

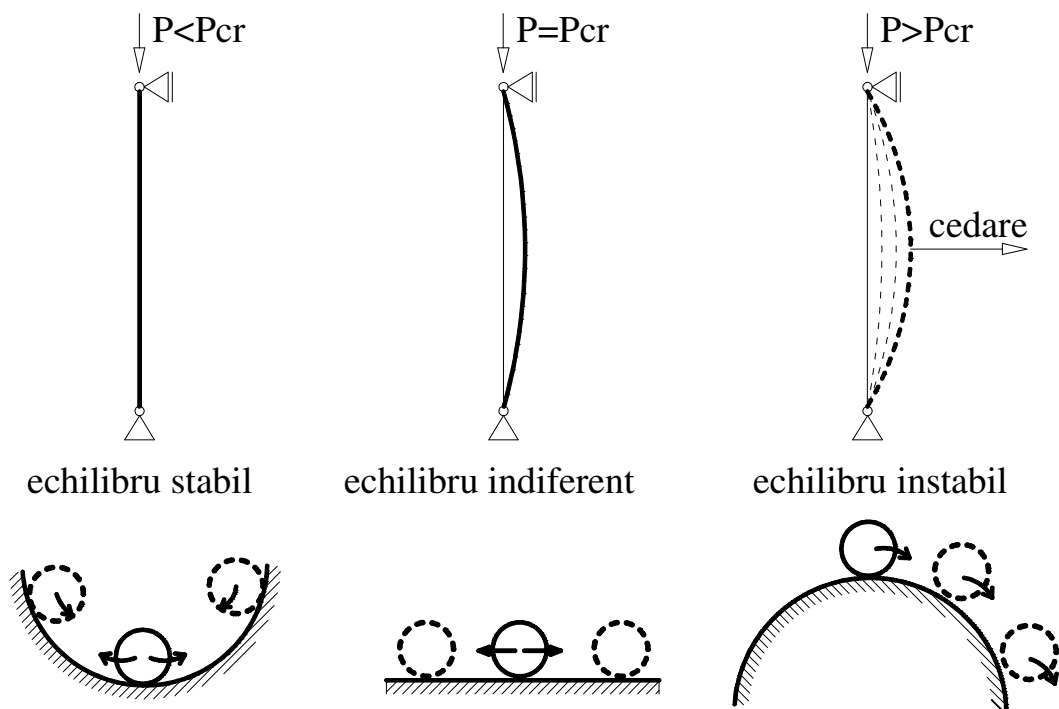
## Curs 2

# BARE SOLICITATE LA COMPRESIUNE AXIALA

### Calculul de stabilitate

1. Conceptul de pierdere a stabilitatii
  - instabilitate prin bifurcarea echilibrului.
  - Instabilitate prin divergenta echilibrului.

#### INSTABILITATE PRIN BIFURCAREA ECHILIBRULUI - PRINCIPIUL -



# PROBLEMA FLAMBAJULUI : ISTORIC

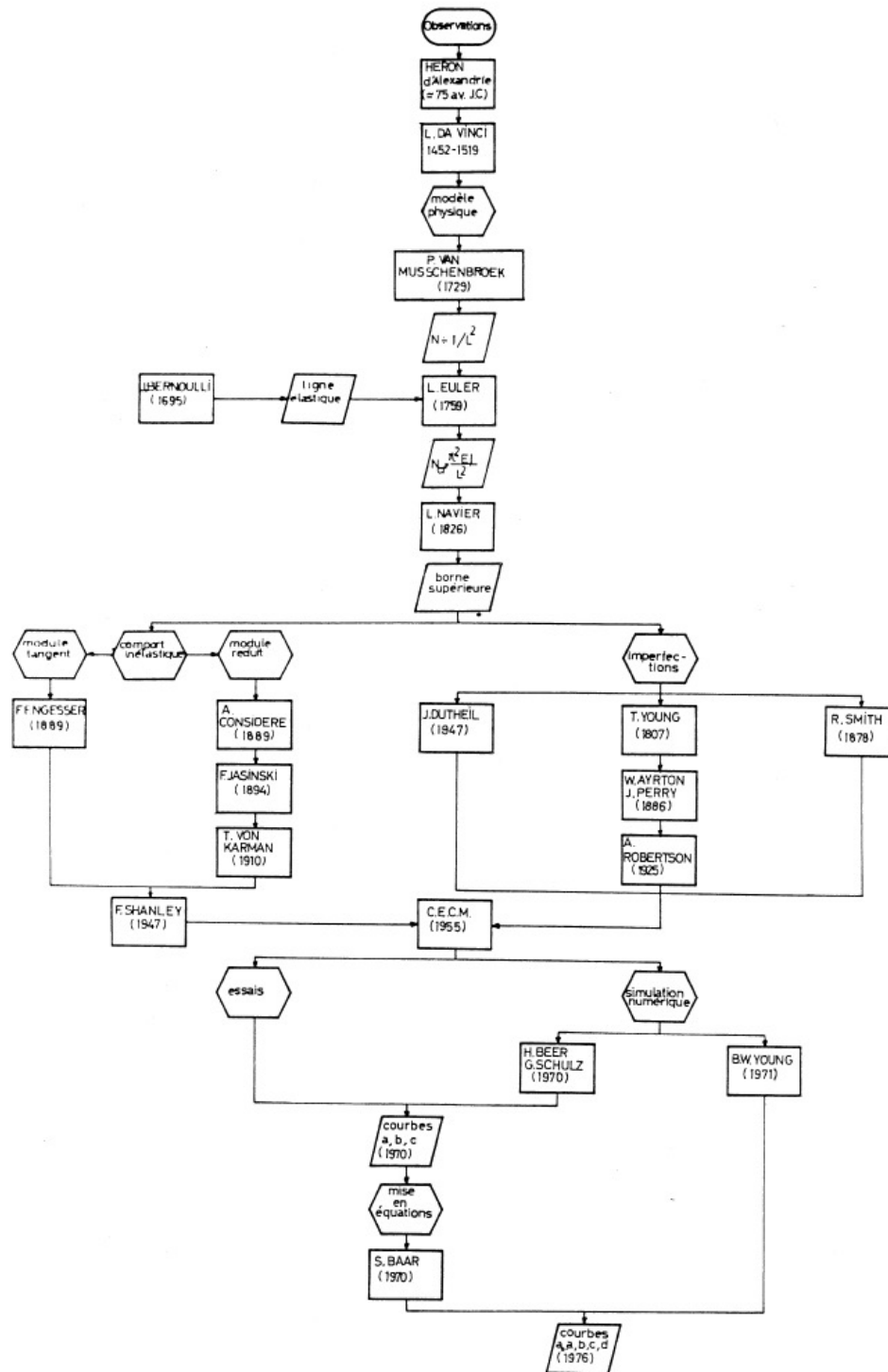
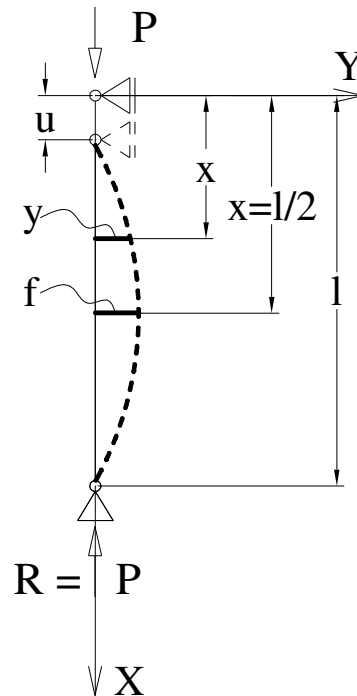


Fig. 1 - Historique de l'étude du flambement

# BIFURCAREA ECHILIBRULUI

(flambaj prin incovoiere)



$$M_{(x)} = Px$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ky = 0; k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

1)  $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow c_2 = 0$

2)  $x=l \Rightarrow y=0 \Rightarrow c_1 \sin kl = 0$

a)  $c_1 = 0 \Rightarrow$  bara nu se deformeaza (contradictie)

b)  $k = 0 \Rightarrow P = 0$  (nu este conform cu realitatea)

c)  $\sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{Euler 1759})$$

# BIFURCAREA ECHILIBRULUI

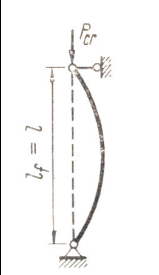
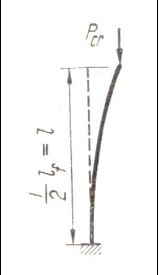
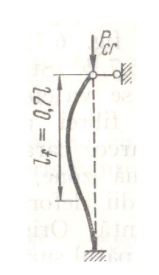
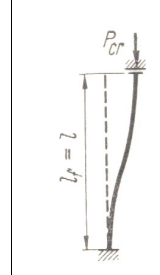
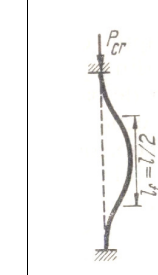
## Cazuri Fundamentale

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}$$

$l_f$  = lungime de flambaj = distanta dintre 2 pcte. de inflexiune consecutive a deformatiei barei.

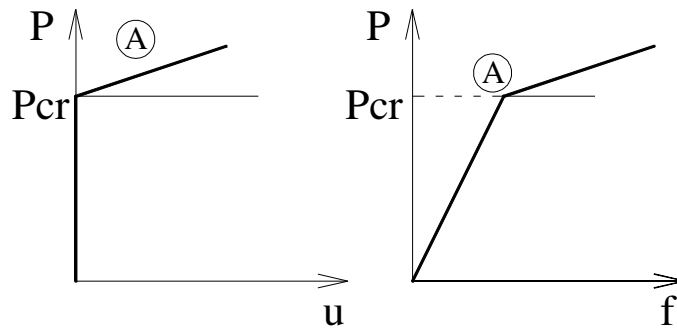
$$l_f = \mu l$$

Exista 5 cazuri fundamentale de flambaj:

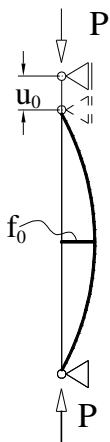
Deformata barei					
Ecuatia caracteristica	$\sin kl = 0$	$\cos kl = 0$	$tgkl - kl = 0$	$\sin kl = 0$	$\cos kl - 1 = 0$
Forța critică	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$\frac{20,19 EI}{l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$
Lungimea de flambaj	$l$	$2l$	$0,7l$	$l$	$0,5l$
Coeficientul lungimii de flambaj	1	2	0,7	1	0,5

# BIFURCAREA ECHILIBRULUI

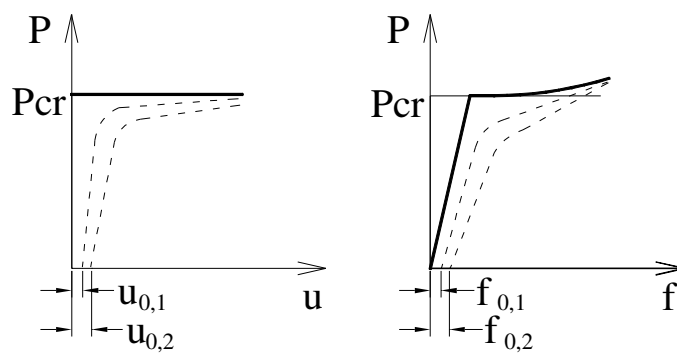
Flambaj prin incovoiere – bara perfecta



## Bara imperfecta

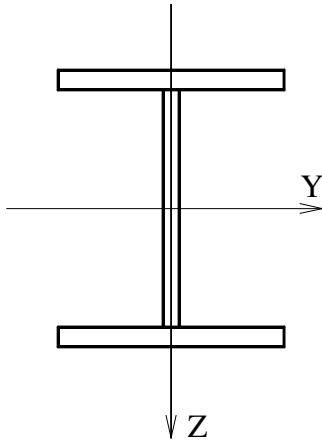


- Procesul de deformare este continuu
- Cedarea are loc prin "limitarea " echilibrului



# BIFURCAREA ECHILIBRULUI

Flambaj prin incovoiere



$$P_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_{fy}^2}; \quad l_{fy} = \mu_y l$$

$$P_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_{fz}^2}; \quad l_{fz} = \mu_z l$$

$$P_{cr} = \min(P_{cr,y}; P_{cr,z})$$

- Rigiditatea  $EI$  depinde de geometria secțiunii ( $I_y, I_z$ ).
- Lungimea de flambaj depinde prin  $\mu$  de condițiile de rezemare.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_f}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}; \quad \lambda = \frac{l_f}{i} \quad \lambda = \text{coeficient de zveltete}$$

$$\sigma_{cr,y} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}; \quad \sigma_{cr,z} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2}; \quad \sigma_{cr} = \min(\sigma_{cr,y}; \sigma_{cr,z})$$

$$\lambda_y = \frac{l_{fy}}{i_y}; \quad \lambda_z = \frac{l_{fz}}{i_z}$$

**Valoarea maxima a zveltetei se limiteaza prin norme sau rezulta din analiza.!**

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \quad /: N_{pl} = A f_y$$

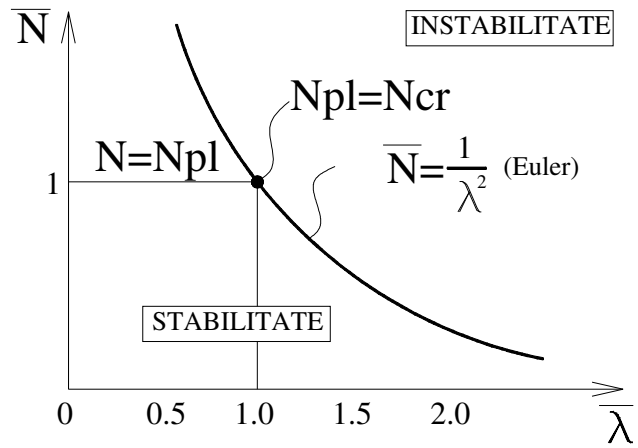
$$\bar{N} = \frac{N_{cr}}{N_{pl}} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2 A f_y} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 f_y}$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad \Rightarrow \bar{N} = \frac{N_{cr}}{N_{pl}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2; \quad \bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$$

$\bar{N}$  : forța de flambaj normalizată sau adimensională.

$\bar{\lambda}$  : zveltetea normalizată sau adimensională sau redusă a barei.

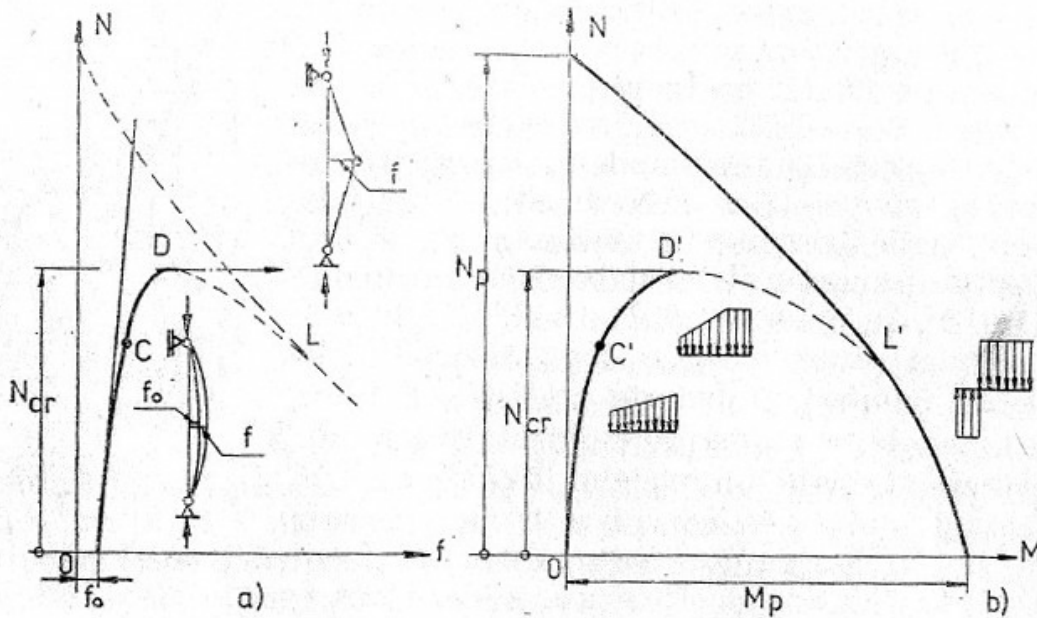
$\lambda_1$  : zveltetea barei ideale pentru care  $N_{cr} = N_{pl} \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = f_y$



	<b>S235</b>	<b>S275</b>	<b>S355</b>
$\lambda_1$	<b>94</b>	<b>86</b>	<b>76</b>

## DIVERGENTA ECHILIBRULUI

- Bara este imperfecta
- Materialul se comporta elasto-plastic.
  - = > procesul de deformare se initiaza din momentul aplicarii fortei, cedarea are loc in momentul plasticizarii totale a sectiunii, adica prin formarea unei articulatii plastice.

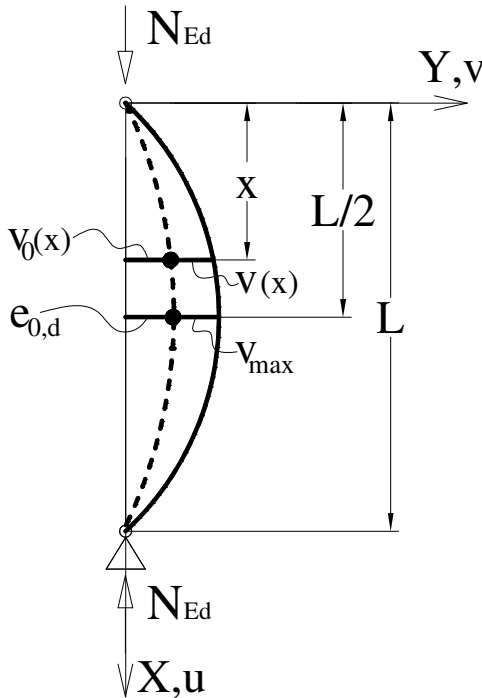


Capacitatea portanta a barei (momentul incovoietor capabil sau rezistent) ajunge in divergenta cu solicitarea (momentul fortelor exterioare) care tinde sa creasca in situatia in care bara si-a atins capacitatea portanta limita. =>  **$M=M_p$**   
 Modelul de instabilitate prin divergenta echilibrului este la bara curbelor de flambaj europene.



# BAZELE TEORETICE ALE CURBELOR EUROPENE DE FLAMBAJ

\* Flambajul este tratat ca o problema de ordinul II, avand la baza modelul fizic de divergenta a echilibrului.



$$v_0(x) = e_{0,d} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (1)$$

$$v_{0,max} (x = \frac{L}{2}) = e_{0,d} \quad (2)$$

$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3)$$

$$v_{max} = v(x = \frac{L}{2}) = A \quad (4)$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{N_{Ed}}{EI} (v_0(x) + v(x)) = 0 \quad (5)$$

$$(1), (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow A = \frac{N_{Ed}}{N_{Cr} - N_{Ed}} e_{0,d} \quad (6)$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

(7)

$$(6) \Rightarrow (4) \Rightarrow v_{max} = \frac{N_{Ed}}{N_{Cr} - N_{Ed}} e_{0,d}$$

$$v_{tot} = v_{max} + e_{0,d} = \frac{N_{Ed}}{N_{Cr} - N_{Ed}} e_{0,d}$$

$$v_{tot} = \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{Cr}} e_{0,d} \quad (8)$$

Bara este solicitata la compresiune axiala,  $N_{Ed}$ , si momentul incovoietor de ordinal II,

$$M_{Ed}'' = N_{Ed} v_{tot} \quad (9)$$

La mijlocul barei,

$$M_{Ed,max}'' = N_{Ed} \left[ \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{Cr}} e_{0,d} \right] \quad (10)$$

Relatia de interactiune  $N_{Ed} - M_{Ed}''$  pentru verificare este:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{Ed,max}''}{M_{Rd}} \leq 1 \quad (11)$$

Fora  $N_{Ed}$  poate creste pana la colaps (flambaj) =>

$$N_{Ed} = N_{b,Rd} = \chi N_{Rd} \quad (12)$$

=> coeficientul de reducere la flambaj:

$$\chi = \frac{N_{b,Rd}}{N_{Rd}} < 1$$

$N_{b,Rd}$  = forța de cedare la flambaj

$$N_{Rd} = f_y \cdot A = N_{pl}$$

$$M_{Rd} = f_y \cdot W_{el}$$

Formula Ayrton-Perry:

$$(11) \Rightarrow \boxed{(1 - \chi)(1 - \chi \lambda^2) = e_{0,d} \frac{A}{W_{el}} \chi = \eta \chi} \quad (13)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}}$$

$$\eta = e_{0,d} \frac{A}{W_{el}} - \text{imperfecțiunea generalizată} \quad (14)$$

$$\Rightarrow \text{prin calibrare experimentală: } \eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) \quad (15)$$

$\alpha$  este factorul de imperfecțiune

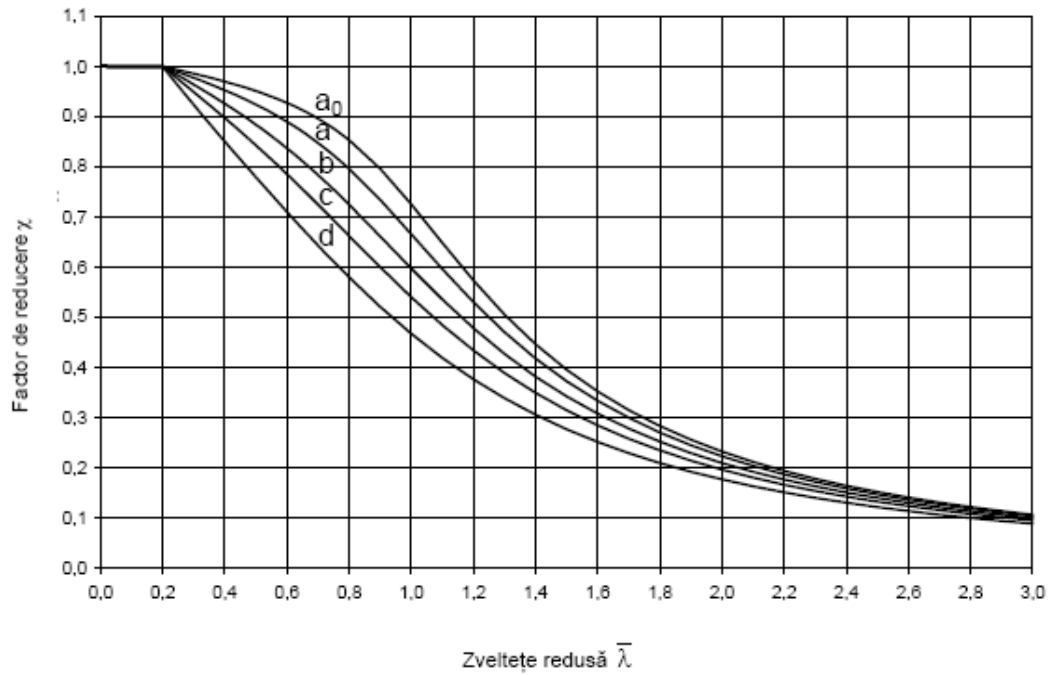
Type de profil	$h \times e_a$ ou $\varnothing \times e$ mm	$b \times e$ mm	Section nominală $S_n$ mm <sup>2</sup>	$i_y$ mm	nombre d'essais 1067
<b>1. Profilés I :</b>					516
IAP 150 .....	150 × 5,3	75 × 8,5	2042	17,1	238
IPE 160 .....	160 × 5	82 × 7,4	2010	18,4	231
IPE 200 .....	200 × 5,6	100 × 8,5	2850	22,4	11
IPN 160 .....	160 × 9,5	74 × 9,5	2280	15,5	36
<b>2. Profilés I et H :</b>					54
RSJ 5" × 3" .....	127 × 4,5	76,2 × 7,6	1706	17,2	10
DIE 20 .....	190 × 7	197 × 11	5703	49,6	11
DIR 20 .....	220 × 16	206 × 26	13594	52,8	11
I reconstitué soudé .....	190 × 7	197 × 11	5703	49,6	22
<b>3. Profilés tubes ronds :</b>					139
Tube sans soudure .....	121 × 5,5		1996	40,9	29
BS 15 soudé .....	114,3 × 6,35		2154	38,1	40
Tube sans soudure .....	88,9 × 5		1320	29,7	60
Tube sans soudure .....	88,9 × 8		2028	28,7	10
<b>4. Profilés tubes carrés :</b>					188
BS 15 sans soudure .....	127 × 4,76		2370	49,8	67
BS 15 soudé .....	88,9 × 6,35		1990	32,0	40
BS 15 soudé .....	76,2 × 4,88		1329	28,7	81
<b>5. Profilés en T :</b>					94
1/2 IPN 200 .....	100 × 7,5	90 × 11,3	1872	18,8	40
T 4" × 3" .....	76,2 × 12,7	101,6 × 12,7	2102	21,6	10
TB 60 .....	60 × 10	120 × 10	1700	14,8	30
cornières L rivées .....	70 × (2 × 7)	(2 × 70) × 7	1872	21,2	14
<b>6. Profilés en caisson :</b>					76
caisson carré soudé .....	150 × 10	150 × 10	5600	52,3	22
2 cornières soudées .....	50 × 5	50 × 5	982	20	54

Tabelul 6.1 - Factori de imperfecțiune pentru curbele de flambaj

Curba de flambaj	$a_0$	a	b	c	d
Factor de imperfecțiune $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabelul 5.1- Valorile de calcul ale imperfecțiunilor inițiale în arc  $e_0 / L$

Curbă de flambaj după Eroare! Fără sursă de referință.	analiză elastică	analiză plastică
	$e_0 / L$	$e_0 / L$
$a_0$	1 / 350	1 / 300
a	1 / 300	1 / 250
b	1 / 250	1 / 200
c	1 / 200	1 / 150
d	1 / 150	1 / 100



### 6.3 Rezistența barelor la pierderea stabilității generale

#### 6.3.1 Elemente supuse la compresiune uniformă

##### 6.3.1.1 Rezistență la flambaj

(1) O bară comprimată poate fi verificată la flambaj astfel:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1,0 \quad (6.46)$$

în care  $N_{Ed}$  este valoarea de calcul a efortului de compresiune;

$N_{b,Rd}$  este rezistența de calcul a barei comprimate la flambaj.

(2) Pentru barele cu secțiune asimetrică din Clasa 4, trebuie să se ia în considerare momentul adițional  $\Delta M_{Ed}$  produs de excentricitatea axei neutre a secțiunii eficiente a se vedea și 6.2.2.5(4), și interacțiunea trebuie verificată conform 6.3.4 sau 6.3.3.

(3) Rezistența de calcul la flambaj a unei bare comprimate este egală cu:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 1, 2 și 3} \quad (6.47)$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 4} \quad (6.48)$$

în care  $\chi$  este factorul de reducere pentru modul de flambaj considerat.

NOTĂ - Verificarea la flambaj a barelor cu secțiune variabilă pe lungimea lor sau cu distribuție neuniformă a efortului de compresiune trebuie efectuată cu ajutorul unei analize de ordinul doi conform 5.3.4(2). Pentru verificarea la flambaj în afara planului a se vedea și 6.3.4.

(4) Pentru determinarea lui  $A$  și  $A_{eff}$  nu trebuie luate în considerare găurile de fixare situate la extremitățile stâlpilor.

##### 6.3.1.2 Curbe de flambaj

(1) În cazul barelor comprimate concentric, valoarea  $\chi$  trebuie calculată, ținând seama de curba de flambaj corespunzătoare, utilizând următoarea relație:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{dar } \chi \leq 1,0 \quad (6.49)$$

în care  $\Phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 1, 2 și 3}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 4}$$

$\alpha$  este factor de imperfecțiune

$N_{cr}$  efort axial critic de flambaj elastic, corespunzător modului de flambaj considerat, calculat pe baza caracteristicilor secțiunii transversale brute.

(2) Factorul de imperfecțiune  $\alpha$  trebuie luat din tabelul 6.1 funcție de curba de flambaj considerată, luată din tabelul 6.2.

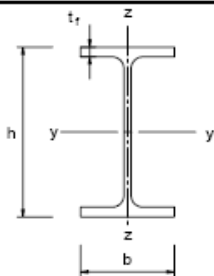
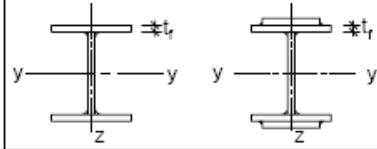

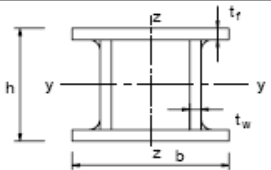
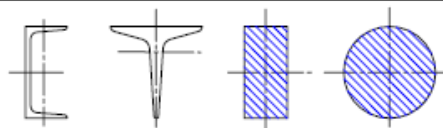

Tabelul 6.1 - Factori de imperfecțiune pentru curbele de flambaj

Curba de flambaj	a <sub>0</sub>	a	b	c	d
Factor de imperfecțiune α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

(3) Valorile factorului de reducere  $\chi$  pot fi obținute din figura 6.4 în funcție de zveltețea redusă  $\bar{\lambda}$ .

(4) Pentru o zveltețe  $\bar{\lambda} \leq 0,2$  sau pentru  $\frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \leq 0,04$  se pot neglija efectele flambajului rămânând să se facă numai verificările de rezistență pentru secțiunile transversale.

Tabelul 6.2- Alegerea curbei de flambaj pentru o secțiune transversală.

Secțiune transversală	Limite	Flambaj după axa	Curbă de flambaj		
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Profile laminare 	$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40$ mm	y-y z-z	a b	a <sub>0</sub> a <sub>0</sub>
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y-y z-z	b c	a a
	$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100$ mm	y-y z-z	b c	a a
		$t_f > 100$ mm	y-y z-z	d d	c c
Secțiuni I-sudate 	$t_f \leq 40$ mm	y-y z-z	b c	b c	
	$t_f > 40$ mm	y-y z-z	c d	c d	
Secțiuni tubulare 	finisate la cald	oricare	a	a <sub>0</sub>	
	formate la rece	oricare	c	c	
Cheoane sudate 	în general	oricare	b	b	
	grosime pereti: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	oricare	c	c	
Secțiuni U-, T și secțiuni pline 		oricare	c	c	
Cornier 		oricare	b	b	

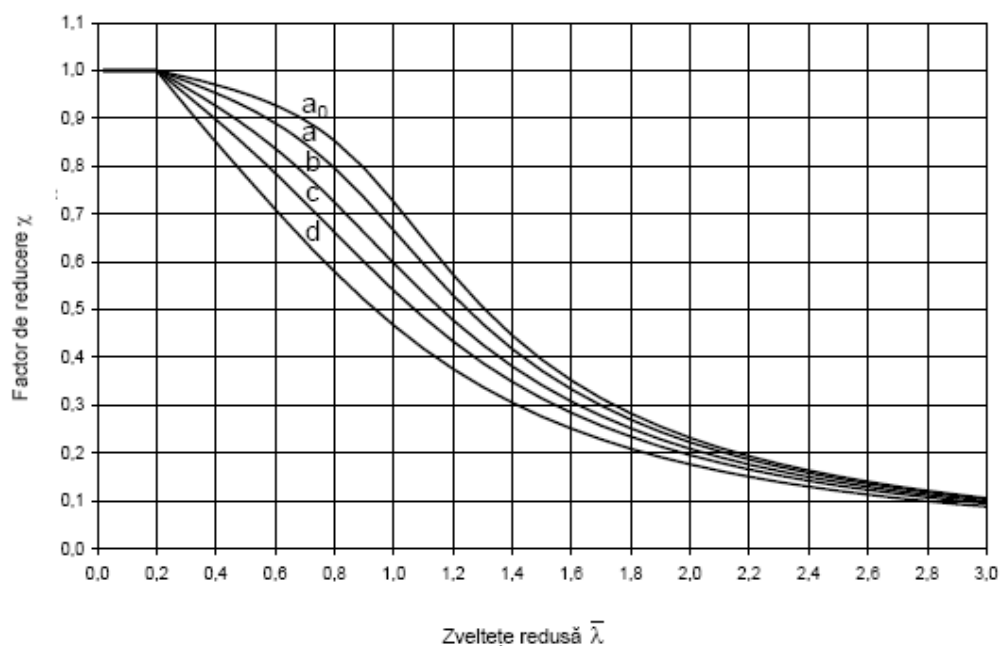


Figura 6.4 - Curbe de flambaj

### 6.3.1.3 Zveltețea pentru flambajul prin încovoiere

(1) Zveltețea redusă  $\bar{\lambda}$  este dată de următoarele expresii:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 1, 2 și 3} \quad (6.50)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{\sqrt{A_{eff}}}{\lambda_1} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 4} \quad (6.51)$$

în care  $L_{cr}$  este lungimea de flambaj în planul de flambaj considerat

$i$  este raza de girație în raport cu axa considerată determinată utilizând caracteristicile secțiunii transversale brute

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9e$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} \quad (f_y \text{ în N/mm}^2)$$

NOTA B - Pentru flambajul elastic al elementelor structurale ale clădirilor a se vedea anexa BB.

(2) Pentru flambajul prin încovoiere, curba de flambaj corespunzătoare rezultă din tabelul 6.2.

#### 6.3.1.4 Zveltețe pentru flambaj prin răsucire și prin încovoiere-răsucire

(1) În cazul barelor cu secțiune transversală deschisă, este posibil ca rezistența barei la flambaj prin răsucire sau prin încovoiere-răsucire să fie inferioară rezistenței la flambaj prin încovoiere.

(2) Zvelteța redusă  $\bar{\lambda}_T$  pentru flambajul prin răsucire sau prin încovoiere-răsucire se determină cu următoarele relații:

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 1, 2 și 3} \quad (6.52)$$

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} \quad \text{pentru secțiunile transversale Clasa 4} \quad (6.53)$$

în care  $N_{cr} = N_{cr,TF}$  dar  $N_{cr} < N_{cr,T}$

$N_{cr,TF}$  efort critic de flambaj elastic prin încovoiere - răsucire;

$N_{cr,T}$  efort critic de flambaj elastic prin răsucire.

(3) Pentru flambajul prin răsucire sau prin încovoiere-răsucire, curba de flambaj corespunzătoare poate fi determinată din tabelul 6.2 luând în considerare pe cea relativă la axa z.