \cong 0,00251.$$

**6.22.** Să se calculeze diametrul  $D$  al unei galerii realizate din beton armat de secțiune circulară, cunoscând următoarele: panta liniei de fund  $i = 0,0009$ ; coeficientul de rugozitate  $n = 0,015$ ; debitul  $Q = 24 \text{ m}^3/\text{s}$ ; gradul de umplere  $\mu = \frac{h}{D} = 0,70$ .

$$\mathbf{R: } D \cong 4,30\text{m}.$$



## **CAPITOLUL 7**

### **MAȘINI HIDRAULICE**

#### **NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE**

*a* - accelerația,  $m/s^2$ ,

$\alpha$  - unghiul dintre viteza absolută și viteza de transport, grade,

$\beta$  - unghiul dintre viteza relativă și inversul vitezei de transport (unghiul constructiv al paletelor turbomașinilor), grade,

$g = 9,80665 m/s^2$  - accelerația gravitațională,

*m* - masa, kg,

*M* - moment,  $N \cdot m$ ,

$\mu$  - coeficientul [constitativ] de vâscozitate dinamică,  $N \cdot s \cdot m^2 = Pa \cdot s$ ,

*n* - turația, rot/min,

*v* - coeficientul [constitativ] de vâscozitate cinematică,  $m^2/s$ ,

*p* - presiune,  $N/m^2 = Pa$ ,

*P* - putere, W,

$\rho$  [= 1000 kg/m<sup>3</sup>] - densitatea [apei],

*Q* - debit volumic,  $m^3/s$ ,

*v* - viteza curentului de fluid, viteza absolută, m/s,

$v_m$  - viteza meridiană, m/s

$v_u$  - viteza tangențială (proiecția vitezei absolute pe direcția vitezei de transport), m/s,

*u* - viteza de transport (viteza tangențială), m/s

*w* - viteza relativă, m/s

*x, y, z* - coordonatele carteziene ale unui punct,

$\omega$  - viteza unghiulară, rad/s

#### **7.1 INTRODUCERE**

Mașinile hidraulice, de tip turbină sau pompă au o largă aplicație în practică și caracteristici care diferă foarte puțin între ele. Importanța lor derivă din faptul că turbinele asigură transformarea energiei hidraulice în energie stereomecanică, iar pompele ajută la vehicularea diverselor fluide. În acest capitol se vor prezenta noțiuni de fundamentale și exemple de calcul pentru cazuri inspirate din practică.

## 7.2 NOȚIUNI TEORETICE

### 7.2.1 Definiții

Prin *turbomașină* se înțelege o mașină hidropneumatică la care transferul de energie de la mașină la fluidul vehiculat sau de la fluidul vehiculat la mașină se realizează prin intermediul unui rotor cu palete, prin modificarea momentului cantității de mișcare a fluidului vehiculat. Din punct de vedere funcțional, energia specifică transferată se modifică în funcție de debitul vehiculat; din punct de vedere constructiv, ieșirea din rotor nu este etanș separată de intrarea în rotor.

Prin *mașină volumică* se înțelege o mașină hidropneumatică la care transferul de energie de la mașină la fluidul vehiculat sau de la fluidul vehiculat la mașină se realizează prin vehicularea între ieșirea din mașină și intrarea în mașină a unor volume fixe de fluid, cuprinse între componentele mobile și componentele fixe ale mașinii. Din punct de vedere funcțional, energia specifică transferată nu se modifică, practic, în funcție de debitul vehiculat; din punct de vedere constructiv, ieșirea din mașină este etanș separată de intrarea în mașină, prin interiorul acesteia.

În cazul în care *mașina hidropneumatică cedează energie* fluidului vehiculat, mașina se numește *pompa (generator hidraulic)*, în cazul în care fluidul vehiculat este un lichid, respectiv *ventilator*, în cazul în care fluidul vehiculat este un gaz. În cazul în care *fluidul vehiculat cedează energie* mașinii hidropneumatice, mașina se numește *turbină*, în cazul turbomașinilor, respectiv *motor hidraulic*, în cazul mașinilor volumice.

O mașină hidropneumatică (MHP - în figura 7.a) se constituie, în mod obligatoriu, într-un subsistem parte componentă a unui sistem care mai conține cel puțin o mașină electrică (ME) și o rețea hidropneumatică (RHP), prin care este vehiculat fluidul de lucru.

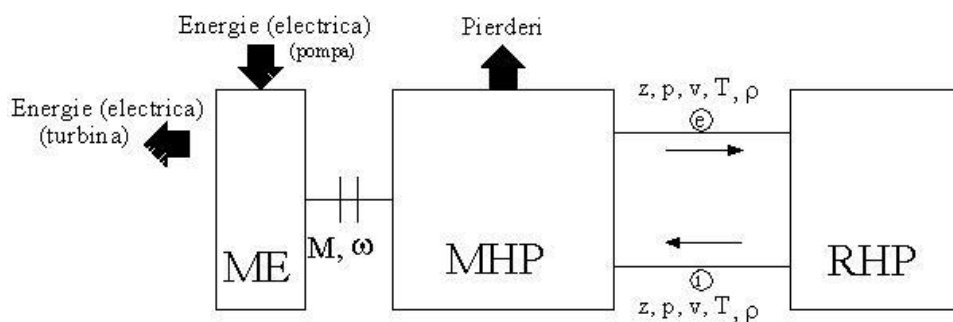


Figura 7.a. – Sistem hidropneumatic

În conexiunea mașină electrică - mașină hidropneumatică, energia specifică fiind de natură stereomecanică, se manifestă printr-un moment,  $M$ , și o viteză unghiulară,  $\omega$ , (turație -  $n$ ). În conexiunea mașină hidropneumatică - rețea hidropneumatică, energia specifică se regăsește sub forma energiei specifice geopotențiale, prin cota  $z$ , a energiei specifice piezopotențiale, prin presiunea  $p$ , a

energiei specifice cinetice, prin viteza de modul  $v$ ; în cazul fluidelor "reци", se presupune că temperatura fluidului,  $T$ , este constantă și, prin urmare, nu se vor modifica parametrii de stare a fluidului - masa specifică,  $\rho$ , și coeficientul constitutiv al vâscozității cinematice,  $\nu$ ; în cazul fluidelor "calde", temperatura va influența parametrii de stare a fluidului. Vom lua, în continuare, în considerare doar prima variantă, aceea a constanței temperaturii fluidului de lucru.

Un parametru hidrodinamic important este *debitul* de fluid vehiculat, considerat drept fluxul de fluid ce trece prin suprafața de control în unitatea de timp. În funcție de modul de exprimare, vom putea avea:

- debit volumic, notat cu  $Q$  și care se măsoară, în Sistemul Internațional de Unități de Măsură, în  $m^3/s$ ,

- debit masic, notat cu  $m$  și care se măsoară, în Sistemul Internațional de Unități de Măsură, în  $kg/s$ ,

- debit gravific, notat cu  $G$  și care se măsoară, în Sistemul Internațional de Unități de Măsură, în  $N/s$ .

Între aceste debite există relațiile:

$$\begin{cases} m = \rho \cdot Q \\ G = g \cdot m = g \cdot \rho \cdot Q \end{cases} \quad (7.1)$$

În în conexiunea mașină hidropneumatică - rețea hidropneumatică energia specifică se exprimă, de asemenea, prin intermediul unei puteri - puterea hidraulică. În funcție de debitul la care se raportează această putere, vom avea redefinită energia specifică din această conexiune, sub una din formele:

- prin raportare la debitul volumic, se obține *căderea de presiune pe mașină*:

$$\frac{Ph}{Q} = \Delta p \quad [J/m^3 = N/m^2] \quad , \quad (7.2)$$

- prin raportarea la debitul masic se obține *energia specifică masică*:

$$\frac{Ph}{m} = Y \quad [J/kg = m^2/s^2] \quad , \quad (7.3)$$

- prin raportarea la debitul gravific se obține *înălțimea de pompare*, în cazul generatoarelor hidraulice - a pompelor - respectiv *căderea*, în cazul motoarelor hidraulice - a turbinelor hidraulice:

$$\frac{Ph}{*} = H \quad [J/N = m] \quad , \quad (7.4)$$

G

Legătura dinre aceste forme ale energiei specifice schimbate între mașină și fluidul vehiculat este dată de:

$$\Delta p = g \cdot Y = g \cdot \rho \cdot H \quad , \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} Ph = Q \cdot \Delta p \\ Ph = m \cdot Y = \rho \cdot Q \cdot Y \\ Ph = G \cdot H = g \cdot \rho \cdot Q \cdot H \end{cases} \quad . \quad (7.6)$$

**7.2.2. Ecuațiile fundamentale ale turbomașinilor. Energii specifice**

Momentul hidraulic transferat între rotorul mașinii hidraulice și lichidul vehiculat, dedus din ecuația transferului momentului cinetic pe tuburi de curent, este, cu notațiile din figurile 7.b și 7.c:

$$M_h = \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - r_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1)) = \begin{cases} \text{POMPE} \\ \text{TURBINE} \end{cases} \left| \begin{aligned} M_h &= \rho \cdot Q \cdot (r_1 \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha_1) - r_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2)) = \\ &= \rho \cdot Q \cdot (r_2 \cdot v_{u2} - r_1 \cdot v_{u1}) \\ &= \rho \cdot Q \cdot (r_1 \cdot v_{u1} - r_2 \cdot v_{u2}) \end{aligned} \right. \quad (7.7)$$

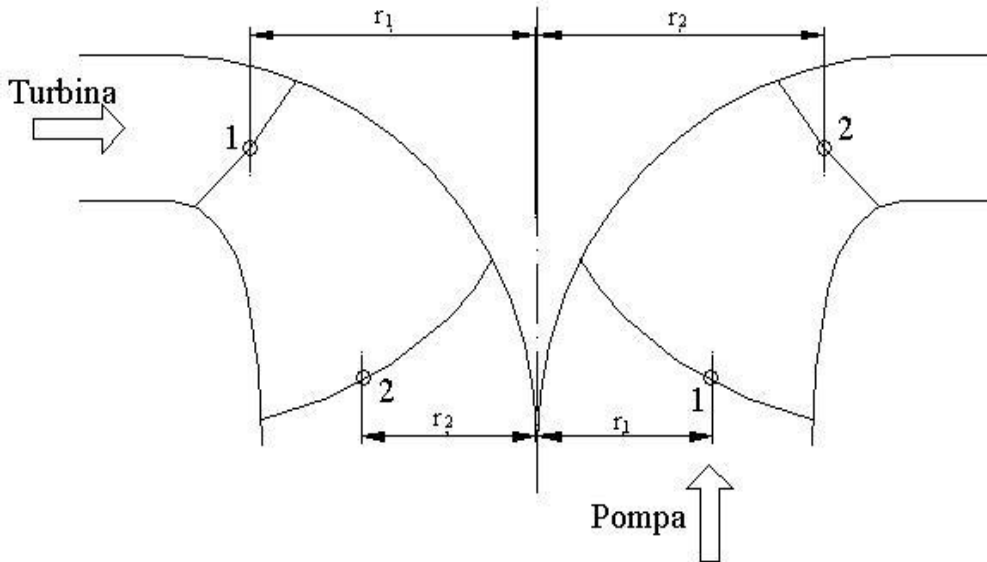


Figura 7.b. Rotorul turbomașinilor radial-axiale și sensul de curgere al curentului

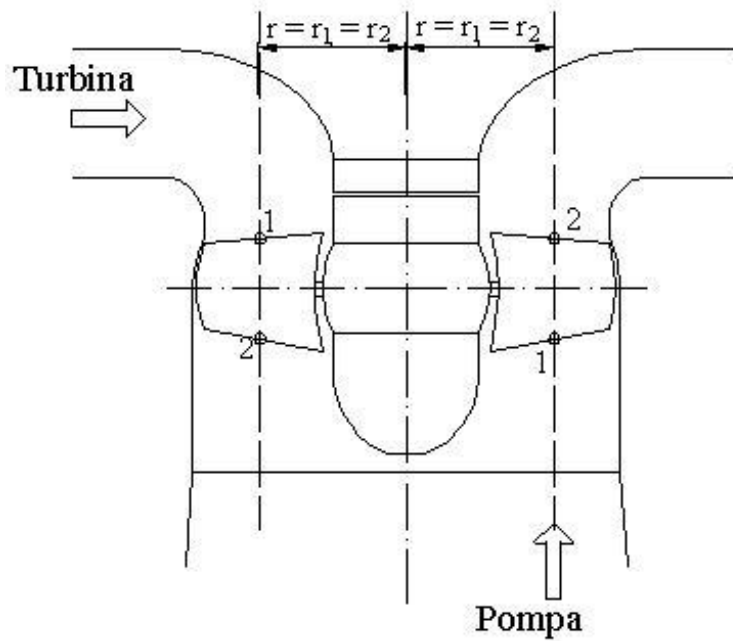


Figura 7.c. Rotorul turbomașinilor axiale și sensul de curgere al curentului

Se menționează faptul că la intrarea în rotorul de pompă, respectiv la ieșirea din rotorul de turbină,  $\alpha \approx 90^\circ$ , respectiv viteza tangențială  $v_u \approx 0$ .

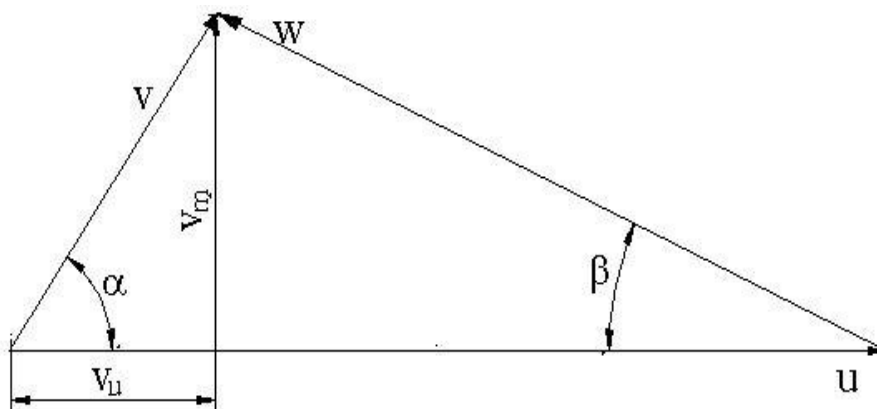


Figura 7.d. Triunghiul de viteze

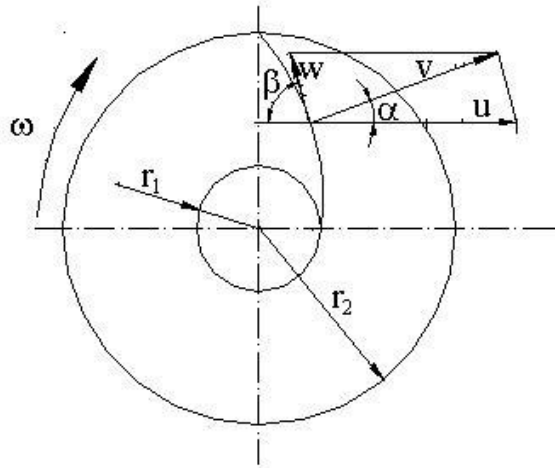


Figura 7.e Poziționarea triunghiului de viteze pe paleta unei turbomașini radial-axiale

Relația vectorială dintre viteze este:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

Puterea hidraulică va fi, de aici:

$$P_h = P_u = \rho \cdot Q \cdot \omega \cdot (r_2 \cdot v_{u2} - r_1 \cdot v_{u1}) = \begin{cases} \text{POMPE} \\ \text{TURBINE} \end{cases} \left| \begin{aligned} P_h = P_{abs} = \rho \cdot Q \cdot \omega \cdot (r_1 \cdot v_{u1} - r_2 \cdot v_{u2}) = \\ = \rho \cdot Q \cdot (u_2 \cdot v_{u2} - u_1 \cdot v_{u1}) \end{aligned} \right. = \rho \cdot Q \cdot (u_1 \cdot v_{u1} - u_2 \cdot v_{u2}) \quad (7.8)$$

Energia specifică transferată de rotorul turbomașinii fluidului vehiculat va fi dată de *ecuația fundamentală în unghiuri*:

$$H = \frac{P_h}{\rho \cdot g \cdot Q} = \frac{\rho \cdot Q \cdot (u_2 \cdot v_{u2} - u_1 \cdot v_{u1})}{\rho \cdot g \cdot Q} = \begin{cases} \text{POMPE (înălțimea de pompare)} \\ \text{TURBINE (căderea)} \end{cases} \left| \begin{aligned} H = \frac{P_h}{\rho \cdot g \cdot Q} = \frac{\rho \cdot Q \cdot (u_1 \cdot v_{u1} - u_2 \cdot v_{u2})}{\rho \cdot g \cdot Q} = \\ = \frac{1}{g} \cdot (u_2 \cdot v_{u2} - u_1 \cdot v_{u1}) \end{aligned} \right. = \frac{1}{g} \cdot (u_1 \cdot v_{u1} - u_2 \cdot v_{u2}) \quad (7.9)$$

Introducând în (7.9) teorema lui Pitagora generalizată (teorema cosinusului), care, pentru triunghiul de viteze se scrie sub forma:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(\alpha) = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v_u \quad ,$$

rezultă ecuația fundamentală în viteze:

<p style="text-align: center;">POMPE (înălțimea de pompare)</p> $H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2 \cdot g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2 \cdot g}$	<p style="text-align: center;">TURBINE (căderea)</p> $H = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2 \cdot g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2 \cdot g} \quad (7.10)$
---	---

### 7.2.3. Bilanțul energetic al turbomașinilor

Eficiența mașinii este dată de *randamentul* acesteia, exprimat ca raportul dintre puterea utilă ( $P_u$ ) și puterea absorbită ( $P_{abs}$ ). În funcție de tipul de mașină, în figurile 7.f și 7.g. sunt reprezentate schemele de bilanț energetic al turbomașinilor pentru pompe și turbine hidraulice.

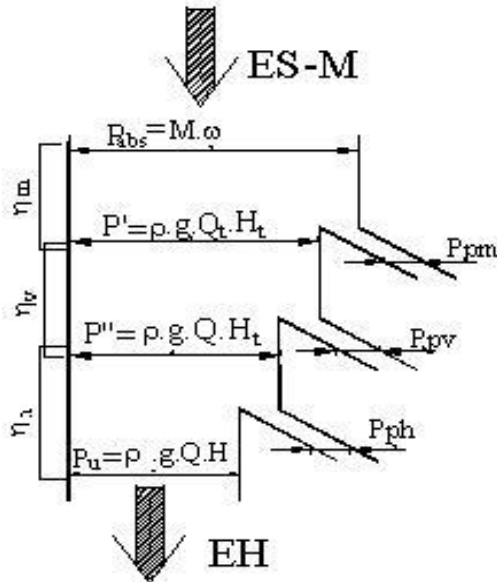


Figura 7.f. Bilanțul energetic la pompe

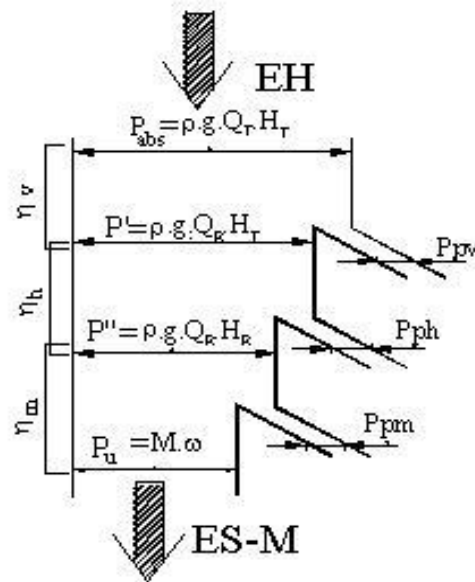


Figura 7.g. Bilanțul energetic la turbine

În schemele de bilanț s-au notat:

- prin  $P_{pm}$  - puterea pierdută mecanic,
- prin  $P_{pv}$  - puterea pierdută volumic,
- prin  $P_{ph}$  - puterea pierdută hidraulic,
- prin  $Q_t$  - debitul teoretic (debitul vehiculat prin rotorul pompei),
- prin  $H_t$  - înălțimea teoretică de pompare (energia specifică transferată

de pompă lichidului vehiculat, în ipoteza lichidului ideal - neglijându-se pierderile hidraulice),

- prin  $Q_r$  - debitul teoretic (debitul vehiculat prin rotorul turbinei),
- prin  $H_r$  - căderea "rotorului" (energia specifică transferată de lichidul vehiculat turbinei, în ipoteza lichidului ideal - neglijându-se pierderile hidraulice),
- prin  $Q_T$  - debitul vehiculat prin turbină,
- prin  $H_T$  - căderea turbinei,
- prin  $Q_p$  - debitul pierdut (prin șicanele de etanșare dinamică a rotorului),
- prin  $h_p$  - pierderea hidraulică în mașina hidraulică respectivă.

În tabelul de mai jos sunt prezentate relațiile bilanțului energetic, definit cu notațiile din figurile 7.f și 7.g.

POMPE	TURBINE
- randamentul mecanic: $\eta_m = \frac{P'}{P_{abs}} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_t \cdot H_t}{M \cdot \omega} \quad (5.11)$	- randamentul volumic: $\eta_v = \frac{P'}{P_{abs}} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_r \cdot H_T}{\rho \cdot g \cdot Q_T \cdot H_T} = 1 - \frac{Q_p}{Q_T} \quad (7.15)$
- randamentul hidraulic: $\eta_h = \frac{P''}{P'} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_t \cdot H}{\rho \cdot g \cdot Q_t \cdot H_t} = 1 - \frac{h_p}{H_t} \quad (5.12)$	- randamentul hidraulic: $\eta_h = \frac{P''}{P'} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_r \cdot H_r}{\rho \cdot g \cdot Q_r \cdot H_T} = 1 - \frac{h_p}{H_T} \quad (7.16)$
- randamentul volumic: $\eta_v = \frac{P_u}{P''} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{\rho \cdot g \cdot Q_t \cdot H} = 1 - \frac{Q_p}{Q_t} \quad (5.13)$	- randamentul mecanic: $\eta_m = \frac{P_u}{P''} = \frac{M \cdot \omega}{\rho \cdot g \cdot Q_r \cdot H_r} \quad (7.17)$
- randamentul total: $\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{M \cdot \omega} \quad (5.14)$	- randamentul total: $\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{M \cdot \omega}{\rho \cdot g \cdot Q_T \cdot H_T} \quad (7.18)$

#### 7.2.4. Similitudinea turbomașinilor. Funcții caracteristice

În anumite cazuri, și întotdeauna când se fac încercări pe modele (la scară redusă) - în special în cazul turbinelor hidraulice, se apelează la *relații de asemănare (relații de similitudine)*.

În cazul în care trebuie recalculate mărimile energetice ale turbomașinilor pentru două turbomașini asemenea geometric (mașina 1 și mașina 2), se folosesc relațiile:



Relații adimensionale $\frac{Q_1}{\omega_1 \cdot D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 \cdot D_2^3}$	sau	Relații dimensionale $\frac{Q_1}{n_1 \cdot D_1^3} = \frac{Q_2}{n_2 \cdot D_2^3} \quad (7.19)$	
$\frac{g_1 \cdot H_1}{\omega_1^2 \cdot D_1^2} = \frac{g_2 \cdot H_2}{\omega_2^2 \cdot D_2^2}$	sau	$\frac{H_1}{n_1^2 \cdot D_1^2} = \frac{H_2}{n_2^2 \cdot D_2^2} \quad (7.20)$	
$\frac{P_1}{\rho_1 \cdot \omega_1^3 \cdot D_1^5} = \frac{P_2}{\rho_2 \cdot \omega_2^3 \cdot D_2^5}$	sau	$\frac{P_1}{n_1^3 \cdot D_1^5} = \frac{P_2}{n_2^3 \cdot D_2^5} \quad (7.21)$	

Prin eliminarea diametrului, din relațiile (7.19) ... (7.21) se obțin funcțiile caracteristice:

- viteza caracteristică adimensională (viteza unghiulară a rotorului unei turbomașini care are energia specifică de 1 m, la un debit de 1 m<sup>3</sup>/s):

$$\omega_{0ad} = \omega \cdot \frac{\sqrt{Q}}{(g \cdot H)^{3/4}}, \quad (7.22)$$

- turația caracteristică (turația rotorului unei turbomașini care are energia specifică de 1 m, la un debit de 1 m<sup>3</sup>/s) (turația se introduce în rot/min, debitul în m<sup>3</sup>/s, iar energia specifică în m):

$$n_0 = n_q = n \cdot \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}}, \quad (7.23)$$

- turația specifică (turația rotorului unei turbomașini care are energia specifică de 1 m, la o putere de 1 kW sau 1CP) (turația se introduce în rot/min, puterea în kW sau în kW, iar energia specifică în m):

$$n_s = n \cdot \frac{\sqrt{P}}{H^{5/4}}, \quad (7.24)$$

- turația specifică redusă:

$$n_s^* = \frac{n_s}{(2 \cdot g)^{3/4} \cdot (\rho \cdot g)^{1/2}}. \quad (7.25)$$

În cazul turbinelor hidraulice se utilizează mărimile dublu unitare:

- debitul dublu unitar (debitul unei turbine care are o cădere de 1 m și diametrul de 1 m):

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2 \cdot \sqrt{H}} \cdot \left( \frac{\eta_{h11}}{\eta_h} \right)^{1/2}, \quad (7.26)$$

- turația dublu unitară (turația unei turbine care are o cădere de 1 m și diametrul de 1 m):

$$n_{11} = \frac{n \cdot D}{\sqrt{H}} \cdot \left( \frac{\eta_{h11}}{\eta_h} \right)^2, \quad (7.27)$$

- puterea dublu unitară (puterea unei turbine care are o cădere de 1 m și diametrul de 1 m):

$$P_{11} = \frac{P}{D^2 \cdot H^{3/2}} \cdot \left( \frac{\eta_{h11}}{\eta_h} \right)^{3/2}, \quad (7.28)$$

Relațiile (7.26) ... (7.28) se pot folosi și pentru cazul în care se presupune că turbinele comparate au același randament hidraulic, în acest caz din relații dispărând raportul randamentelor.

În cazul în care trebuie recalculate performanțele unei turbine hidraulice model (m) pentru o turbină hidraulică industrială (i), se folosesc relațiile:

$$\eta_i \cdot \frac{D_i}{\sqrt{H_i} \cdot \sqrt{\eta_{hi}}} = \eta_m \cdot \frac{D_m}{\sqrt{H_m} \cdot \sqrt{\eta_{hm}}}, \quad (7.29)$$

respectiv:

$$\frac{P_i}{\rho_i \cdot g_i \cdot D_i^2 \cdot H_i^{3/2}} \cdot \frac{1}{\eta_{mi} \cdot \eta_{hi}^{3/2}} = \frac{P_m}{\rho_m \cdot g_m \cdot D_m^2 \cdot H_m^{3/2}} \cdot \frac{1}{\eta_{mm} \cdot \eta_{hm}^{3/2}}. \quad (7.30)$$

În aceste relații, efectul de scară - corecția de randament - se face prin relația:

$$\frac{1 - \eta_i}{1 - \eta_m} = V \cdot \left( \left( \frac{H_m}{H_i} \right)^{1/12,4} \cdot \left( \frac{D_m}{D_i} \right)^{1/6,2} \right) + 1 - V, \quad (7.31)$$

în care factorul V se poate extrage din diagrama din figura 7.h.

### 7.2.5. Alegerea pompelor

În vederea alegerii pompelor pentru o anumită aplicație, trebuie cunoscută/determinată curba caracteristică a rețelei deservite de pompă. Schema principială a unei instalații de pompare este prezentată în figura 7.i. Curba caracteristică a rețelei este dată, cu notațiile din figurile 7.i și 7.j, de:

$$H_R = H_{st} + K \cdot Q^2 = \left( z_R - z_A + \frac{p_R}{\rho \cdot g} - \frac{p_A}{\rho \cdot g} \right) + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left( \sum_i \left( \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} + \sum_j \zeta_j \right) \cdot \frac{1}{S_i^2} \right) \cdot Q^2 \quad (7.32)$$

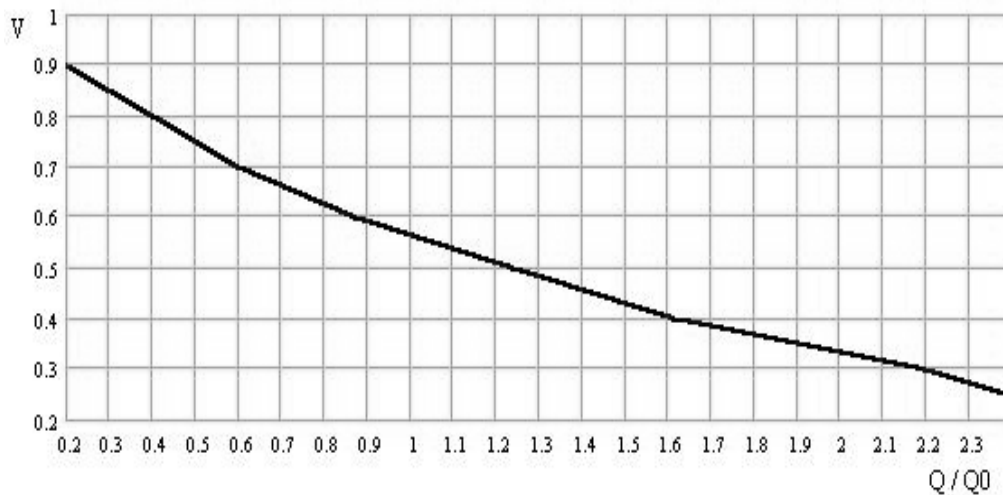


Figura 7.h. Variația coeficientului "V" în funcție de debit

unde "i" este numărul de tronsoane de conductă de același diametru, iar "j" este numărul de rezistențe locale de pe tronsonul "i". Coeficienții de pierderi longitudinale și locale se calculează în conformitate cu cele prezentate în capitolele anterioare.

Prin punct de funcționare - punctul de coordoante ( $Q_0, H_0$ ) - se înțelege punctul de intersecție a curbei caracteristice a pompei cu curba caracteristică a rețelei - a se vedea figura 7.k.

Pompa se alege astfel încât în zona punctului de funcționare randamentul să aibă o valoare cât mai mare - să fie cât mai aproape de maximumul curbei  $\eta(Q)$  - iar valoarea caracteristicii de cavitație (NPSH) să fie cât mai apropiată de valoarea din zona palierului.

### 7.3 APLICAȚII

#### 7.3.1. Probleme rezolvate

7.1. Să se traseze triunghiurile de viteze pentru intrarea respectiv ieșirea

- a) dintr-o pompă centrifugă;
- b) dintr-o pompă axială.

#### REZOLVARE

a.) Conform figurilor 7.b., 7.d. și 7.e., vom avea situația din figurile 7.1 și, respectiv, 7.m.

b) Conform figurilor 7.c. și 7.d., vom avea triunghiurile de la intrare și de la ieșire reprezentate suprapus, ca în figura 7.m:

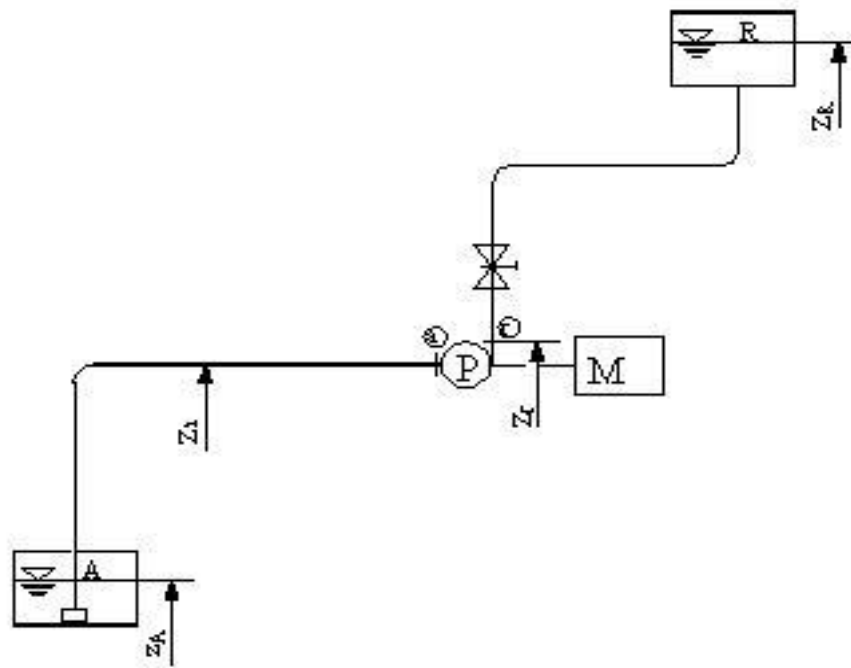


Fig. 7.i. Schema principială a unei instalații de pompare

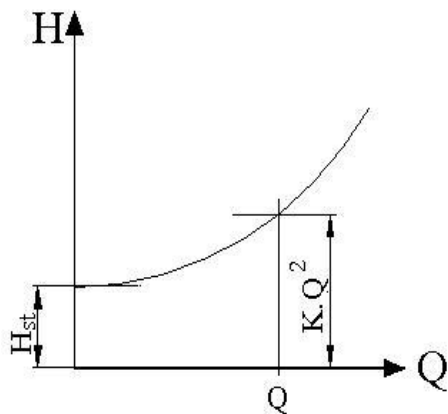


Fig. 7.j. Curba caracteristică a rețelei

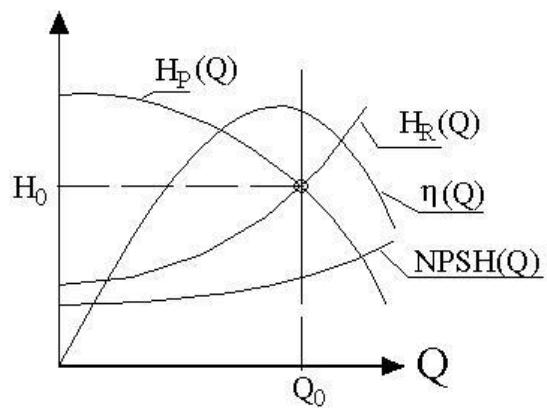


Fig. 7.k. Punctul de funcționare pompă - rețea

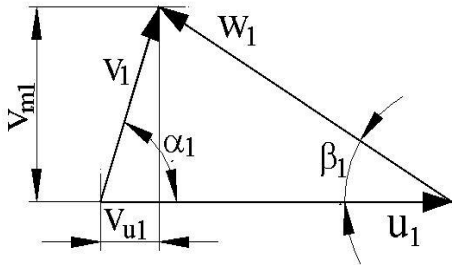


Figura 7.l. Triunghiul de intrare în rotorul unei pompe centrifuge

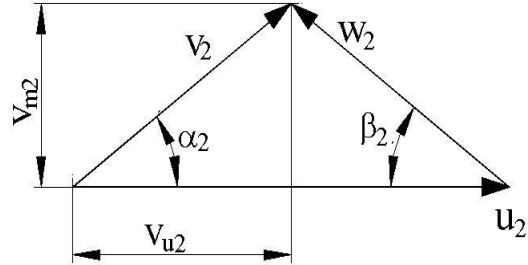


Figura 7.m. Triunghiul de ieșire din rotorul unei pompe centrifuge

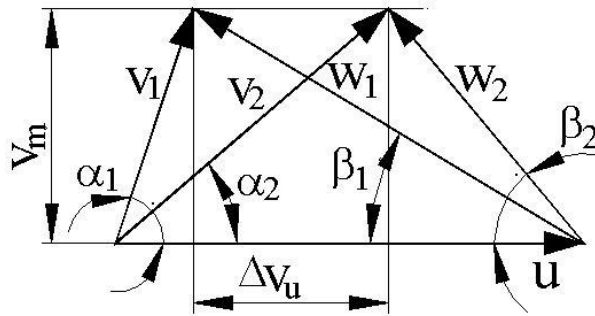


Figura 7.n. Triunghiurile de viteze la intrarea și ieșirea din rotorul unei pompe centrifuge

**7.2.** Fie o turbină model radial-axială de tip Francis care are o turație de 600 rot/min la un debit de  $0,4 \text{ m}^3/\text{s}$  și un randament hidraulic de 85%. Dimensiunile geometrice caracteristice sunt: raza caracteristică la intrarea în rotor  $r_1 = 0,45 \text{ m}$ , aria de trecere a apei la intrarea în rotor  $S_1 = 0,1 \text{ m}^2$ , raza caracteristică la ieșirea din rotor  $r_2 = 0,25 \text{ m}$ , aria de trecere a apei la ieșirea din rotor  $S_2 = 0,085 \text{ m}^2$ , unghiul constructiv la ieșirea din rotor  $\beta_2 = 87^\circ 30'$ . Unghiul de intrare a apei în rotor este  $\alpha_1 = 15^\circ$ .

Să se calculeze:

- Puterea cedată de apă turbinei model.
- Caderea turbinei și energia specifică transferată de apă turbinei.

### REZOLVARE

a.) Mai întâi se calculează elementele triunghiurilor de viteze de la intrare și de la ieșire. Conform figurii 7.b, vitezele din triunghiul de intrare sunt:

$$u_1 = r_1 \cdot \omega = r_1 \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 0,45 \cdot \frac{\pi \cdot 600}{30} = 28,274 \text{ m/s},$$

$$v_{m1} = \frac{Q}{S_1} = \frac{0,4}{0,1} = 4,000 \text{ m/s},$$

$$v_{u1} = \frac{v_{m1}}{\operatorname{tg}(\alpha_1)} = \frac{4,000}{\operatorname{tg}(15)} = 14,928 \text{ m/s}.$$

Conform figurii 7.d., vitezele din triunghiul de ieșire sunt:

$$u_2 = r_2 \cdot \omega = r_2 \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 0,25 \cdot \frac{\pi \cdot 600}{30} = 15,708 \text{ m/s},$$

$$v_{m2} = \frac{Q}{S_2} = \frac{0,4}{0,085} = 4,706 \text{ m/s},$$

$$v_{u2} = u_2 - \frac{v_{m2}}{\operatorname{tg}(\beta_2)} = 15,708 - \frac{4,706}{\operatorname{tg}(87,5)} = 15,503 \text{ m/s}.$$

Puterea, conform relației (7.8), este dată de:

$$P_h = P_{\text{abs}} = \rho \cdot Q \cdot (u_1 \cdot v_{u1} - u_2 \cdot v_{u2}),$$

respectiv:

$$P_h = 1000 \cdot 0,4 \cdot (28,274 \cdot 14,928 - 15,708 \cdot 15,503) = 71429 \text{ W}.$$

**b.)** Apelând ecuația fundamentală în unghiuri (relația (7.9)), căderea turbinei va fi:

$$H = \frac{1}{g} \cdot (u_1 \cdot v_{u1} - u_2 \cdot v_{u2}),$$

respectiv:

$$H_T = \frac{1}{9,80665} \cdot (28,274 \cdot 14,928 - 15,708 \cdot 15,503) = 18,209 \text{ m}.$$

Din bilanțul energetic, conform relației (7.16),

$$H_r = \frac{H_T}{\eta_h} = \frac{18,209}{0,85} = 21,423 \text{ m}.$$

**7.3.** Pentru turbina model descrisă în problema 7.1., să se calculeze funcțiile caracteristice și mărimile dublu unitare.

### **REZOLVARE**

Turația specifică, conform relației (7.24), este:

$$n_s = n \cdot \frac{\sqrt{P}}{H^{5/4}} = 600 \cdot \frac{\sqrt{71,429}}{18,269^{5/4}} = 134,81.$$

Conform relației (7.23), turația caracteristică este:

$$n_0 = n_q = n \cdot \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = 600 \cdot \frac{\sqrt{0,4}}{18,269^{3/4}} = 43,05.$$

Turația specifică redusă va fi dată de relația (7.25):

$$n_s^* = \frac{n_s}{(2 \cdot g)^{3/4} \cdot (\rho \cdot g)^{1/2}} = \frac{134,81}{(2 \cdot 9,80665)^{3/4} \cdot (1000 \cdot 9,80665)^{1/2}} = 0,146 .$$

**7.4.** La încercarea unei pompe la turația de 1450 rot/min, s-au obținut următoarele rezultate:  $Q = 75$  l/min.  $H = 18,5$  J/N,  $P_{abs} = 3,5$  kW. Încercarea s-a făcut cu apă ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>), iar diametrul de ieșire din rotor a fost de 175 mm.

Să se recalculeze parametrii energetici ai unei pompe asemenea cu cea încercată, dar care are un diametru de ieșire de 0,2 m, este antrenată la o viteză unghiulară de 310 s<sup>-1</sup>, și vehiculează țitei, cu  $\rho = 830$  kg/m<sup>3</sup>. Se dă:  $g = 9,80665$  m/s<sup>2</sup>.

### REZOLVARE

Întâi se calculează turația pompei asemenea:

$$n_2 = \frac{30 \cdot \omega_2}{\pi} = \frac{30 \cdot 310}{\pi} = 2960,28 \text{ rot/min} .$$

Pentru recalcularea performanțelor celei de-a doua pompe se folosesc relațiile (7.19) ... (7.21). Rezultă:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{n_2 \cdot D_2^3}{n_1 \cdot D_1^3} = 75 \cdot \frac{2960,28 \cdot 0,2^3}{1450 \cdot 0,175^3} = 228,561 \text{ l/s} ,$$

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{n_2^2 \cdot D_2^2}{n_1^2 \cdot D_1^2} = 18,5 \cdot \frac{2960,28^2 \cdot 0,2^2}{1450^2 \cdot 0,175^2} = 100,713 \text{ J/N} = 100,713 \text{ m} ,$$

$$P_{abs2} = P_{abs1} \cdot \frac{\rho_2 \cdot n_2^3 \cdot D_2^5}{\rho_1 \cdot n_1^3 \cdot D_1^5} = 3,5 \cdot \frac{830 \cdot 2960,28^3 \cdot 0,2^5}{1000 \cdot 1450^3 \cdot 0,175^5} = 69,959 \text{ kW} .$$

**7.5.** O turbopompă este antrenată de un motor electric, absorbind din rețeaua electrică o putere de 7,45 kW. Pompa realizează o înălțime de pompare de 12 m, la o turație de 725 rot/min, randamentul ei fiind de 89 %.

Să se determine turația specifică și turația caracteristică a turbopompei, știind că randamentul motorului este de 90 % și că vehiculează apă ( $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>). Se dă:  $g = 9,80665$  m/s<sup>2</sup>.

### REZOLVARE

Puterea absorbită de pompă de la motorul electric este de:

$$P_{absP} = P_{absgrup} \cdot \eta_{motor} = \frac{7,45}{0,9} = 6,705 \text{ kW} .$$

Cu relația (7.24), turația specifică este:

$$n_s = n \cdot \frac{\sqrt{P_{absP}}}{H^{5/4}} = 725 \cdot \frac{\sqrt{6,705}}{12^{5/4}} = 84,045 .$$

Pentru a calcula turația caracteristică, dată de relația (7.23), trebuie calculat, mai întâi, debitul vehiculat de pompă:

$$Q = \frac{P_{\text{absP}}}{\rho \cdot g \cdot H \cdot \eta_{\text{pompa}}} = \frac{6705}{1000 \cdot 9,80665 \cdot 12 \cdot 0,89} = 0,06402 \text{ m}^3/\text{s} .$$

Turația specifică va fi:

$$n_0 = n \cdot \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = 725 \cdot \frac{\sqrt{0,07904}}{12^{3/4}} = 31,614 .$$

**7.6.** Să se transporte un debit de  $110 \text{ m}^3/\text{h}$  dintr-o soluție cu densitatea relativă de 1,12 dintr-un bazin într-un recipient în care este o suprapresiune de 0,4 at. Diferența de cotă între suprafața liberă a lichidului din recipient și bazin este de 10,8 m. Conducta are un diametru de 150 mm și o lungime de 140 m; conducta se consideră *lungă*, coeficientul de pierderi longitudinale fiind 0,0278.

Să se calculeze înălțimea de pompare necesară, știind că  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$  și  $\rho_{\text{apă}} = 997 \text{ kg/m}^3$ .

#### REZOLVARE

Debitul este  $Q = 0,03056 \text{ m}^3/\text{s}$ , iar densitatea lichidului vehiculat:

$$\rho_1 = 1,12 \cdot \rho_{\text{apă}} = 1116,64 \text{ kg/m}^3 . \text{ Înălțimea statică este } H_{\text{st}} = 10,8 + \frac{P}{\rho \cdot g} , \text{ adică, după}$$

$$\text{înlocuiri: } H_{\text{st}} = 10,8 + \frac{0,4 \cdot 10^4 \cdot g}{\rho_1 \cdot g} = 14,38218 \text{ m, iar modulul de rezistență al rețelei:}$$

$$K = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right)^2} = 4236,29 \text{ s}^2/\text{m}^5 . \text{ Înălțimea de pompare necesară va fi:}$$

$$H = H_{\text{st}} + K \cdot Q^2 = 14,38218 + 4236,29 \cdot 0,03056^2 = 18,33736 \text{ m}$$

Presupunând că, pe un interval larg de debit coeficientul Darcy - Weisbach nu se modifică, sau se modifică foarte puțin, se poate trasa curba caracteristică a rețelei, prezentată în figura 7.o.



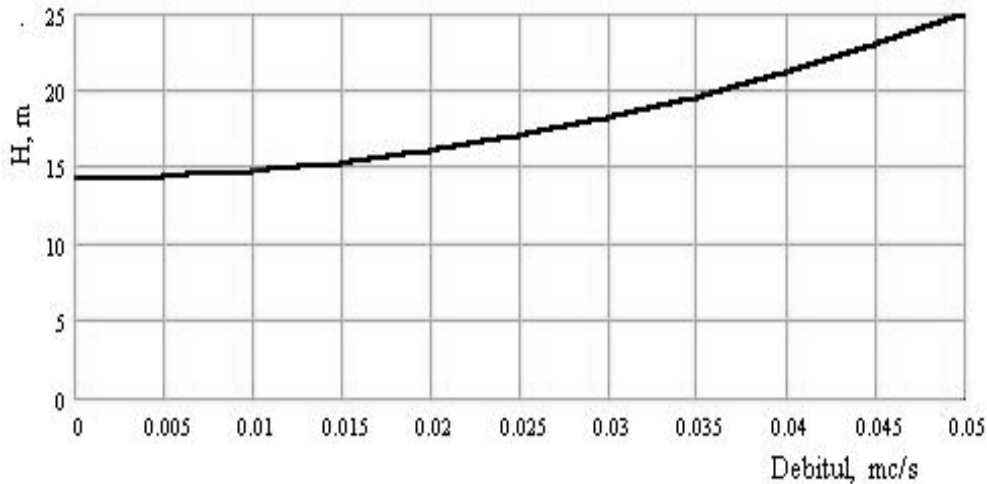


Figura 7.o. Curba caracteristică a rețelei

**7.3.2. Probleme propuse spre rezolvare**

7.7. Să se traseze triunghiurile de viteze pentru intrarea respectiv ieșirea

- a) dintr-o turbină radial-axială;
- b) dintr-o turbină axială.

7.8. O pompă centrifugă cu diametrul rotorului de 200 mm, antrenată la o viteză unghiulară de  $304 \text{ s}^{-1}$  și vehiculând apă ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) realizează, în urma încercărilor, următorii parametri:  $Q = 12,5 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $H = 50 \text{ m}$ ,  $\eta = 70 \%$ .

Să se recalculeze parametrii energetici ai unei pompe asemenea geometric cu ea, având diametrul de 0,4 m, acționată la o turație de 1450 rot/min și vehiculând un lichid cu masa specifică de  $1200 \text{ kg/m}^3$ . Se dă:  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ .

$$\mathbf{R: P_{abs 1} = 2,432 \text{ kW}, n_1 = 2903 \text{ rot/min}, Q_2 = 49,949 \text{ m}^3/\text{h}, H_2 = 49,847 \text{ m}, P_{abs 2} = 8,082 \text{ kW.}}$$

7.9. O pompă centrifugă este antrenată la o viteză unghiulară de  $304 \text{ s}^{-1}$  și vehiculează apă ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ), realizând, în urma încercărilor, următorii parametri:  $Q = 12,5 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $H = 50 \text{ m}$ ,  $\eta_p = 70 \%$ .

Să se calculeze turația specifică a pompei. Se dă:  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ .

$$\mathbf{R: Turația pompei este } n = 2903 \text{ rot/min. Puterea absorbită de pompă este } P_{abs P} = 2,4322 \text{ kW, iar turația specifică: } n_s = 34,05.$$

**7.10.** Fie instalația prezentată în figura 7.p., pentru care lungimea totală a rețelei de conducte este de 4000 m, diametrul echivalent al conductei care compune rețeaua este de 10 m, și se admite un coeficient de pierderi longitudinale (Darcy - Weisbach) de 0,03. Rețeaua de conducte se asimilează cu o conductă lungă. Presupunând că mașina hidraulică montată în instalație este o mașină reversibilă, să se determine înălțimea de pompare,  $H_P$ , atunci când funcționează ca pompă, respectiv căderea,  $H_T$ , atunci când funcționează ca turbină.

Se dă  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ .

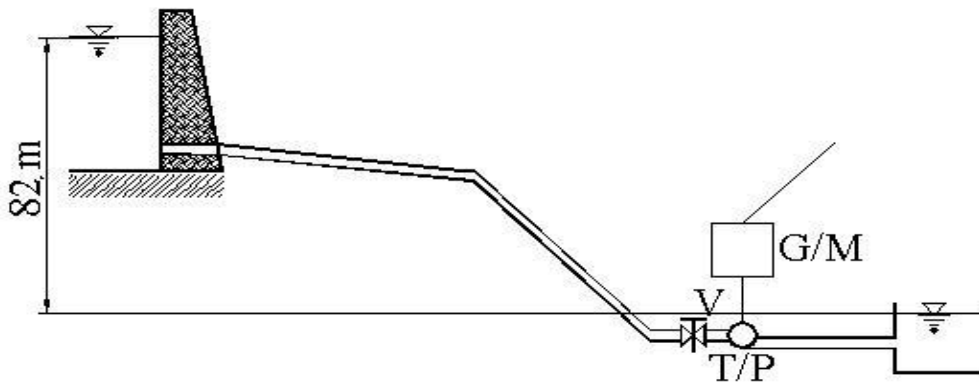


Figura 7.p. Schema instalației

**R:** În cazul funcționării ca pompă, înălțimea de pompare este  $H_P = 83,289 \text{ m}$ , iar în cazul funcționării ca turbină, căderea va fi de  $H_T = 80,71 \text{ m}$ .

## CAPITOLUL 8

### PROBLEME PROPUSE LA CONCURSURILE PROFESIONALE

#### NOTAȚII ȘI SEMNIFICAȚII FIZICE

- $p$  - presiunea, în  $N/m^2$   
 $p_{at} = 101325 N/m^2$  - presiunea atmosferică  
 $\rho$  - densitatea mediului lichid, în  $kg/m^3$   
 $m$  - masa, în  $kg$   
 $V$  - volumul, în  $m^3$   
 $V_i, i = i, f$  - volumul inițial sau final de lichid, în  $m^3$   
Vol - volumul de proiecție, utilizat în calculul forței hidrostactice verticale de tip arhimedic, în  $m^3$   
 $G$  - greutatea, în  $N$   
 $F$  - forța cu care fluidul acționează asupra frontierei solide (hidrostatică sau dinamică), în  $N$   
 $g = 9,80665 m/s^2$  - accelerația gravitațională  
 $v$  - viteza fluidului în conductă, în  $m/s$   
 $a$  - accelerația mișcării uniforme de translație, în  $m/s^2$   
 $\omega$  - viteza unghiulară a mișcării circulare uniforme, în  $rad/s$   
 $n$  - turația, în  $rot/s$   
 $\alpha_i - i = 1..n$  - Coeficientul Coriolis (de neuniformitate a vitezei)  
 $\beta_i - i = 1..n$  - Coeficientul Coriolis (de neuniformitate a vitezei)  
 $\gamma$  - greutatea specifică, în  $N/m^3$   
 $\tau$  - efortul (tensiunea) tangențial, în  $N/m^2$   
 $\nu$  - coeficientul cinematic de vâscozitate, în  $m^2/s$   
 $\eta$  - coeficientul dinamic de vâscozitate, în  $N \cdot s/m^2$  sau  $Pa \cdot s$   
 $\lambda$  - coeficientul pierderilor longitudinale uniform distribuite  
 $\zeta$  - coeficientul pierderilor locale  
 $s$  - suprafața unui orificiu, în  $m^2$   
 $S_i, i = x, y, z$  - proiecția suprafeței, pe care acționează forța hidrostactică, pe un plan perpendicular pe axa,  $Ox, Oy, Oz$ , în  $m^2$   
 $d, D$  - diametrul interior al unei conducte sau rezervor, în  $m$   
 $L, l$  - lungimea, în  $m$   
 $H$  - înălțimea, în  $m$   
 $z$  - cota geodezică, în  $m$   
 $x_G, z_G, z_G$  - coordonatele centrului de greutate al proiecției suprafeței pe un plan perpendicular pe axa  $Ox, Oy, Oz$ , în  $m$

$x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci} - i = x, y$  - coordonatele centrului de presiune în care acționează  
forța hidrostatică de tip arhimedic, în m  
 $r$  - coordonata cilindrică (raza vectorială) a punctului de pe suprafața liberă a  
lichidului, în m  
 $Q$  – debitul de fluid, în  $m^3$   
 $\alpha$  – coeficientul de debit al orificiului  
 $t$  - timpul de golire a unui rezervor, în secunde

## 8.1 INTRODUCERE

Majoritatea cazurilor întâlnite în aplicațiile ingineresti sunt combinații ale problemelor de hidrostatică, cinematică și dinamică. Din acest motiv, în cadrul acestui capitol, se vor rezolva și propune spre rezolvare probleme combinate ce pot fi întâlnite în practică de către specialist.

## 8.2 NOȚIUNI TEORETICE

Pentru înțelegerea problemelor rezolvate este necesar a se parcurge capitolele descrise anterior în acest manual, dar și a revizuirii noțiunilor legate hidrostatică.

## 8.3 APLICAȚII

### 8.3.1 Probleme rezolvate

**8.1** Pentru sistemul hidraulic, prezentat în fig.8.1, format din două rezervoare legate printr-o conductă, se cere:

**a)** timpul în care se egalizează nivelurile în cele două rezervoare;

**b)** acțiunea hidrodinamică a apei asupra cotului AB la momentul inițial, neglijând greutatea apei din cot și considerînd că  $p_A = p_B$ ;

Date:  $a_1 = 2$  m;  $a_2 = 3$  m;  $h_1 = 4$  m;  $h_2 = 2$  m;  $h_0 = 1,5$  m;  $d = 100$  mm;  $l = 10$  m;  $l_1 = 6$  m;  $\zeta_i = 0,5$ ;  $\zeta_v = 1,5$ ;  $\zeta_c = 0,8$ ;  $\lambda = 0,02$

### REZOLVARE

**a.** Pentru calculul timpului în care se egalizează nivelurile în cele două rezervoare se pleacă de la relația:

$$S(z)dz = - Qdt \quad (1)$$

care scrisă pentru rezervorul I devine:

$$S_1 dz_1 = - Qdt \quad (2)$$



Unde:

$$Q = \mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \quad (3)$$

Dar volumul de lichid ieșit din rezervorul I este egal cu volumul de lichid intrat în rezervorul II:

$$S_1 \cdot dz_1 = S_2 \cdot dz_2$$

Unde:

$S_1$  – suprafața interioară a rezervorului I  
 $S_2$  – suprafața interioară a rezervorului II  
 $dz_1$  – variația de nivel în rezervorul I  
 $dz_2$  – variația de nivel în rezervorul II

Însă, variația distanței între nivelurile celor două rezervoare este:

$$dz = dz_1 + dz_2 = dz_1 + \frac{S_1}{S_2} \cdot dz_1 = \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) \cdot dz_1$$

sau:

$$dz_1 = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \cdot dz$$

Integrând relația (2) se obține:

$$t = -\int_{z_0}^0 \frac{S_1}{Q} dz_1 = \frac{S_1 \cdot S_2}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (S_1 + S_2)} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \sqrt{z_0}}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot (S_1 + S_2)}$$

Însă:

$$z_0 = h_1 - h_2 = 4 - 2 = 2 \text{ m}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda \cdot \frac{1}{d} + \zeta_i + 2 \cdot \zeta_c + 1}} = \frac{1}{\sqrt{0,02 \cdot \frac{10}{0,1} + 0,5 + 2 \cdot 0,8 + 1}} = 0,389$$

$$S_1 = a_1^2 = 2^2 = 4 \text{ m}^2$$

$$S_2 = a_2^2 = 3^2 = 9 \text{ m}^2$$

Timpul în care nivelul în cele două rezervoare se egalizează :

$$t = \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{0,389 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665} \cdot (4 + 9)} = 579 \text{ s}$$

**b.** Forța cu care apa acționează asupra cotului AB, la momentul inițial, se determină cu relația:

$$\vec{F}_{L-P} = \rho \cdot Q \cdot \beta_A \cdot \vec{v}_A - \rho \cdot Q \cdot \beta_B \cdot \vec{v}_B - p_A \cdot \vec{n}_A \cdot s_A - p_B \cdot \vec{n}_B \cdot s_B + \vec{G}_{LA-B}$$

Având în vedere că  $\beta_A = \beta_B$ , cele două componente ale forței hidrodinamice sunt:

$$\begin{aligned} (F_{L-P})_x &= \rho \cdot Q \cdot v_A + p_A \cdot s_A \\ (F_{L-P})_y &= \rho \cdot Q \cdot v_B + p_B \cdot s_B \end{aligned}$$

deci

$$(F_{L-P})_x = (F_{L-P})_y$$

Cum  $p_A = p_B$  și conducta are diametrul constant ( $s_A = s_B$ ) rezultă:

$$v_A = v_B = v, \text{ respectiv } (F_{L-P})_x = (F_{L-P})_y = \rho \cdot Q \cdot v + p_A \cdot s_A$$

Viteza  $v$  rezultă din condiția:

$$\begin{aligned} v = \frac{Q}{s} &= \frac{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}}{s} = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)} = \\ &= 0,389 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665 \cdot 2} = 2,437 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Debitul de apă ce trece prin cot va fi:

$$Q = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 2,437 = 0,019 \text{ m}^3/\text{s}$$

Presiunea  $p_A$  se determină din ecuația transferului de energie mecanică scrisă între suprafața liberă a rezervorului I și secțiunea A:

$$\frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{\alpha_A \cdot v_A^2}{2 \cdot g} + \zeta_i \frac{v_A^2}{2 \cdot g} + \lambda \cdot \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v_A^2}{2 \cdot g} + \zeta_v \frac{v_A^2}{2 \cdot g} + z_A$$

$$\alpha_1 \cong \alpha_A \cong 1$$

$$z_1 = h_1$$

$$z_A = h_0$$

$$v_A = v ; v_1 \cong 0$$

$$p_{at} = 0 \text{ (ca presiune relativă)}$$

Deci:

$$p_A = \gamma \cdot \left[ h_1 - h_0 - \frac{V^2}{2 \cdot g} \left( 1 + \zeta_i + \zeta_v + \lambda \cdot \frac{l_1}{d} \right) \right]$$

Înlocuind cu datele din enunț rezultă:

$$\begin{aligned} p_A &= 1000 \cdot 9,80665 \cdot \left[ 4 - 1,5 - \frac{2,437^2}{2 \cdot 9,80665} \left( 1 + 0,5 + 1,5 + 0,02 \cdot \frac{6}{0,1} \right) \right] = \\ &= 12044,8 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Forța hidrodinamică va fi:

$$\begin{aligned} F_{L-p} &= \sqrt{(F_{L-p})_x^2 + (F_{L-p})_y^2} = (F_{L-p})_x \cdot \sqrt{2} = \\ &= \left( 1000 \cdot 0,019 \cdot 2,437 + 12044,8 \cdot \pi \cdot \frac{0,1^2}{4} \right) \cdot \sqrt{2} = 199,3 \text{ N} \end{aligned}$$

**8.2** Pentru circuitul din fig.8.2 prin care circulă apă sub presiune se cer:

**a)** forța hidrostatică  $P$  ce acționează pe radierul rezervorului tronconic, când vanele  $V_1$  și  $V_2$  sunt complet închise;

**b)** viteza și debitul apei prin conducta de diametru  $D$  a cărei rugozitate absolută este  $k = 1,2$  mm;

**c)** timpul de golire al rezervorului tronconic, prin orificiul  $A$  de secțiune  $s = 325 \text{ cm}^2$ , în ipoteza că vanele  $V_1$  și  $V_2$  sunt complet închise;

**d)** acțiunea jetului de apă care iese din conducta de diametru  $D$  asupra plăcii fixe în formă de arc de cerc cu unghiul la centru de  $135^\circ$ , dacă aceasta este dispusă în plan orizontal. Viteza și debitul jetului sunt cele calculate la punctul a).

**e)** indicația  $h$  a piezometrului simplu cu mercur, aflat la distanța  $L_1 = 25$  m de capătul din dreapta al conductei orizontale de diametru  $D$ , dacă  $h_1 = 0,5$  m.



Date:  $D_1 = 3$  m,  $D_2 = 5$  m,  $H = 5$  m,  $D = 200$  mm,  $L = 40$  m,  $z_0 = 119$  m,  $z_1 = 112$  m,  $\zeta_i = 0,5$ ,  $\zeta_v = 2,6$ ,  $\zeta_c = 1,9$ ,  $\alpha = 0,61$  (coeficientul de debit al orificiului A), coeficientul de vâscozitate cinematică  $\nu = 1,31 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\lambda = 0,032$ ,  $\rho_{ap\grave{a}} = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_{Hg} = 13600$  kg/m<sup>3</sup>.

**REZOLVARE**

a). Forța hidrostatică P este:

$$P = \rho \cdot g \cdot \text{Vol} = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot H$$

Înlocuind cu datele din problemă se obține:

$$P = 1000 \cdot 9,80665 \cdot \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \cdot 5 = 962765,61 \text{ N}$$

b). Aplicăm ecuația transferului de energie mecanică între secțiunile 0-0 și 1-1:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 \cdot v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} + z_1 + h_{p0-1} \quad (1)$$

unde:  $p_0 = p_1 = p_{at}$

$$z_0 = 119 \text{ m}$$

$$z_1 = 112 \text{ m}$$

$$\alpha_0 \cong \alpha_1 \cong 1$$

$$v_0 \cong 0$$

$$h_{p0-1} = \frac{v_1^2}{2g} \left( \lambda \frac{L}{D} + \zeta_i + \zeta_v + \zeta_c \right)$$

Din relația (1) se obține:

$$\frac{p_{at}}{\gamma} + z_0 = \frac{p_{at}}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_i + \zeta_v + \zeta_c \right)$$

respectiv:

$$z_0 - z_1 = \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_i + \zeta_v + \zeta_c \right) \quad (2)$$

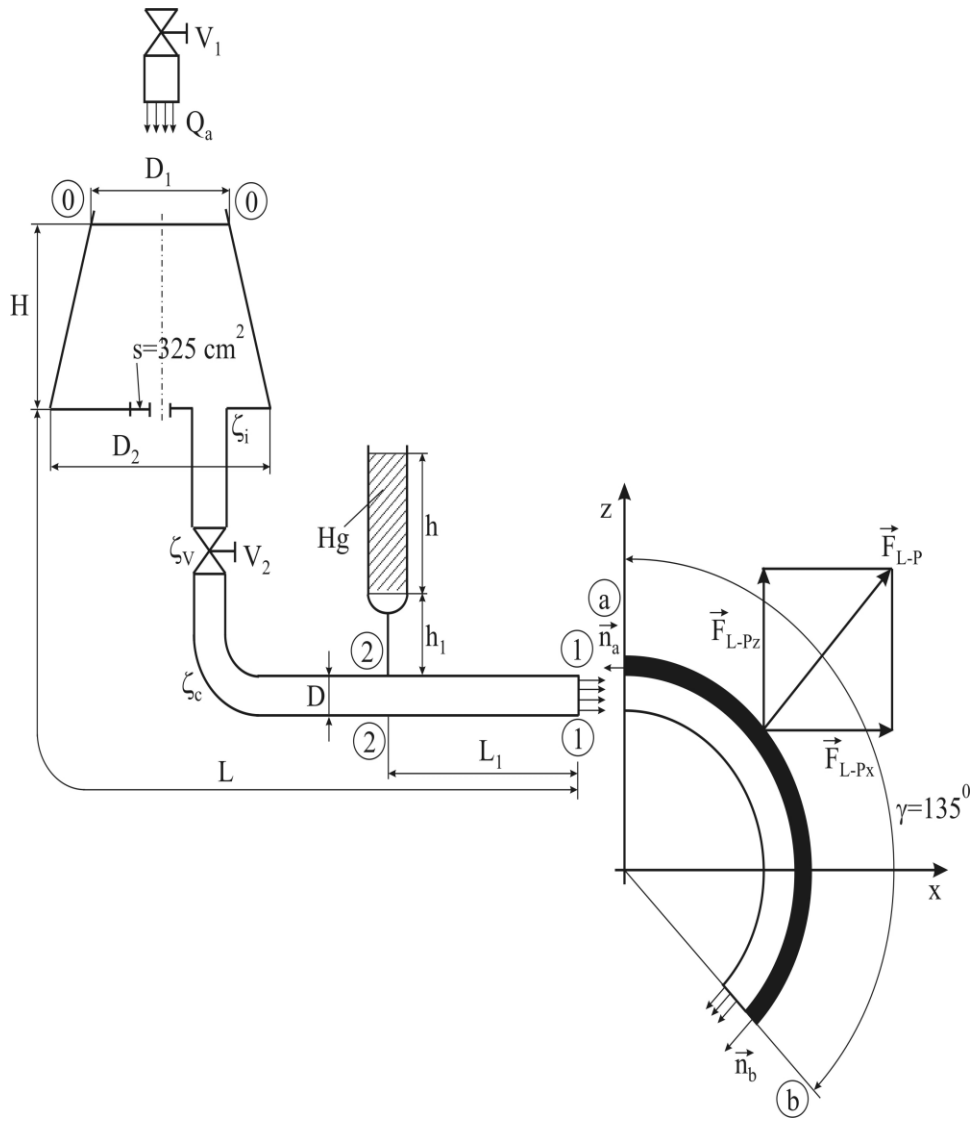


Fig.8.2

Înlocuind în (2) cu datele din enunț se obține:

$$119 - 112 = \frac{v_1^2}{2 \cdot 9,80665} \cdot (1 + 0,032 \cdot \frac{40}{0,2} + 0,5 + 2,6 + 1,9)$$

de unde rezultă viteza în conductă:

$$v_1 = \sqrt{\frac{7 \cdot 2 \cdot 9,80665}{(1 + 0,032 \cdot \frac{40}{0,2} + 0,5 + 2,6 + 1,9)}} = 3,327 \text{ m/s}$$

Debitul de apă Q ce trece prin conducta de diametru D este:

$$Q = v_1 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 3,327 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 0,104 \text{ m}^3/\text{s}$$

c). Timpul de golire al rezervorului tronconic, când vanele  $V_1$  și  $V_2$  sunt închise este:

$$t = \int_0^t dt = \int_0^H \frac{S(z)}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}} dz$$

dar:

$$S(z) = \pi \cdot \left( \frac{D_1}{2} + 0,2 \cdot z \right)^2$$

Deci, timpul de golire este:

$$\begin{aligned} t = \int_0^H \frac{\pi \cdot \left( \frac{D_1}{2} + 0,2 \cdot z \right)^2}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}} dz &= \frac{\pi D_1^2}{4 \alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{\pi \cdot 0,04}{4 \alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H \frac{z^2 dz}{\sqrt{z}} + \\ &+ \frac{\pi \cdot 0,2 \cdot D_1}{4 \alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_0^H \frac{z \cdot dz}{\sqrt{z}} = \frac{\pi \cdot 9}{4 \cdot 0,61 \cdot 325 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{0,5} \Bigg|_0^5 + \\ &+ \frac{\pi \cdot 0,04}{4 \cdot 0,61 \cdot 325 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665}} \cdot \frac{z^2 \cdot \sqrt{z}}{2,5} \Bigg|_0^5 + \\ &+ \frac{\pi \cdot 0,2 \cdot 3}{4 \cdot 0,61 \cdot 325 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665}} \cdot \frac{z \cdot \sqrt{z}}{1,5} \Bigg|_0^5 = 408 \text{ s} \end{aligned}$$

**d).** Forța cu care jetul de apă acționează asupra plăcii se determină cu relația stabilită prin teorema I-a a impulsului:

$$\vec{F}_{L-p} = \rho \cdot Q \cdot \beta_a \cdot \vec{v}_a - \rho \cdot Q \cdot \beta_b \cdot \vec{v}_b - p_a \cdot S_a \cdot \vec{n}_a - p_b \cdot S_b \cdot \vec{n}_b + \vec{G}_L \quad (3)$$

unde:

$$p_a = p_b = 0 \text{ (ca presiuni relative)}$$

$$\beta_a \cong \beta_b \cong 1$$

$$v_a = v_b = v_1 = 3,327 \text{ m/s}$$

$$\vec{n}_a = -\vec{i}$$

$$\vec{n}_b = -\vec{i} \cos 45^\circ - \vec{k} \sin 45^\circ$$

$$G_L = 0 \text{ (placa este dispusă în plan orizontal)}$$

Înlocuind în relația (3) se obține:

- Forța pe direcția x:

$$(\vec{F}_{L-p})_X = \vec{F}_{L-p} \cdot \vec{i} = \rho \cdot Q \cdot \beta_1 \cdot v_1 + \rho \cdot Q \cdot \beta_2 \cdot v_2 \cdot \cos 45^\circ = 1000 \cdot 0,104 \cdot 1 \cdot 3,327 + 1000 \cdot 0,104 \cdot 1 \cdot 3,327 \cdot \cos 45^\circ = 590,7 \text{ N}$$

- Forța pe direcția z:

$$(\vec{F}_{L-p})_Z = \vec{F}_{L-p} \cdot \vec{k} = \rho \cdot Q \cdot \beta_2 \cdot v_2 \cdot \sin 45^\circ = 1000 \cdot 0,104 \cdot 1 \cdot 3,327 \cdot \sin 45^\circ = 244,6 \text{ N}$$

Forța rezultantă, cu care jetul de apă acționează asupra plăcii, este:

$$F_{L-p} = \sqrt{(F_{L-p})_X^2 + (F_{L-p})_Z^2} = \sqrt{590,7^2 + 244,6^2} = 639,3 \text{ N}$$

**e).** Pentru a afla indicația piezometrului simplu cu mercur este necesar a se cunoaște presiune de la priza acestuia. Pentru aceasta se aplică ecuația transferului de energie mecanică între secțiunile 1-1 și 2-2:

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} + z_1 + h_{p2-1} \quad (4)$$

unde:  $p_1 = p_{at}$   
 $z_0 = z_1 = 112 \text{ m}$

$$\alpha_2 \cong \alpha_1 \cong 1$$

$$v_2 = v_1 = 3,327 \text{ m/s}$$

$$h_{p2-1} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Din relația (4) se obține:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_{at}}{\gamma} + \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \quad (5)$$

Scriind legea hidrostaticii pentru piezometrul cu mercur, între suprafața liberă a acestuia și punctul de priză, se obține:

$$p_2 = p_{at} + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h + \rho_{ap\grave{a}} \cdot g \cdot \left( h_1 + \frac{D}{2} \right) \quad (6)$$

Din (5) și (6) se obține indicația  $h$  a piezometrului cu mercur:

$$h = \frac{\rho_{ap\grave{a}} \cdot \lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v_1^2}{2} - \rho_{ap\grave{a}} \cdot g \cdot \left( h_1 + \frac{D}{2} \right)}{\rho_{Hg} \cdot g} \quad (7)$$

Înlocuind în (7) cu datele din enunț se obține:

$$h = \frac{1000 \cdot 0,032 \cdot \frac{25}{0,2} \cdot \frac{3,327^2}{2} - 1000 \cdot 9,80665 \cdot \left( 0,5 + \frac{0,2}{2} \right)}{13600 \cdot 9,80665} = 0,122 \text{ m.}$$

**8.3** Fie sistemul din fig.8. Rezervorul de diametru  $D_0 = 2 \text{ m}$  funcționează la cota constantă și alimentează cu apă ( $\rho_{ap\grave{a}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) o conductă orizontală de diametru  $D_1 = 0,3 \text{ m}$  și una verticală de diametru  $D_2 = 0,15 \text{ m}$ . Considerînd că forțele exercitate de vanele de apă, provenite din cele două conducte, asupra pereților

perpendiculari pe axele conductelor, au același modul  $\left| \vec{F}_1 \right| = \left| \vec{F}_2 \right| = 2500 \text{ N}$ , să se

determine:

a) lungimile  $L_1$  și  $L_2$  ale celor două conducte;

b) denivelarea  $h$  a piezometrului cu mercur, legat în punctul M la conducta orizontală;

c) să se traseze calitativ liniile energetice și piezometrică ale celor două conducte;

d) timpul de golire al rezervorului când acesta este plin cu apă și conducta orizontală este eliminată.

(Se dau:  $H_1 = 5$  m,  $H_2 = 20,5$  m,  $L_3 = 3$  m,  $Z_0 = 0,5$  m,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,03$ ,  $\zeta_1 = 0,5$ ,  $\rho_{\text{mercur}} = 13600$  kg/m<sup>3</sup>);

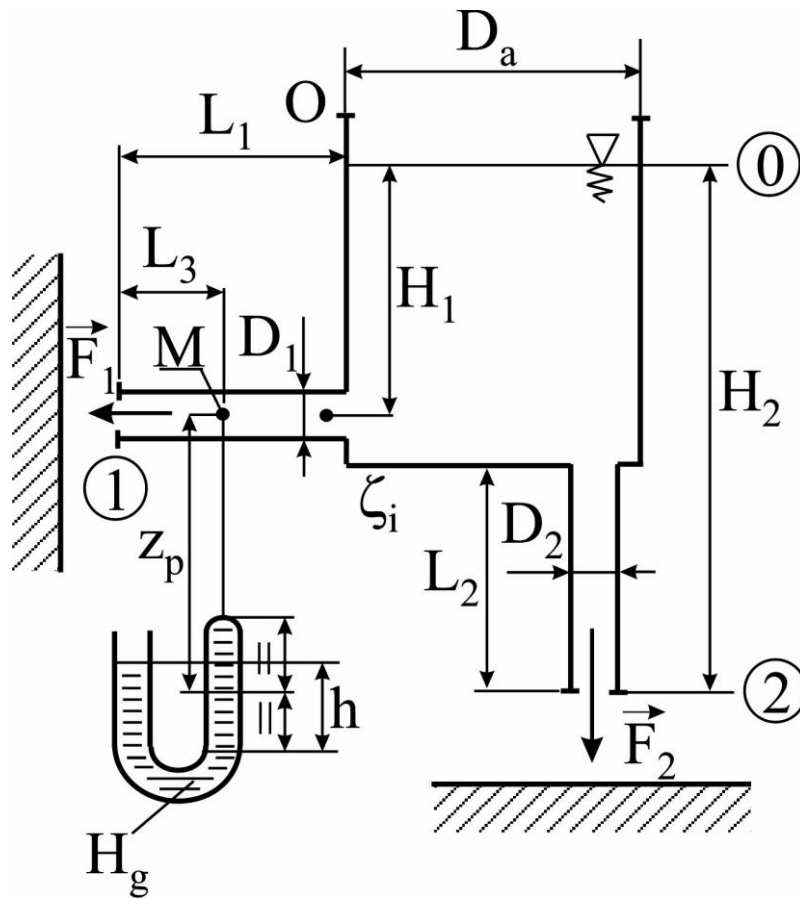


Fig.8.3

**Rezolvare**

a). Forțele  $F_1$  și  $F_2$  sunt date de relațiile:

$$\vec{F}_1 = \rho \cdot Q_1 \cdot \beta_1 \cdot \vec{v}_1 \quad (1)$$

$$\vec{F}_2 = \rho \cdot Q_2 \cdot \beta_2 \cdot \vec{v}_2 \quad (2)$$

Cum  $\beta_1 = \beta_2 \cong 1$  se obține:

$$F_1 = \rho \cdot Q_1 \cdot v_1 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot v_1^2 \quad (3)$$

$$F_2 = \rho \cdot Q_2 \cdot v_2 = \rho \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot v_2^2 \quad (4)$$

de unde:

$$v_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_1}{\rho \cdot \pi \cdot D_1^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2500}{1000 \cdot \pi \cdot 0,3^2}} = 5,947 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot F_2}{\rho \cdot \pi \cdot D_2^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2500}{1000 \cdot \pi \cdot 0,15^2}} = 11,894 \text{ m/s}$$

Lungimile  $L_1$  și  $L_2$  se determină din ecuația transferului de energie mecanică aplicată între suprafața liberă a rezervorului și ieșirile din cele două conducte.

Astfel:

- pentru conducta orizontală:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 \cdot v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} + z_1 + h_{p0-1} \quad (5)$$

unde:

$$\begin{aligned} p_0 &= p_1 = p_{at} \\ z_0 - z_1 &= H_1 = 5 \text{ m} \\ \alpha_0 &\cong \alpha_1 \cong 1 \\ v_0 &\cong 0 \end{aligned}$$

$$h_{p0-1} = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left( \zeta_i + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \right)$$

Din (5) rezultă lungimea conductei orizontale:

$$L_1 = \frac{\left( \frac{2 \cdot g \cdot H_1}{v_1^2} - 1 - \zeta_i \right) \cdot D_1}{\lambda_1} = \frac{\left( \frac{2 \cdot 9,80665 \cdot 5}{5,947^2} - 1 - 0,5 \right) \cdot 0,3}{0,03} = 12,728 \text{ m}$$

- pentru conducta verticală:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 \cdot v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} + z_2 + h_{p0-2} \quad (6)$$

unde:

$$\begin{aligned} p_0 &= p_2 = p_{at} \\ z_0 - z_2 &= H_2 = 20,5 \text{ m} \\ \alpha_0 &\cong \alpha_1 \cong 1 \\ v_0 &\cong 0 \end{aligned}$$

$$h_{p0-2} = \frac{v_2^2}{2g} \cdot \left( \zeta_i + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \right)$$

Din (6) rezultă lungimea conductei orizontale:

$$L_2 = \frac{\left( \frac{2 \cdot g \cdot H_2}{v_2^2} - 1 - \zeta_i \right) \cdot D_2}{\lambda_2} = \frac{\left( \frac{2 \cdot 9,80665 \cdot 20,5}{11,894^2} - 1 - 0,5 \right) \cdot 0,15}{0,03} = 6,711 \text{ m}$$

**b)** Denivelarea  $h$  se determină din legea hidrostăticii aplicată între punctul M și suprafața liberă a piezometrului ( $p = p_{at}$ ):

$$p_{at} = p_M + \rho_{apă} \cdot g \cdot \left( z_M + \frac{h}{2} \right) - \rho_{mercur} \cdot g \cdot h \quad (7)$$

de unde:

$$h = \frac{p_M - p_{at}}{g \cdot \left( \rho_{mercur} - \frac{\rho_{apă}}{2} \right)} + \frac{\rho \cdot z_M}{\rho_{mercur} - \frac{\rho_{apă}}{2}} \quad (8)$$



Presiunea  $p_M$  se determină din ecuația transferului de energie cinetică aplicată între punctele M și 1:

$$\frac{p_M}{\rho_{\text{apa}} \cdot g} + \frac{\alpha_M \cdot v_M^2}{2g} + z_M = \frac{p_1}{\rho_{\text{apa}} \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} + z_1 + h_{pM-1} \quad (9)$$

unde:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\text{at}} \\ z_0 - z_2 &= H_2 = 20,5 \text{ m} \\ \alpha_M &\cong \alpha_1 \cong 1 \\ v_M &= v_1 \\ h_{pM-1} &= \lambda_1 \cdot \frac{L_3}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \end{aligned}$$

Din (9) rezultă:

$$\frac{p_M - p_{\text{at}}}{\rho_{\text{apa}} \cdot g} = \lambda_1 \cdot \frac{L_3}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

sau:

$$p_M - p_{\text{at}} = \rho \cdot \lambda_1 \cdot \frac{L_3}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 1000 \cdot 0,03 \cdot \frac{3}{0,3} \cdot \frac{5,947^2}{2} = 5305,021 \text{ N/m}^2$$

Înlocuind în (8) se obține:

$$h = \frac{5305,021}{9,80665 \cdot (13600 - \frac{1000}{2})} + \frac{1000 \cdot 0,5}{13600 - \frac{1000}{2}} = 0,0795 \text{ m}$$

c) Calculul liniei piezometrice

- pentru conducta orizontală

$$p_A = p_{\text{at}} + \rho_{\text{apă}} \cdot g \cdot H_1 = 101325 + 1000 \cdot 9,80665 \cdot 5 = 150358,25 \text{ N/m}^2$$

- pentru conducta verticală

$$p_B = p_{at} + \rho_{ap\grave{a}} \cdot g \cdot (H_2 - L_2) = 101325 + 1000 \cdot 9,80665 \cdot (20,5 - 6,711) =$$

$$= 236548,9 \text{ N/m}^2$$

Calculul liniei energetice

- pentru conducta orizontală

$$e_A = \frac{p_A}{\rho_{ap\grave{a}} \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + z_A = \frac{150358,25}{1000 \cdot 9,80665} + \frac{5,947^2}{2 \cdot 9,80665} + 0 = 17,135 \text{ m}$$

$$e_1 = e_A - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \cdot (\zeta_i + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1}) = 17,135 -$$

$$- \frac{5,947^2}{2 \cdot 9,80665} \cdot (0,5 + 0,03 \cdot \frac{12,728}{0,3}) = 13,938 \text{ m}$$

- pentru conducta verticală

$$e_B = \frac{p_B}{\rho_{ap\grave{a}} \cdot g} + \frac{v_B^2}{2 \cdot g} + z_B = \frac{236548,9}{1000 \cdot 9,80665} + \frac{11,894^2}{2 \cdot 9,80665} +$$

$$+ (20,5 - 6,711) = 45,123 \text{ m}$$

$$e_2 = e_B - \frac{v_B^2}{2g} \cdot (\zeta_i + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2}) = 45,123 -$$

$$- \frac{11,894^2}{2 \cdot 9,80665} \cdot (0,5 + 0,03 \cdot \frac{6,711}{0,15}) = 31,835 \text{ m}$$

În figura 8.3.a sunt prezentate, calitativ, cele doua linii (piezometrică și energetică) în lungul celor două conducte.

d) Timpul de golire se calculează cu relația:

$$t = \int_0^t dt = \int_{L_2}^{H_2} \frac{S(z)}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z}} dz$$

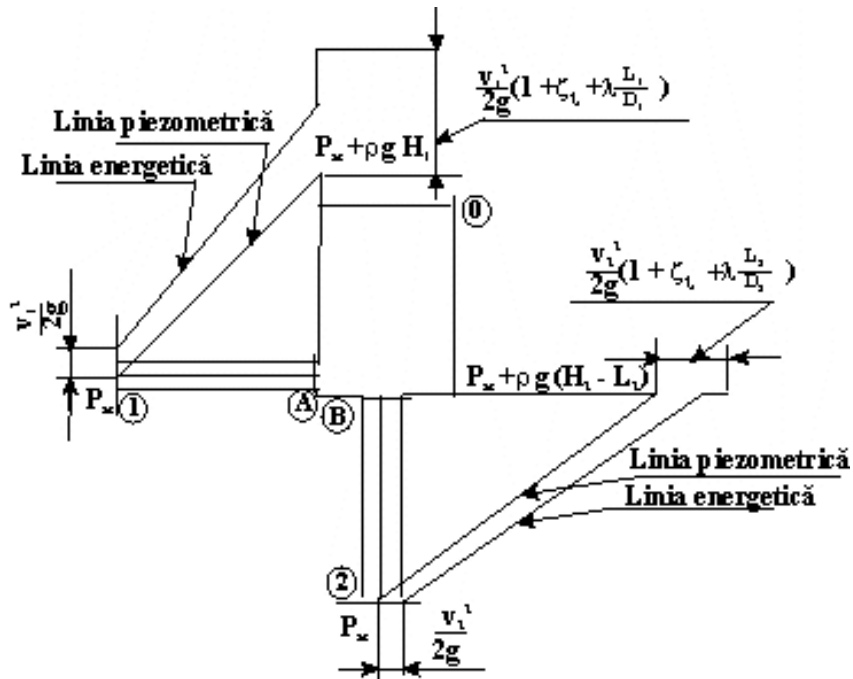


Fig.8.3.a

unde:

$$S(z) = \pi \cdot \frac{D_0^2}{4}$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \zeta_i + \lambda \cdot \frac{L_2}{D_2}}$$

Timpul de golire este:

$$t = \frac{D_0^2 \cdot 2}{D_2^2 \cdot \sqrt{1 + \zeta_i + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2}} \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot (\sqrt{H_2 - L_2}) =$$

$$= \frac{2^2 \cdot 2}{0,15^2 \cdot \sqrt{1 + 0,5 + 0,03 \cdot \frac{6,711}{0,15}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665}} \cdot (\sqrt{20,5 - 6,711}) = 176,83 \text{ s}$$

**8.4** Pentru recipientul ABCD, parțial umplut cu apă ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ), fig.8.4, se cere:

**a)** valoarea accelerației mișcării uniforme a vasului astfel încât suprafața liberă a apei să atingă muchia A;

**b)** pentru situația descrisă la punctul a) să se determine valoarea forțelor care acționează asupra pereților EC și AD (indicația manometrului M este de 0,3 bar);

**c)** durata golirii rezervorului până la cota de 400 mm, măsurată de jos în sus, printr-un orificiu plasat pe fundul rezervorului de suprafață  $s = 0,005 \text{ m}^2$ , când acesta este în repaus și indicația manometrului este constantă. (Coeficientul de debit al orificiului este  $\alpha = 0,61$ ).

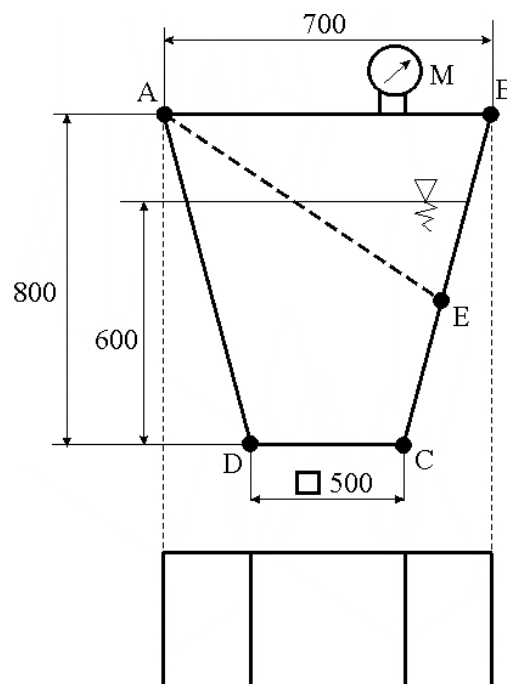


Fig. 8.4

**Rezolvare**

a) Pentru calculul accelerației rezervorului se pleacă de la ecuația suprafeței libere, care are forma:

$$z \cdot g + x \cdot a = \text{constant} = k \quad (1)$$

Cu condițiile pentru punctul A:  $x = x_A$ ;  $z = z_A$  se obține:

$$z_A \cdot g + x_A \cdot a = k \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$z \cdot g + x \cdot a = z_A \cdot g + x_A \cdot a \quad (3)$$

respectiv

$$z = z_A - \frac{a \cdot (x - x_A)}{g}, \text{ care este ecuația suprafeței libere}$$

Înlocuind valorile din enunțul problemei se obține:

$$z = 0,8 - \frac{a}{g} \cdot x \quad (4)$$

Fie punctul B de coordonate  $(x_B, z_B)$  și C de coordonate  $(x_C, z_C)$ . Atunci ecuația dreptei ce trece prin B și C este:

$$d(\text{CB}): z - z_C = \frac{z_B - z_C}{x_B - x_C} (x - x_C)$$

Înlocuind cu datele din fig.8.6 se obține:

$$d(\text{CB}): z - 0 = \frac{0,8 - 0}{0,7 - 0,6} (x - 0,6)$$

respectiv

$$d(\text{CB}): z = 8 \cdot x - 4,8 \quad (5)$$

Cum punctul E se află atât pe dreapta BC cât și pe suprafața liberă AE, din (4) și (5) rezultă:

$$z = 0,8 - \frac{a}{g} \cdot x = 8 \cdot x - 4,8$$

de unde rezultă coordonatele punctului E:

$$x_E = \frac{5,6}{8 + \frac{a}{g}}; \quad z_E = 8 \cdot x_E - 4,8 = \frac{44,8}{8 + \frac{a}{g}} - 4,8 \quad (6)$$

Volumul inițial de lichid este:

$$V_i = \frac{A'B'+DC}{2} \cdot 0,6 \cdot DC = \frac{0,65 + 0,5}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,1725 \text{ m}^3$$

unde

$$A'B' = DC + \frac{AB - DC}{0,8} \cdot 0,6 = 0,5 + \frac{0,7 - 0,5}{0,8} \cdot 0,6 = 0,65 \text{ m}$$

Volumul final este:

$$\begin{aligned} V_f &= (z_A + z_E) \cdot \frac{1}{2} \cdot x_E \cdot b - \frac{z_A \cdot x_D}{2} \cdot b - \frac{z_E \cdot (x_E - x_C)}{2} \cdot b = \\ &= \frac{b}{2} \cdot (z_A \cdot x_E + z_E \cdot x_E - z_A \cdot x_D - z_E \cdot x_E + z_E \cdot x_C) = \frac{b}{2} \cdot [z_A \cdot (x_E - x_D) + z_E \cdot x_C] = \\ &= \frac{0,5}{2} \cdot \left[ 0,8 \cdot \left( \frac{5,6}{8 + \frac{a}{g}} - 0,1 \right) + \left( \frac{44,8}{8 + \frac{a}{g}} - 4,8 \right) \cdot 0,6 \right] = \frac{7,84}{8 + \frac{a}{g}} - 0,74 \end{aligned}$$

Egalând cele două volume  $V_i$  și  $V_f$  se obține:

$$0,1725 = \frac{7,84}{8 + \frac{a}{g}} - 0,74 \quad \text{de unde rezultă:}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{7,84 - (0,1725 + 0,74) \cdot 8}{0,1725 + 0,74}$$

respectiv

$$a = \frac{7,84 - (0,1725 + 0,74) \cdot 8}{0,1725 + 0,74} \cdot 9,80665 = 5,803 \text{ m/s}^2$$

**b)** Pentru calculul forțelor care acționează asupra pereților EC și AD este necesară cunoașterea coordonatelor punctului E și a centrelor de greutate a suprafețelor ce conțin dreptele EC (punctul  $G_1 (x_{G1}, z_{G1})$ ) și AD (punctul  $G_2 (x_{G2}, z_{G2})$ ).

Astfel:

$$x_E = \frac{5,6}{8 + \frac{a}{g}} = \frac{5,6}{8 + \frac{5,803}{9,80665}} = 0,6518 \text{ m}$$

$$z_E = 8 \cdot x_E - 4,8 = 8 \cdot 0,6518 - 4,8 = 0,4144 \text{ m}$$

Lungimea dreptei CE este:

$$\begin{aligned} L_{CE} &= \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (z_C - z_E)^2} = \sqrt{(0,6 - 0,6518)^2 + (0 - 0,4144)^2} = \\ &= 0,418 \text{ m} \end{aligned}$$

Coordonatele centrului de greutate  $G_1$  sunt:

$$x_{G1} = \frac{x_E + x_C}{2} = \frac{0,6518 + 0,6}{2} = 0,6259 \text{ m}$$

$$z_{G1} = \frac{z_E + z_C}{2} = \frac{0,4144 + 0}{2} = 0,2072 \text{ m}$$

Forța ce acționează pe fața CE este:

$$F_{CE} = p_{G1} \cdot S_{CE} = p_{G1} \cdot L_{CE} \cdot 0,5 \quad (7)$$

Unde  $p_{G1}$  – este presiunea medie din punctul  $G_1$ , calculată din ecuația suprafeței libere.

$$\frac{p_M}{\rho} + x_E \cdot a + z_E \cdot g = \frac{p_{G1}}{\rho} + x_{G1} \cdot a + z_{G1} \cdot g$$

de unde:

$$p_{G1} = p_M + \rho \cdot a \cdot (x_E - x_{G1}) + \rho \cdot g \cdot (z_E - z_{G1})$$

Înlocuind cu datele calculate și cu cele din enunț se obține:

$$p_{G1} = 0,3 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 5,803 \cdot (0,6518 - 0,6259) + \\ + 1000 \cdot 9,80665 \cdot (0,4144 - 0,2072) = 32182,24 \text{ N}$$

Înlocuind în (7) rezultă forța pe peretele CE:

$$F_{CE} = 32182,24 \cdot 0,4176 \cdot 0,5 = 6719,65 \text{ N}$$

Forța ce acționează pe fața AD este:

$$F_{AD} = p_{G2} \cdot S_{Ad} = p_{G2} \cdot L_{AD} \cdot 0,5 \quad (8)$$

Unde  $p_{G2}$  – este presiunea medie din punctul  $G_2$ , calculată din ecuația suprafeței libere.

$$\frac{p_M}{\rho} + x_A \cdot a + z_A \cdot g = \frac{p_{G2}}{\rho} + x_{G2} \cdot a + z_{G2} \cdot g$$

de unde:

$$p_{G2} = p_M + \rho \cdot a \cdot (x_A - x_{G2}) + \rho \cdot g \cdot (z_A - z_{G2})$$

Coordonatele centrului de greutate  $G_2$  sunt:



$$x_{G2} = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{0 + 0,1}{2} = 0,05 \text{ m}$$

$$z_{G2} = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{0,8 + 0}{2} = 0,4 \text{ m}$$

Înlocuind în expresia presiunii  $p_{G2}$  datele calculate și cele din enunț, se obține:

$$p_{G2} = 0,3 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 5,803 \cdot (0 - 0,05) + \\ + 1000 \cdot 9,80665 \cdot (0,8 - 0,4) = 33632,51 \text{ N}$$

Lungimea peretelui AD este:

$$L_{AB} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (z_A - z_D)^2} = \sqrt{(0 - 0,1)^2 + (0,8 - 0)^2} = 0,806 \text{ m}$$

Înlocuind în (8) rezultă forța pe peretele CE:

$$F_{CE} = 33632,51 \cdot 0,806 \cdot 0,5 = 13553,9 \text{ N}$$

c) Timpul de golire a rezervorului tronconic se determină din relația:

$$Q \cdot dt = -S(z) \cdot dz$$

Respectiv:

$$\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(z + \frac{p_M}{\rho \cdot g}\right)} \cdot dt = -b \cdot \left(0,5 + \frac{0,2}{0,8} \cdot z\right) \cdot dz$$

care integrată conduce la:

$$t = - \int_{z=0,6}^{z=0,4} \frac{b \cdot (0,5 + 0,25 \cdot z)}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(z + \frac{p_M}{\rho \cdot g}\right)}} dz = \int_{z=0,4}^{z=0,6} \frac{b \cdot (0,5 + 0,25 \cdot z)}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(z + \frac{p_M}{\rho \cdot g}\right)}} dz =$$

$$= \frac{b}{\alpha \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \int_{z=0,4}^{z=0,6} \frac{(0,5 + 0,25 \cdot z)}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (z + \frac{p_M}{\rho \cdot g})}} dz \quad (9)$$

Această integrală se rezolvă prin metoda substituției. Se notează:

$$z + \frac{p_M}{\rho} = u \text{ și } dz = du$$

Înlocuind cu datele cunoscute și calculând integrala se obține timpul de golire a rezervorului:

$$t = \frac{0,5}{0,61 \cdot 0,005 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,80665}} \cdot \left( 0,5 \cdot \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} + 0,25 \cdot \frac{u^{1,5}}{\frac{3}{2}} - \right. \\ \left. - 0,25 \cdot \frac{p_M}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_{3,4591}^{3,6591} = 2,452 \text{ s}$$

**8.5** Sistemul hidraulic din fig.8.5 este compus dintr-un recipient cilindric de rază R, închis la cele două capete cu capace semisferice, un motor hidraulic liniar cu dublă acțiune și tijă bilaterală, o pompă volumică și rețeaua de conducte de diametru d. În recipient se află ulei hidraulic sub presiunea  $p_M$  indicată de manometrul M. În exteriorul recipientului presiunea este cea atmosferică.

**a)** Să se calculeze solicitarea bolțurilor din secțiunile 1-1 și 2-2;  
**b)** Presiunea  $p_P$  pe care trebuie să o asigure pompa volumică pentru ca pistonul motorului hidraulic liniar să se deplaseze cu viteza  $v_P$ , ca în figură. Pierderile hidraulice locale se neglijează.

**c)** Se consideră că rezervorul are capacul inferior înlocuit cu unul plan și este suspendat pe un lagăr axial. Să se determine forța ce solicită capacul plan când rezervorul se află în mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară  $\omega_0$ .

Fig.8.5

Date:  $p_M = 0,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ ,  $H = 2 \text{ m}$ ,  $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$ ,  
 $L_1 = 15 \text{ m}$ ,  $L_2 = 5 \text{ m}$ ,  $z_0 = 4 \text{ m}$ ,  $F = 5000 \text{ N}$ ,  $D = 60 \text{ mm}$ ,  $d_t = 20 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $v_P = 0,1 \text{ m/s}$ .

**REZOLVARE**

a). Forța ce solicită bolțurile din secțiunea 1-1 se calculează cu relația forțelor hidrostatice verticale (forța este egală cu greutatea volumului de lichid cuprins într-un cilindru de rază  $R$  și înălțime  $h_M + R$ , din care se scade volmul semisferei; unde  $h_M = \frac{p_M}{\rho \cdot g} = 4,8 \text{ m}$  este înălțimea determinată de presiunea  $p_M$  sub care se află uleiul din recipient, fig.8.5.a):

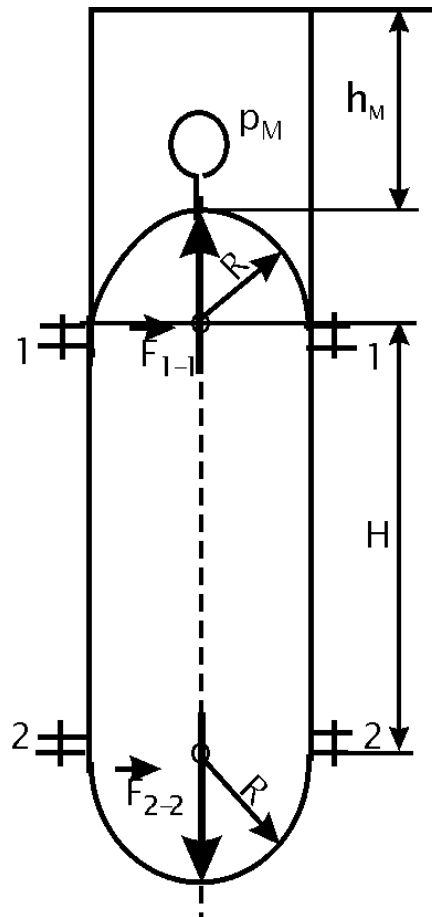


Fig. 8.5.a

$$F_{1-1} = \rho \cdot g \cdot \text{Vol} = \rho \cdot g \cdot \left[ \pi \cdot R^2 (h_M + R) - \frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \right] = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \left( h_M + R - \frac{2 \cdot R}{3} \right)$$

Înlocuind cu datele din enunț, obținem:

$$F_{1-1} = 850 \cdot 9,80665 \cdot \pi \cdot 1^2 \left( 4,8 + 1 - \frac{2 \cdot 1}{3} \right) = 134427,8 \text{ N}$$

În mod analog se determină forța ce soliciță bolțurile din secțiunea 2-2:

$$F_{2-2} = \rho \cdot g \cdot \text{Vol} = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \left( H + h_M + R + \frac{2 \cdot R}{3} \right) = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \left( H + h_M + \frac{5 \cdot R}{3} \right)$$

Înlocuind cu datele din enunț obținem:

$$F_{2-2} = 850 \cdot 9,80665 \cdot \pi \cdot 1^2 \left( 2 + 4,8 + \frac{5 \cdot 1}{3} \right) = 221718,5 \text{ N}$$

**b).** Presiunea  $p_p$  dezvoltată de către pompa volumică se determină din ecuația transferului de energie mecanică aplicată între secțiunea de la ieșirea din pompă și interiorul cilindrului A, pe de o parte, și interiorul cilindrului B și punctul superior al rezervorului M, cota  $z_0$ , pe de altă parte.

$$\frac{p_p}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = \frac{p_A}{\gamma} + \frac{\alpha_A \cdot v_A^2}{2g} + z_A + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \quad (1)$$

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{\alpha_B \cdot v_B^2}{2g} + z_B = \frac{p_M}{\gamma} + \frac{\alpha_M \cdot v_M^2}{2g} + z_0 + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2g} \quad (2)$$

unde:  $p_0 = p_1 = p_{at}$

$$z_0 = 4 \text{ m}$$

$$z_A = z_B$$

$$\alpha_1 \cong \alpha_A \cong \alpha_B \cong \alpha_M \cong 1$$

$$v_A = v_B = v_p = 0,1 \text{ m/s}$$

$$v_M = 0$$

$v_1, v_2$  - vitezele în conductele de diametru  $d$  și lungimi  $L_1$  respectiv  $L_2$ , care se determină în funcție de viteza  $v_p$  a pistonului motorului hidraulic liniar:

$$v_1 = \frac{4 \cdot Q_1}{\pi \cdot d^2} = \frac{D^2 - d_t^2}{d^2} \cdot v_P = \frac{0,06^2 - 0,02^2}{0,01^2} \cdot 0,1 = 3,2 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot Q_2}{\pi \cdot d^2} = \frac{D^2 - d_t^2}{d^2} \cdot v_P = \frac{0,06^2 - 0,02^2}{0,01^2} \cdot 0,1 = 3,2 \text{ m/s}$$

Pentru calculul coeficienților de pierderi longitudinale  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  se determină mai întâi natura regimului de curgere:

$$Re_{cr1} = Re_{cr2} = \frac{v_1 \cdot d}{\nu} = \frac{v_2 \cdot d}{\nu} = \frac{3,2 \cdot 0,01}{5 \cdot 10^{-4}} = 64 < 2300 \text{ (regimul de curgere este laminar)}$$

Coeficienții de pierderi longitudinale  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  vor fi:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{64}{Re_{cr1}} = \frac{64}{Re_{cr2}} = \frac{64}{64} = 1$$

Însumând relațiile (1) și (2), cu precizările făcute, se obține:

$$p_P = (p_A - p_B) + p_M + \rho \cdot g \cdot z_0 - \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

Cum:

$$F = (p_A - p_B) \cdot \frac{\pi \cdot (D^2 - d_t^2)}{4}$$

Se obține:

$$p_P = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot (D^2 - d_t^2)} + p_M + \rho \cdot g \cdot z_0 - \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

Înlocuind cu datele din enunț, se obține:

$$p_P = \frac{4 \cdot 5000}{\pi \cdot (0,06^2 - 0,02^2)} + 0,4 \cdot 10^5 + 850 \cdot 9,80665 \cdot 4 - 850 \cdot \frac{3,2^2}{2} + 850 \cdot 1 \cdot \frac{15}{0,01} \cdot \frac{3,2^2}{2} + 850 \cdot 1 \cdot \frac{5}{0,01} \cdot \frac{3,2^2}{2} = 10762427 \text{ N}$$

c). In fig.8.12c este prezentată schema de principiu.

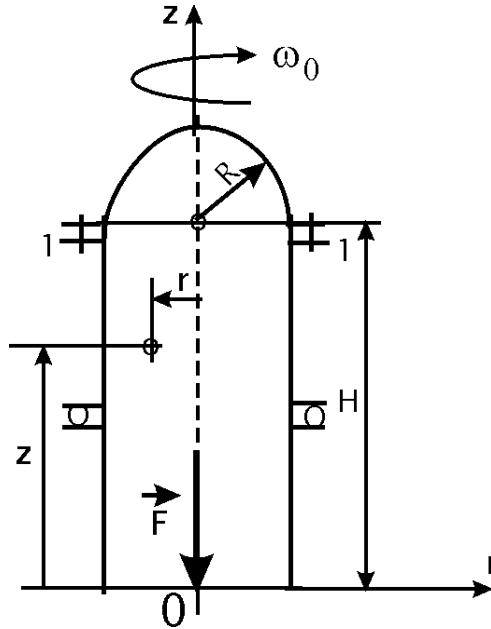


Fig. 8.5.c

Forța ce soliciță capacul plan, când recipientul din fig.8.13c este în mișcare uniformă de rotație, este:

$$F = \int_0^R p \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R p \cdot r \cdot dr \quad (3)$$

Deoarece presiunea pe capacul plan variază cu raza, expresia ei se obține din ecuația suprafeței izobare (ecuația repartiției presiunii pentru un recipient în mișcare de rotație):

$$g \cdot z + \frac{p}{\rho} - \frac{\omega_0^2 \cdot r^2}{2} = \text{Const.}$$

care se scrie pentru condițiile de mișcare a uleiului în recipient:

$$r = \text{variabilă}, p = \text{variabilă și } z = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho} - \frac{\omega_0^2 \cdot r^2}{2} = \text{Const.} \quad (4)$$

$$r = 0, z = H + R, p = p_M \Rightarrow g \cdot (H+R) + \frac{p_M}{\rho} = \text{Const.} \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă distribuția de presiuni pe capacul plan:

$$p = p_M + \rho \cdot g \cdot (H+R) + \rho \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot r^2}{2}$$

care, înlocuită în (3), dă:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \pi \cdot p_M \cdot \int_0^R r dr + 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g \cdot (H+R) \cdot \int_0^R r dr + \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \omega_0^2}{2} \cdot \int_0^R r^3 dr = \\ &= \pi \cdot p_M \cdot R^2 + \pi \cdot \rho \cdot g \cdot (H+R) \cdot R^2 + \frac{\pi \cdot \rho \cdot \omega_0^2 \cdot R^4}{4} \end{aligned}$$

Înlocuind cu datele din enunț se obține valoarea forței pe capacul plan:

$$F = \pi \cdot 0,4 \cdot 10^5 \cdot 1^2 + \pi \cdot 850 \cdot 9,80665 \cdot (2+1) \cdot 1^2 + \frac{\pi \cdot 850 \cdot 40^2 \cdot 1^4}{4} = 1272366,9 \text{ N}$$

### 8.3.2 Probleme propuse spre rezolvare

**8.6.** Pentru sistemul din fig.8.6, care funcționează cu apă sub presiune, se cere:

**a)** presiunea  $p_0$  a pernei de gaz din recipientul de alimentare a sistemului, astfel încât să se realizeze un debit  $Q = 5 \text{ l/s}$ ;

**b)** viteza unghiulară a recipientului A, fără capacul superior, la care apa atinge fundul acestuia (se consideră ca rezervorul este izolat de rețea)

**c)** forțele exercitate de apă asupra cotului 4, de dimensiuni  $a_1 = a_2 = 1,0 \text{ m}$  (se neglijează greutatea cotului)

**d)** timpul de golire a rezervorului B, prin orificiul s de diametru  $d = 0,01 \text{ m}$  și  $\alpha = 0,61$ .

Date:  $H_1 = 1 \text{ m}$ ,  $H_2 = 0,5 \text{ m}$ ,  $h_1 = 300 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 150 \text{ mm}$ ,  $D_1 = 0,25 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0,2 \text{ m}$ ,  $D_3 = 0,1 \text{ m}$ ,  $d_1 = 20 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 40 \text{ mm}$ ,  $L_1 = 20 \text{ m}$ ,  $L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 10 \text{ m}$ ,  $\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_6 = 0,5$ ,  $\zeta_v = 4$ ,  $\lambda_1 = 0,03$  (pe tronsoanele de diametru  $d_1$ ),  $\lambda_2 = 0,025$  (pe tronsonul de diametru  $d_2$ ),  $\rho_{\text{apă}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ;

**R:** **a)**  $p_0 = 10809971 \text{ N/m}^2$ ; **b)**  $\omega = 35,43 \text{ rad/s}$ ; **c)**  $|(F_{L-P})_x| = 1316,628 \text{ N}$ ;  $|(F_{L-P})_y| = 1460,28 \text{ N}$ ;  $F_{L-P} = 1966,196 \text{ N}$



Fig. 8.6

**8.7** Pentru sistemul hidraulic sub presiune, prezentat în fig.8.7, se cunosc: debitul de apă  $Q_4 = 10 \text{ l/s}$ ; presiunea relativă  $p_4 = 0,5 \text{ bar}$ ; cota  $Z_4 = 2 \text{ m}$ ; debitul uniform distribuit pe tronsonul 2-a-3,  $q = 0,05 \text{ l/s.m}$  și elementele geometrice și hidraulice din tabelul de mai jos:

Tronson	1-2	2-a-3	2-b-3	3-4
L <m>	300	100	200	400
D <mm>	200	100	100	100
$\lambda$	?	0,02	0,02	0,02

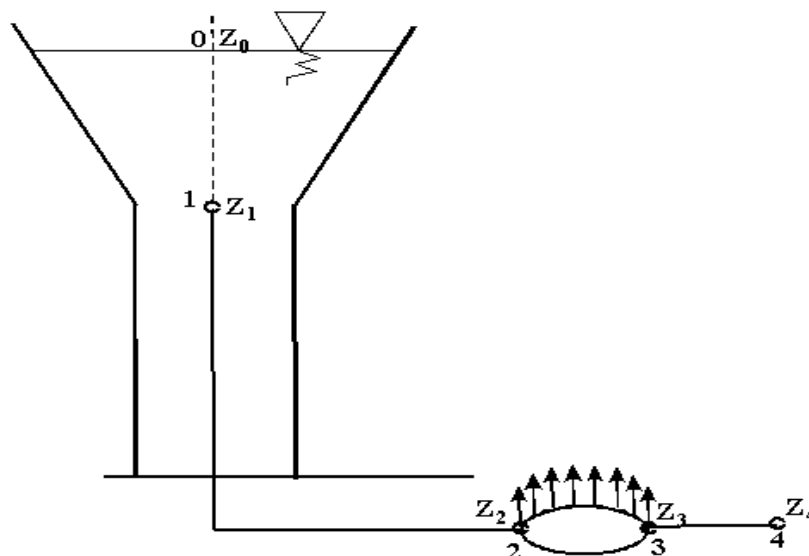


Fig.8.7

Să se calculeze:

- debitele pe fiecare tronson;
- cota  $z_0$  a apei din rezervor.
- Să se precizeze natura regimului de curgere pe tronsonul 1-2, inclusiv tipul zonei (neted, pătratic, tranzitoriu).
- linia piezometrică a sistemului:

Obs. Pentru calculul coeficientului  $\lambda$ , pe tronsonul 1-2, se va folosi formula Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg \left[ \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 \cdot D} \right],$$

în care rugozitatea  $k = 1 \text{ mm}$ .

**R:** a)  $Q_{1-2} = 15 \text{ l/s}$ ;  $Q_{2-a-3} = 7,32 \text{ l/s}$ ;  $Q_{2-b-3} = 5,18 \text{ l/s}$ ;  $Q_{3-4} = 10 \text{ l/s}$ ; b)  $z_0 = 15,04 \text{ m}$ ;  
c) **Regim tranzitoriu**

**8.8** În sistemul din fig.8.8 recipientul compus dintr-un cilindru și un con este umplut cu apă printr-un orificiu din capacul superior. În această situație se cere:

a) debitul pe rețea știind că la ieșire  $p_3 = p_{at}$ , admițând  $H = \text{const}$ ;  
 b) valoarea forțelor care acționează asupra tronsonului divergent;  
 c) valoarea forțelor care solicită fundul și capacul rezervorului dacă acestuia i se imprimă o mișcare de rotație în jurul axului propriu cu turația  $n = 15 \text{ rot/min}$  și este izolat de rețea.

d) să se traseze calitativ linia energetică și cea piezometrică;

Date:  $D = 4 \text{ m}$ ,  $D_1 = D_2 = 200 \text{ mm}$ ,  $D_3 = 400 \text{ mm}$ ,  $R = 5 D_1$ ,  $H = 4 \text{ m}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $L_1 = 3 \text{ m}$ ,  $L_2 = 2 \text{ m}$ ,  $L_3 = 2 \text{ m}$ ,  $L_4 = 4 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0,03$ ,  $\zeta_v = 0,26$ ,  $\zeta_c = 0,15$

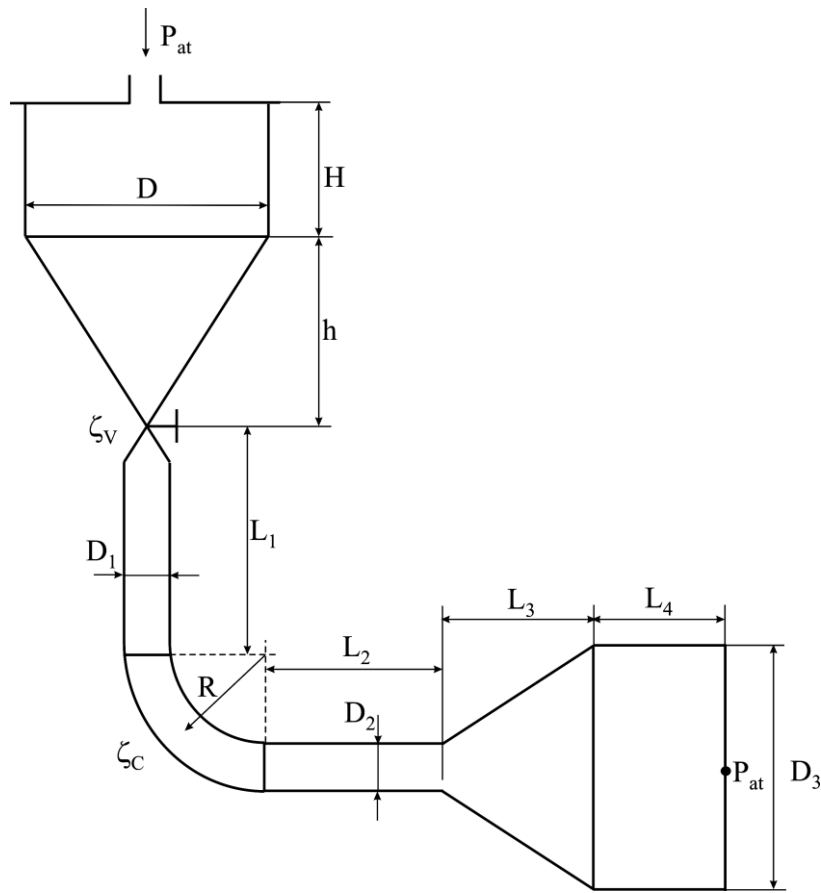


Fig.8.8

**R:** a)  $Q = 0,311 \text{ m}^3/\text{s}$ ; b)  $(F_{L-P})_X = 1643,8 \text{ N}$ ; c) pe capacul circular superior  $F = 31000 \text{ N}$ ; pe fundul conic al rezervorului: forța verticală  $F_Z = 483018 \text{ N}$  și forța orizontală  $F_x = 0$

**8.9** Pentru sistemul din fig.8.9 prin care circulă apă, aflat sub o diferență constantă de cotă  $H$  între suprafețele libere ale apei, se cere:

- viteza și debitul;
- acțiunea curentului asupra cotului de rază  $R$ ;
- timpul de golire al rezervorului tronconic, considerând conducta de la ieșire îndepărtată.

Date:  $D = 200$  mm,  $R_1 = 6$  m,  $R_2 = 4$  m,  $R = 5,73$  m,  $H_1 = 4$  m,  $H = 20$  m,  $L_1 = 20$  m,  $L_2 = 11$  m, coeficientul de debit al orificiului  $\alpha = 0,61$ ,  $\lambda = 0,02$ ,  $\zeta_{v1} = \zeta_{v2} = 5$ ,  $\zeta_c = \zeta_i = 0,5$ .

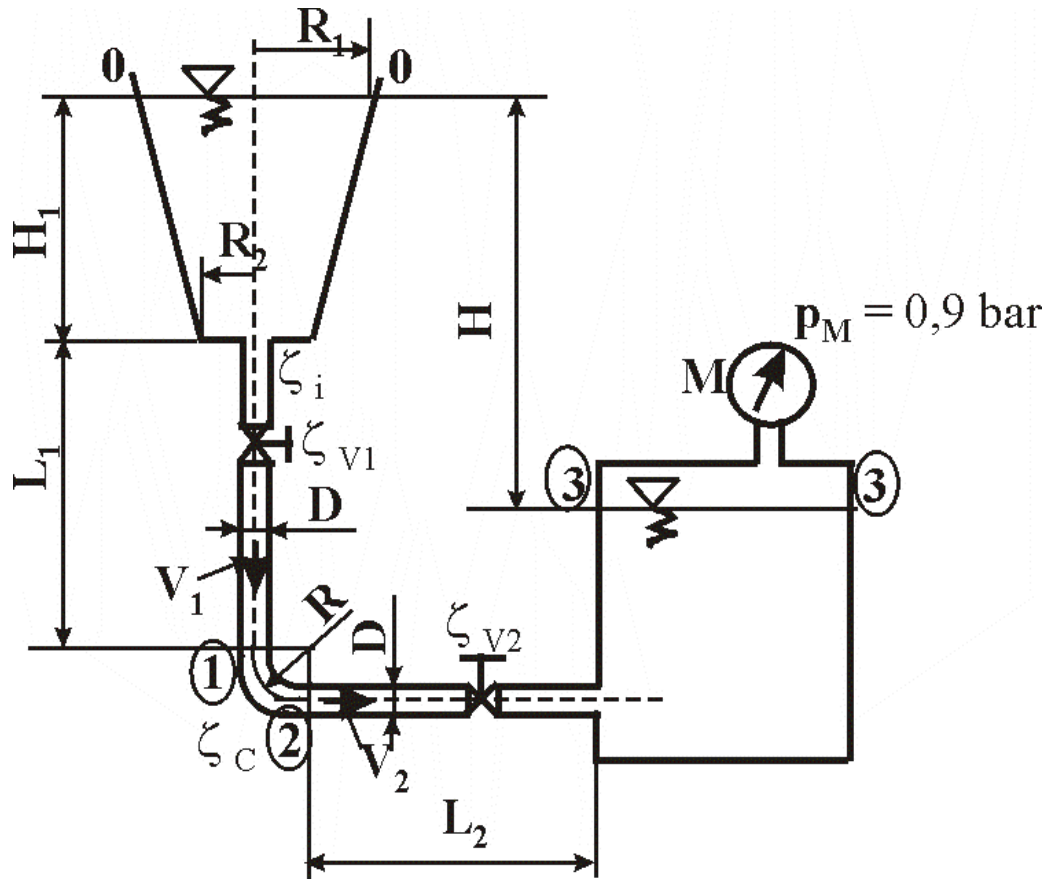


Fig.8.9

**R:** a)  $v = 4,418$  m/s;  $Q = 0,1388$  m<sup>3</sup>/s; b)  $(F_{L-P})_X = -6,737,2$  N;  $(F_{L-P})_z = -8173,9$  N  
 $F_{L-P} = 10592,6$  N; c)  $t = 819,3$  s

- 8.10** Pentru sistemul din fig. 8.10, care funcționează cu apă, se cere:
- debitul de apă ce trece prin instalație;
  - componentele orizontale ale acțiunii lichidului asupra injectorului curb, dispus în plan orizontal;
  - forța ce acționează asupra capacului de vizitare;
  - turația rezervorului în jurul axei sale verticale când lichidul atinge capacul superior al acestuia și conducta orizontală este detașată.
- Date:  $R = 1 \text{ m}$ ,  $\zeta_{\text{injector}} = 0,1$ ,  $\zeta_i = 0,5$ ,  $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$ .

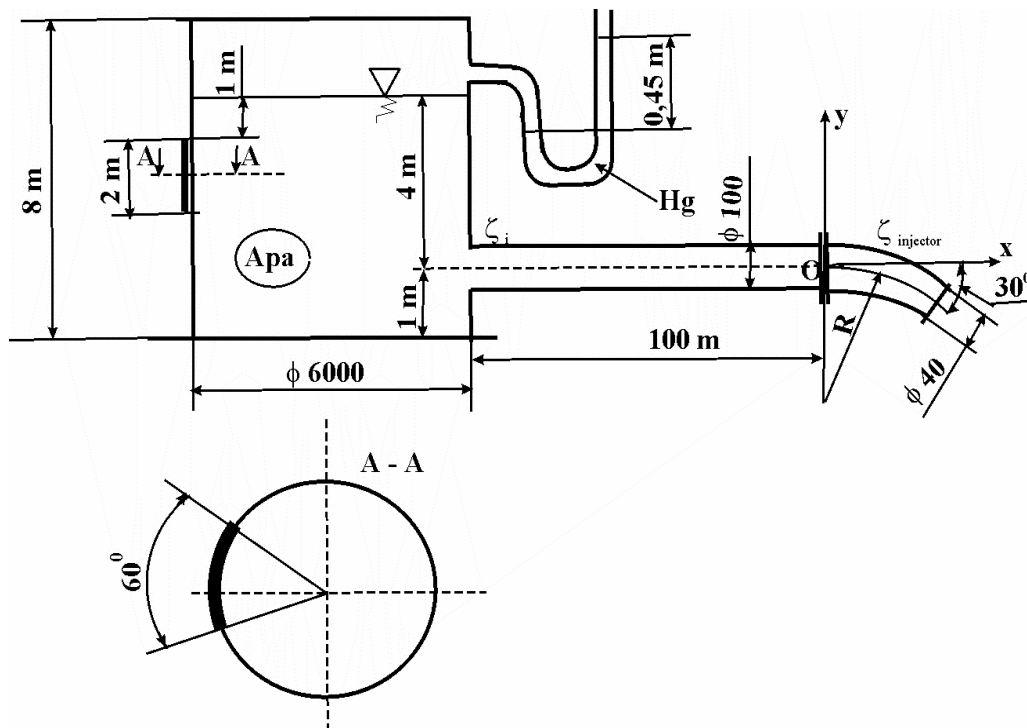


Fig.8.10

- R:** a)  $Q = 0,123 \text{ m}^3/\text{s}$ ;  $v = 1,562 \text{ m/s}$ ; b)  $(F_{L-P})_X = 298,9 \text{ N}$ ;  $(F_{L-P})_Y = 59,9 \text{ N}$   
 c)  $F = 477779,8 \text{ N}$ ; d)  $n = 34,53 \text{ rot/min}$

**8.11** Un sistem prin care circulă un lichid, de densitate  $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ , sub presiune, este compus dintr-un recipient cilindric prevăzut cu două capace dispuse lateral la același nivel și legat la o rețea ca în fig.8.11. Să se determine:

a) forțele hidrostatice exercitate pe capacul circular AB și pe capacul semisferic CD;

b) debitul lichidului ce trece prin conductele orizontale;

c) forța exercitată de curentul de lichid asupra cotului dispus în plan orizontal, de dimensiuni  $L_4, L_5$  și  $d_1$  (greutatea lichidului din cot se neglijează).

Date:  $p_0 = 1 \text{ bar}$  (scara manometrică),  $d = 0,4 \text{ m}$ ,  $d_1 = 0,2 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,4 \text{ m}$ ,  $L_4 = 1 \text{ m}$ ,  $L_1 = L_3 = 15 \text{ m}$ ,  $L_2 = L_5 = 10 \text{ m}$ ,  $k = 1 \text{ mm}$ ,  $\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0,5$ ,  $\nu = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

**R: a)  $F_{AB} = -12629,12 \text{ N}$ ; b)  $F_{CDX} = 12,629,12 \text{ N}$ ;  $F_{CDZ} = 98,58 \text{ N}$ ; b)  $Q = 137,066$ ; c)  $R = 1658,92 \text{ N}$**

**8.12** Rezervorul din fig.8.12 este închis și conține un tampon de aer la presiunea  $p_0 = 2 \text{ bar}$ . Din racordul acestuia, prevăzut cu vana de izolare  $V_1$ , pleacă o conductă ale cărei dimensiuni și traseu sunt redată în fig.8.12. Pe conductă se află montată o diafragmă și o vană de capăt  $V_2$ . Să se determine:

a) linia energetică a conductei;

b) debitul de apă vehiculat prin conductă;

c) dacă este cavitație în diafragma de diametru  $d = 100 \text{ mm}$ , știind că temperatura de funcționare a instalației este de  $20^\circ\text{C}$ , iar presiunea de vaporizare este  $p_{\text{vap}} = 2337 \text{ Pa}$ ;

d) timpul de golire al rezervorului cilindric printr-un orificiu de secțiune  $S = 1 \text{ dm}^2$  plasat la jumătatea lungimii generatoarei, dacă acesta este în poziție orizontală, are capacele plane, este izolat de conductă și este umplut cu apă.

Date:  $D_R = 2 \text{ m}$ ;  $D = 200 \text{ mm}$ ;  $L_1 = 0,2 \text{ m}$ ;  $L_2 = 3 \text{ m}$ ;  $L_3 = 1 \text{ m}$ ;  $L_4 = 5 \text{ m}$ ;  $L_5 = 4 \text{ m}$ ;  $h = 1,2 \text{ m}$ ;  $z_0 = 1,5 \text{ m}$ ;  $\zeta_i = 0,5$ ;  $\zeta_{V1} = \zeta_{V2} = 0,6$ ;  $\zeta_c = 0,2$ ;  $\lambda = 0,3$ ;  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**R: Pierderile necesare trasării liniei energetice**

$$h_{pi} = \zeta_i \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,5 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}; \quad h_{pL1} = \lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,03 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{pV1} = \zeta_V \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,6 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}; \quad h_{pL2} = \lambda \cdot \frac{L_2}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,45 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{pC3} = \zeta_c \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,2 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}; \quad h_{pL3} = \lambda \cdot \frac{L_3}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,15 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

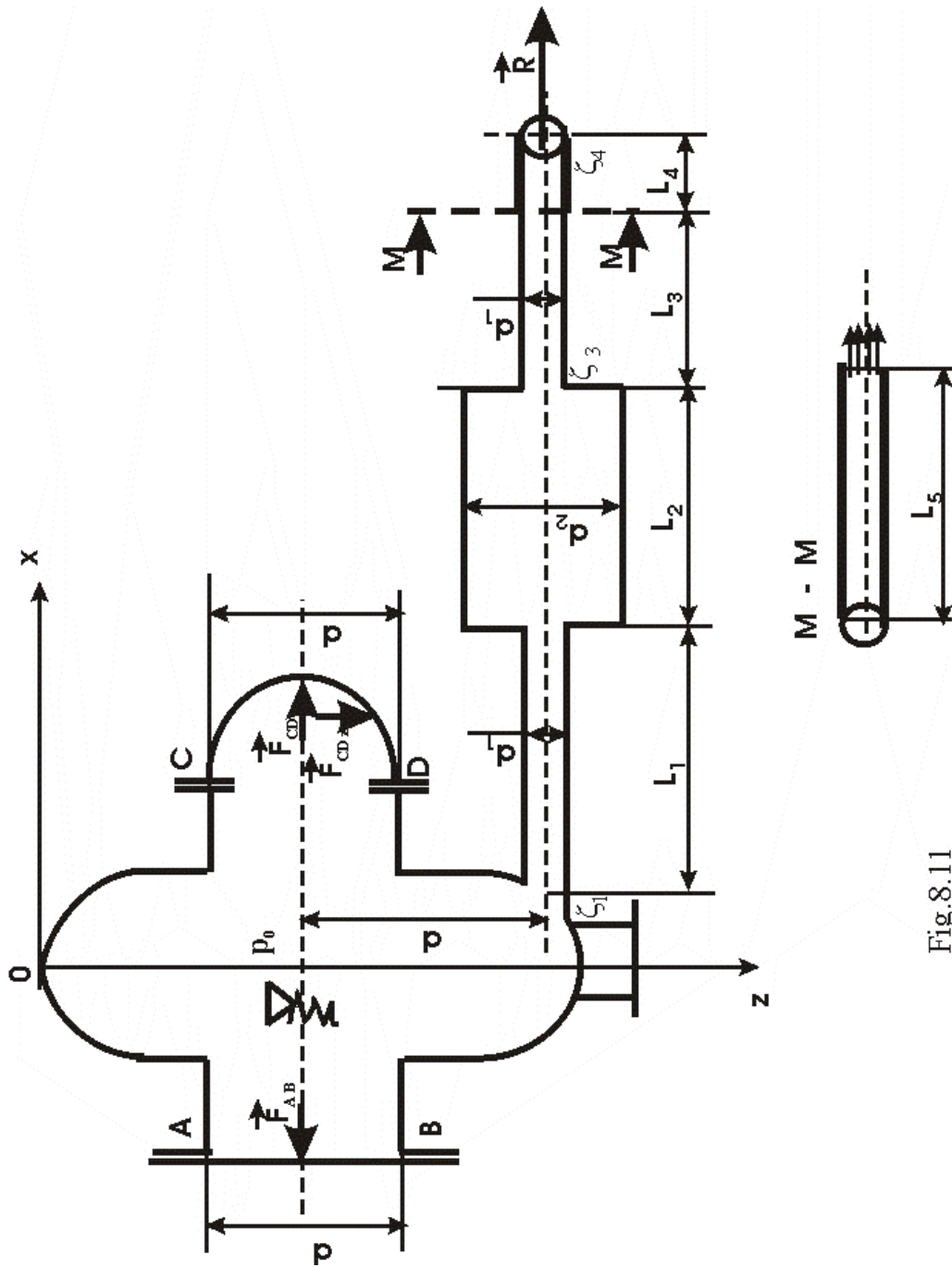


Fig.8.11

Fig. 8.12



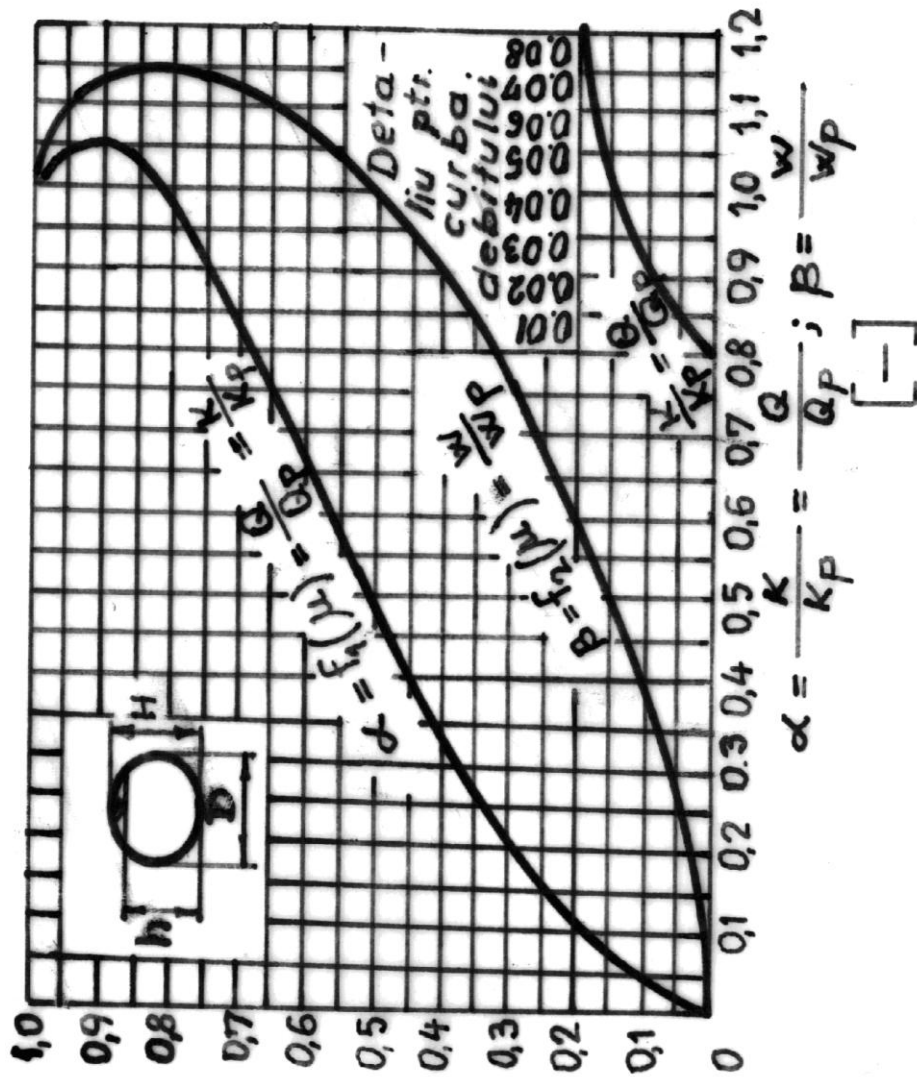
$$h_{pC5} = \zeta_c \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,2 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}; h_{pL4} = \lambda \cdot \frac{L_4}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,75 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{pdiaf} = \zeta_d \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 2 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}; h_{pL5} = \lambda \cdot \frac{L_5}{D} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,6 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

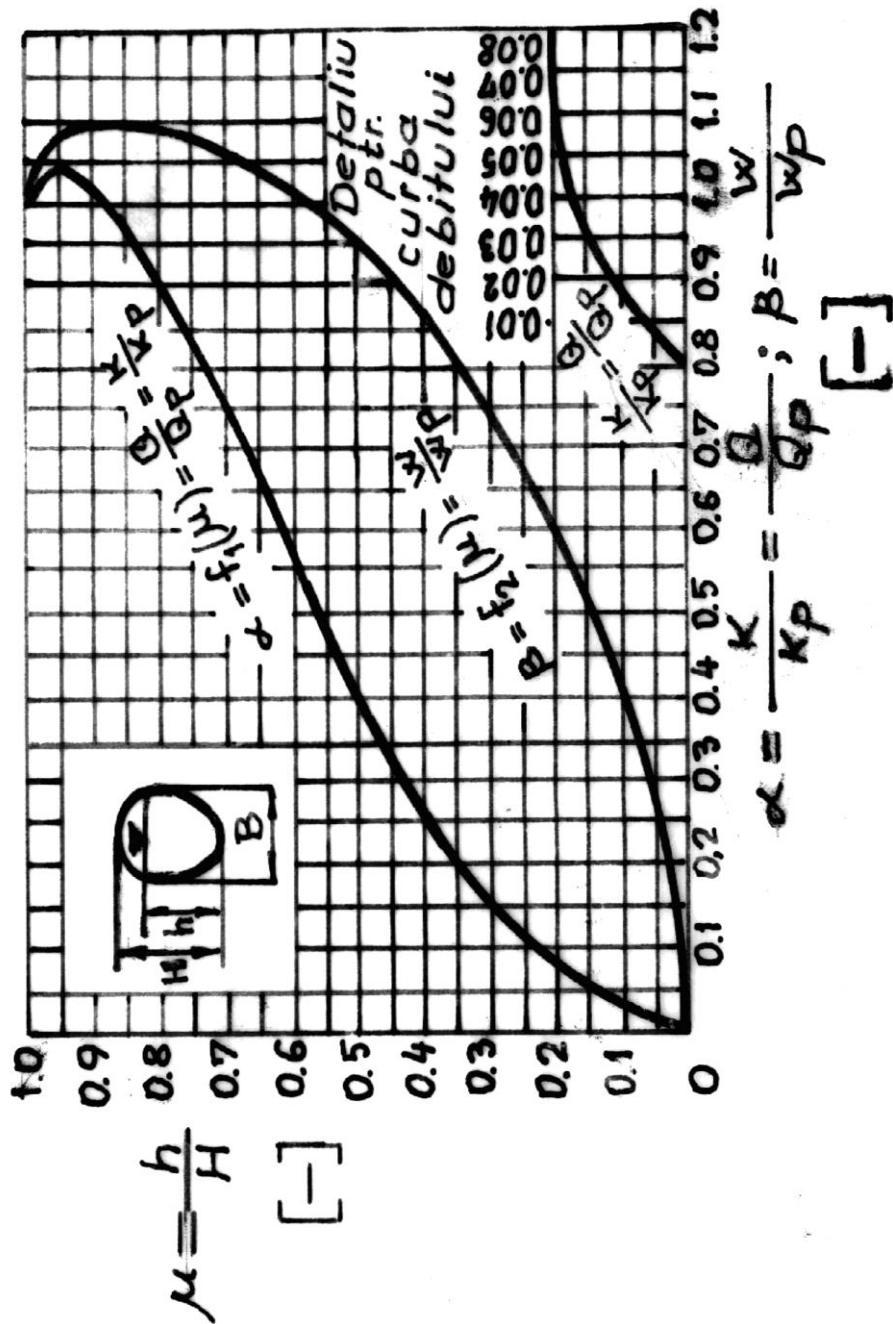
$$h_{pV2} = \zeta_v \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0,6 \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g};$$

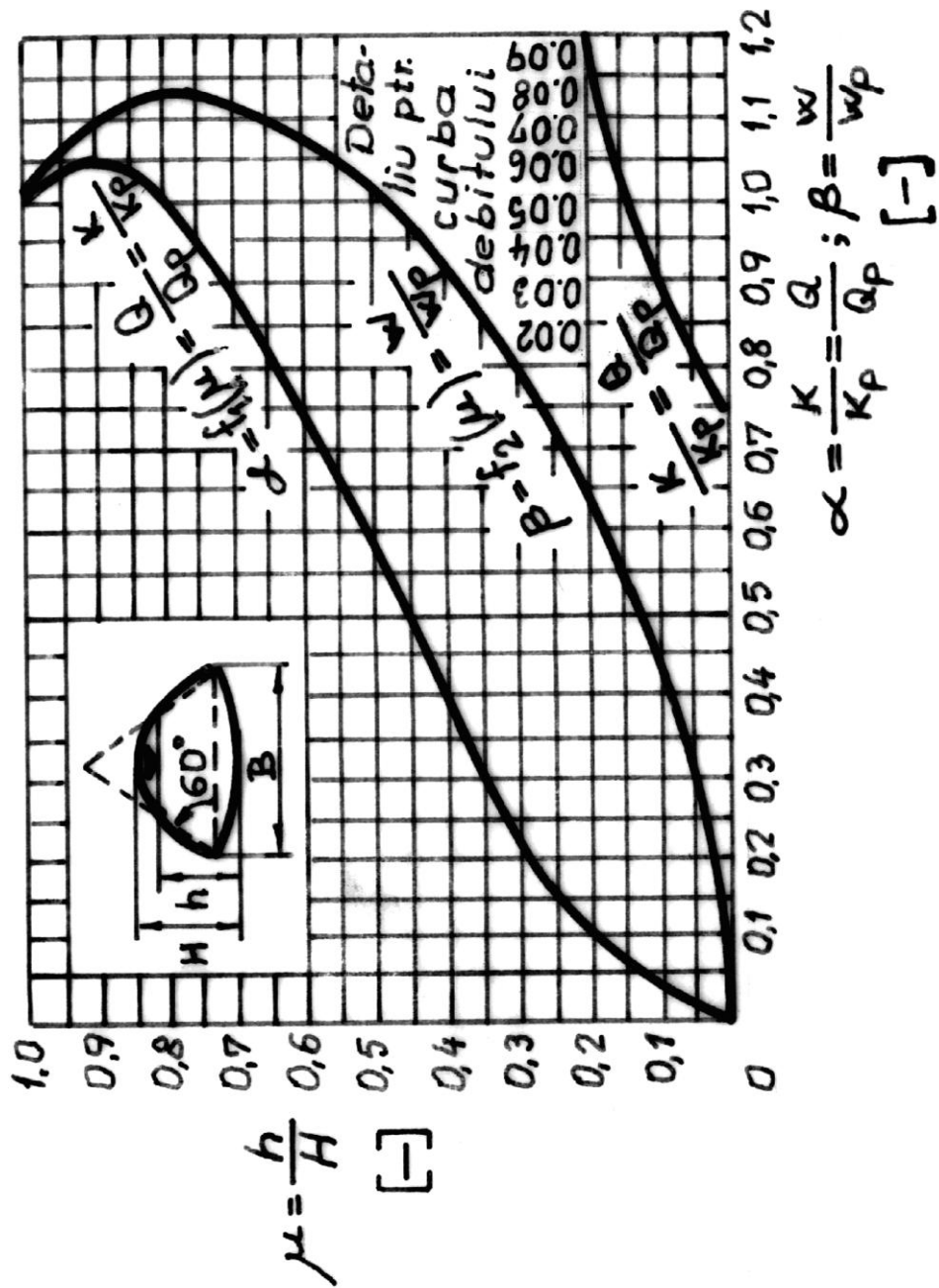
**b) Q = 0,251 m<sup>3</sup>/s; c) există cavitație ; d) t = 2128,5 s**

ANEXA  
(Fig.6.c)



$$\mu = \frac{h}{D} \quad [-]$$







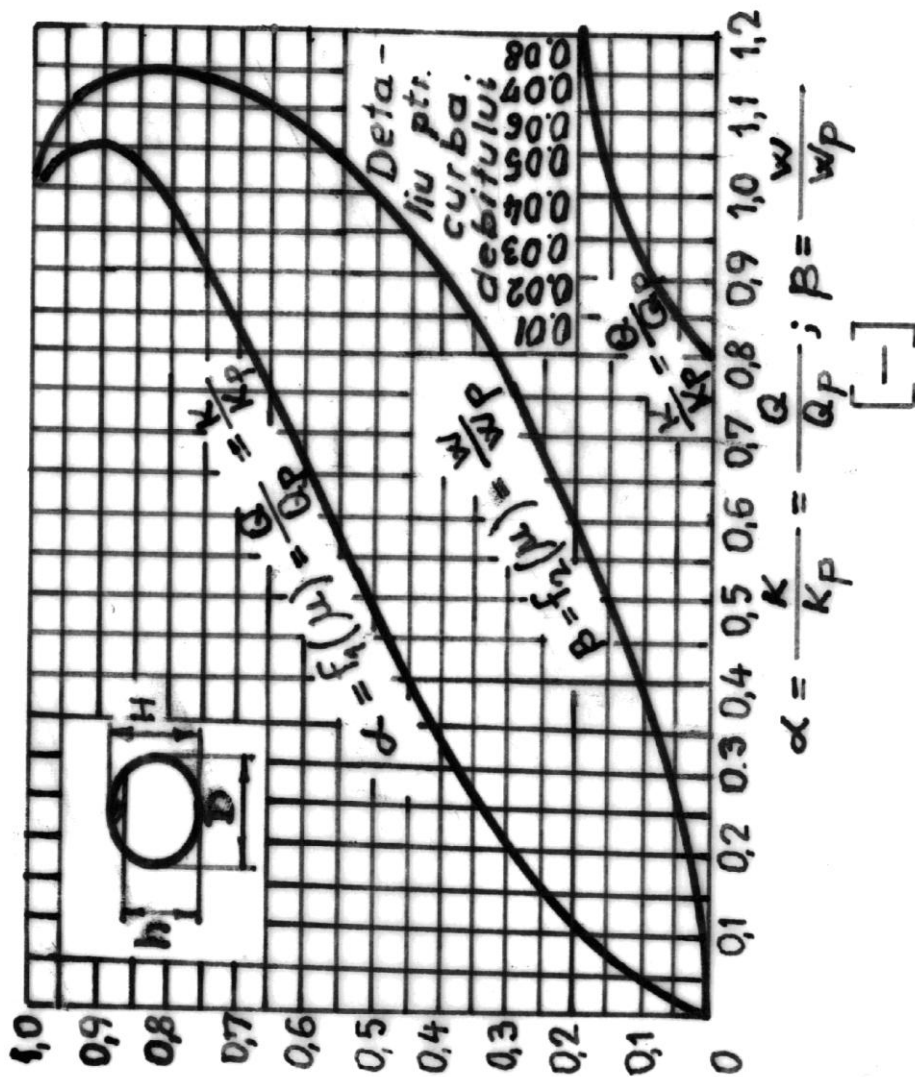
## **BIBLIOGRAFIE**

1. Ancușa V., Mecanica Fluidelor și mașini hidraulice, Culegere de probleme, Ediția I-a, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1992
2. Ancușa V., Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, curs, Vol.I, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1979
3. Ancușa V., Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, Curs, Vol.II, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1980
4. Ancușa V., Instalații de transport hidropneumatic și depoluare, Vol.I, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1985.
5. Ancușa V., Instalații de transport hidropneumatic și depoluare, Vol.II, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1988.
6. Anton I. – “Turbine hidraulice”, Editura “Facla”, Timișoara, 1979
7. Anton V., Popoviciu M., Fitero I., - Hidraulică și mașini hidraulice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
8. Bordeășu I., Baciuc I.D., Hidraulică. Noțiuni teoretice și probleme de hidrostatică, Editura Politehnică, Timișoara, 2002
9. Bărglăzan M. – “Turbine hidraulice și transmisii hidrodinamice”, Editura “Politehnică”, Timișoara, 1999
10. Carte I.N., – “Hidraulică și mașini hidraulice”, Institutul Politehnic “Traian Vuia”, Timișoara, 1985, 1986
11. Cioc D., ș.a., - Hidraulică, Culegere de probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985
12. Dobanda E. – “Instalații de pompare. Notițe de curs”, Universitatea “Politehnică” din Timișoara, 2003
13. Duglas., J.F., - Solution of Problems in Fluid Mechanics, Part 2, ISBN 0273-00878-1, London, WC285PB, 1976
14. Florea J., ș.a., - Mecanica fluidelor-probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
15. Giles R.V., Fluid Mechanics and Hydraulics, Theorz and problems, 2-eme Edition, Schaum’s outline series, McGraw-Hill Book Company, Montreal, 1977.
16. Giurconiu, M., ș.a., - Culegere de probleme de hidraulică teoretică și aplicată, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1983
17. Gyulai Fr. – “Pompe, ventilatoare, compresoare”, Institutul Politehnic “Traian Vuia”, Timișoara, 1988
18. Ionescu Gh., - Introducere în hidraulică, Editura Tehnică, București, 1977.
19. Idelcik., I.E., - Îndrumător pentru calculul rezistențelor hidraulice, Editura Tehnică București, 1984

20. Kiselev P.G., - Îndreptar pentru calcule hidraulice, editura Tehnică, București, 1988
21. Nicoară tr., ș.a., - Hidraulica, Culegere de probleme, Litografia Institutului Politehnic Traian Vuia, Timișoara, 1986.
22. Vasilescu Al., A., - Analiza dimensională și teoria similitudinii, Editura Academiei RSR, București, 1969

ANEXA

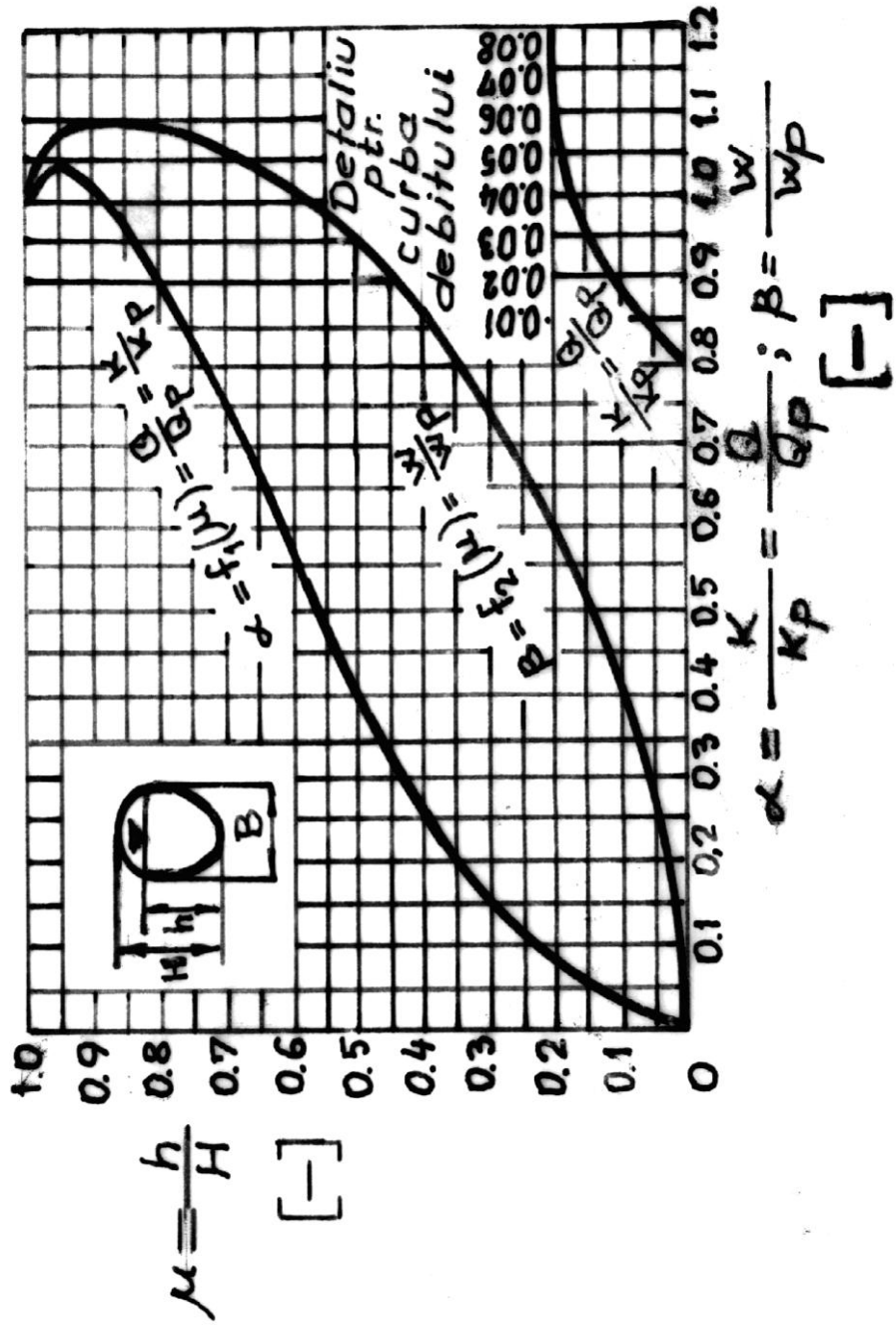
(Fig.6.c)



$$\mu = \frac{h}{D} \quad [-]$$



(Fig.6.c)



(Fig.6.c)

