

## ***Ridicări topografice speciale***

### **Generalități**

Lucrările topografice se pot împărți în general în două părți:

- a) Lucrări topografice efectuate în scopul obținerii unei hărți sau al unui plan topografic;
- b) Lucrări topografice efectuate într-un anumit scop tehnic.

Obiectul cursului se înscrie în cea de-a doua categorie. În acest context, lucrările se execută de obicei pe zone mult mai restrânse decât cele din prima categorie (când vorbim de regulă de întocmirea hărții sau planului topografic de bază la diferite scări), iar caracteristicile lucrărilor topografice sunt puternic influențate și uneori chiar impuse de scopul tehnic urmărit.

Metodele și instrumentele folosite în lucrările topografice speciale duc la o diferențiere a acestora față de lucrările clasice conducând la o nouă ramură a măsurătorilor terestre care are un obiect propriu "topografia specială" sau "geodezia aplicată".

Topografia specială se dezvoltă, strâns legată de celelalte ramuri ale măsurătorilor terestre: topografia generală, geodezia, fotogrammetria, cartografia, ea cunoscând însă o dezvoltare mai spectaculoasă atât din punct de vedere al instrumentației folosite cât și al tehnologiei de lucru, bazându-se adesea pe geniul creator al inginerului geodez.

Are legături strânse cu discipline precum: matematica, fizica, geologia, geofizica, hidrografia etc., discipline ce influențează direct măsurătorile terestre.

Diversitatea ramurilor tehnice care apelează la serviciile topografiei speciale este atât de mare încât se poate spune că nu există lucrare tehnică în care să nu se simtă necesitatea acesteia.

În topografia specială se deosebesc patru mari activități:

1. Lucrările topografice pentru întocmirea proiectelor – care sunt strâns legate de scopul tehnic urmărit;
2. Pregătirea topografică a proiectelor (proiectarea tehnico-topografică);
3. Lucrările topografice pentru trasarea pe teren a proiectelor;
4. Lucrările topografice în timpul exploatarei obiectivelor proiectate pentru urmărirea comportării în timp a acestora.

Pornind de la aceste patru mari activități lucrările topografice implică trei faze mari:

- Determinarea coordonatelor X, Y, H a unor serii de puncte topografice care servesc la întocmirea materialului grafic necesar proiectării care fac obiectul problemei topografice directe;

- Executarea obiectivelor tehnice care necesită aplicarea pe teren a proiectelor și lucrărilor de trasare în timpul execuției – fac obiectul problemei topografice inverse;
- Îmbinarea problemei topografice directe și a problemei topografice inverse face obiectul măsurării de deformații și urmărirea comportării în timp a obiectivelor realizate.

Toate aceste trei faze fac obiectul a trei cursuri distincte:

- Ridicări topografice speciale;
- Topografia inginerească;
- Măsurarea topografică a deplasărilor și deformațiilor construcțiilor.

## **1. Documentația topografică necesară proiectării**

Pentru întocmirea și aplicarea pe teren a diferitelor proiecte trebuie să fie dinainte pregătite elementele geo-topografice ce servesc ca bază de proiectare.

Planurile topografice – reprezintă documentul grafic principal necesar repartizării (în zonă) corecte a obiectivelor tehnice, calitatea acestora condiționând rezolvarea justă a problemelor de sistematizare.

Rețelele de sprijin – care formează legătura între proiectele tehnice și situația concretă în teren constituie baza topografică principală a inginerului geodez. Calitatea acestora condiționează în mod nemijlocit corespondența dintre proiect și realitatea din teren.

Conținutul și volumul elementelor topografice sunt prevăzute în standarde și norme întocmite la rândul lor în funcție de felul, de natura obiectivelor proiectate.

Baza topografică (planul topografic + rețelele de sprijin) influențează calitatea și termenele de execuție ale proiectului în absolut toate fazele sale. Reprezentarea nefidelă și incompletă a elementelor topografice din teren conduce la modificări nejustificate ale terenului, la refacerea unor lucrări și cheltuieli suplimentare. Surplusul de elemente topografice mărește în mod nejustificat volumul și conținutul lucrărilor topografice.

Baza topografică trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1. Precizia lucrărilor topografice să corespundă cerințelor impuse de diferite faze (anterior amintite) și să servească scopului urmărit;
2. Baza topografică să poată fi preluată de la o fază la alta fără efectuarea preciziei lucrărilor topografice;
3. Documentația grafică să corespundă preciziei de determinare a poziției punctelor topografice, a conturilor și a reliefului (în sensul că punctul trebuie să fie reprezentat cu precizie).

### **1.1. Documentația grafică**

Documentația grafică necesară proiectării cuprinde:

- hărți topografice (cu teritoriul în care se află zona destinată construcțiilor la scara 1:10.000÷1:100.000);
- planuri topografice la scări mari și foarte mari: 1:5.000, 1:2.000, 1:1.000, 1:500, 1:200, 1:100);

- profile longitudinale și transversale ale terenului și cursurilor de apă, planuri topografice ale râurilor și planuri hidrografice (pentru lacuri), pentru zone acoperite de apă, zone costiere, profile geologice și geofizice etc.;
- profile și scheme ale sistematizării verticale și ale rețelelor tehnico-edilitare (apă, canalizare, energie electrică, telecomunicații, gaze, termoficare).

Proiectarea în detaliu necesită planuri de situație la scări mari și foarte mari de un anumit specific. Aceste planuri se obțin prin ridicări topografice speciale efectuate pentru acest scop. Planurile la scări mai mari de 1:2.000 “se învechesc” foarte repede în următorul sens: conținutul lor nu mai corespunde cu realitatea din teren după perioade destul de scurte.

Cerințele de precizie a planurilor de situație pentru proiectare se referă adesea la poziția reciprocă a obiectivelor și conturilor apropiate (învecinate). Această cerință impune adesea crearea unei rețele proprii de ridicare care să satisfacă preciziile cerute întrucât rețeaua națională este de cele mai multe ori deficitară din acest punct de vedere.

Caracteristicile esențiale ale materialului grafic necesar proiectării sunt:

- precizia;
- fidelitatea;
- detalierea planului care influențează alegerea scării (1 : n) și echidistanța curbelor de nivel pe plan.

#### 1.1.1. Precizia reprezentării planimetrice

Această precizie numită și precizia planului de situație este dată de eroarea totală de poziție pe plan a conturilor și obiectelor față de punctele de sprijin din apropiere.

Pentru proiectare însă o importanță deosebită o are precizia poziției reciproce în plan a elementelor de planimetrie care se admite de cca  $\pm 0.3 \div \pm 0.4 \text{ mm}$  pe plan, din care motiv precizia rețelei de ridicare și alegerea metodei de ridicare au un rol hotărâtor în asigurarea preciziei reprezentării pe plan a obiectelor.

Eroarea medie totală de poziție a unui punct pe contur, pe originalul planului este dată de relația:

$$m_{pl} = \pm \sqrt{m_r^2 + m_c^2 + m_g^2} \quad (1.1)$$

unde:

$m_r$  - eroarea medie pătratică de ridicare a punctului;

$m_c$  - eroarea medie pătratică de cartografiere a punctului;

$m_g$  - eroarea medie pătratică de desenare a originalului de editare;

$m_r$  – eroarea medie pătratică de ridicare a punctului este condiționată de :

$$m_r = \pm \sqrt{m_{ps}^2 + m_{p_1}^2 + m_{p_2}^2} \quad (1.2)$$

unde:

$m_{ps}$  – eroarea medie de poziție a punctului rețelei de sprijin;

$m_{p_1}$  – eroarea medie de poziție a stației din care se face ridicarea;

$m_{p_2}$  – eroarea medie de poziție datorată metodei de ridicare.

Eroarea  $m_{ps}$  se obține, de regulă, din compensarea rețelei de sprijin, ea corespunzând practic erorii medii pătratice Helmert:

$$m_{ps} = \pm m_0 \sqrt{q_{xx}^2 + q_{yy}^2} \quad (1.3)$$

unde:

$m_0$  este varianța empirică obținută după compensare;

$q_{xx}, q_{yy}$  – elementele de pe diagonala principală a matricii Q a cofactorilor.

$m_{p_1}$  – se estimează funcție de neînchiderea obținută în drumurile din care se face ridicarea;

$m_{p_2}$  – este condiționată atât de metoda de ridicare folosită cât și de instrumentele din dotare.

În condițiile tehnicii de astăzi (existența coordonatelor rectangulare și a ploterelor) se admite pentru eroarea medie de cartografiere  $\pm 0.1 \div \pm 0.15 \text{ mm}$ . În aceste condiții metoda de ridicare trebuie să fie astfel aleasă încât să permită calcularea coordonatelor rectangulare  $x, y$  pentru toate punctele ridicate.

Eroarea medie de desenare a originalului  $m_g$  se acceptă în condițiile actuale de  $\pm 0.1 \div \pm 0.2 \text{ mm}$ .

Pornind de la valorile erorilor anterior prezentate se poate face următoarea clasificare a planurilor topografice:

- planuri de situație de precizie mare – la care eroarea medie totală de poziție a punctului  $m_{pl} = \pm 0.2 \div \pm 0.3 \text{ mm}$ . Asemenea planuri sunt necesare la proiectarea întreprinderilor industriale, în localități la construcții speciale;
- planuri de situație de precizie medie – la care  $m_{pl} = \pm 0.3 \div \pm 0.5 \text{ mm}$ , necesare în proiectarea căilor de comunicație, în terenuri neconstruite;
- planuri de situație de precizie redusă -  $m_{pl} \geq \pm 0.5 \text{ mm}$ , de regulă utilizate în proiectarea lucrărilor hidroameliorative, pentru planuri de ansamblu etc.

### 1.1.2. Precizia reprezentării pe plan a reliefului

Reprezentarea reliefului pe planuri și hărți se face prin curbe de nivel cu următoarele echidistanțe:

Scara 1:5.000	Teren accidentat zonă muntoasă 5 m	Zonă șes 1m sau 2m
1:2.000	2m	0.5÷1m
1:1.000	Alegerea echidistanței curbelor de nivel se face funcție de necesitățile de proiectare	

Relația generală ce pune în evidență toți factorii care influențează eroarea medie pătratică de reprezentare pe plan a reliefului ( $m_H$ ) este:

$$m_H = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_g^2 + m_3^2 + m_4^2} \quad (1.4)$$

unde:

$m_1$  – eroarea medie a cotei reperilor de nivelment (baza de ridicare), se acceptă de regulă  $m_1 = \pm 5mm$ ;

$m_2$  – eroarea medie de măsurare pe teren a diferenței de nivel între reperii de nivelment și punctul de ridicat; pentru nivelmentul geometric se acceptă  $m_2 = \pm 4mm$ ;

$m_g$  – eroarea medie de generalizare a reliefului;

$m_3$  – eroarea medie de raportare pe plan a punctului cotat care se determină cu relația:

$$m_3 = \pm m_{pl} \operatorname{tg} \alpha \quad (1.5)$$

unde:

$m_{pl}$  – eroarea medie de poziție în plan a punctului cotat;

$\alpha$  – unghiul mediu de înclinare în zona respectivă;

$$m_4 = \pm m_c \operatorname{tg} \alpha \quad (1.6)$$

unde:

$m_c$  – eroarea medie de apreciere la interpolare și de desenare a curbei de nivel;

$\alpha$  – unghiul mediu de înclinare a terenului.

### Fidelitatea și detalierea planului

Fidelitatea – gradul de asemănare a reprezentării grafice cu realitatea corespondentă în teren.

Cu cât scara planului de reprezentare este mai mare cu atât crește fidelitatea reprezentării și devin mai mici generalitățile din teren. În cazul ridicărilor la scări mari, se acceptă ca erorile datorate acestor generalizări contururilor plane să nu depășească  $\pm 5\text{ mm}$  la scara planului.

Detalierea planului – gradul de saturație a planului cu obiecte existente în teren, a căror reprezentare este necesară și posibilă la scara și echidistanța planului (date).

Detalierea se poate exprima prin dimensiunile minime ale obiectelor sau a distanțelor dintre aceste obiecte ce urmează a fi reprezentate pe plan. Cerințele de detaliere sunt impuse de scara de reprezentare aleasă. În multe situații însă, proiectantul impune gradul de detaliere lăsând la latitudinea inginerului geodez alegerea scării optime. Această problemă se rezolvă prin relația scării numerice:

$$\frac{1}{n} = \frac{d}{D} \left( \frac{\text{plan}}{\text{teren}} \right) = \text{raport numeric constant.}$$

### Alegerea scării planului pentru proiectare

Factorii care influențează mărimea scării planului necesar proiectării sunt:

- natura problemelor ce urmează a se rezolva și felul construcției ce se proiectează (în acest sens, planul de situație poate servi la elaborarea planului general al zonei sau pentru întocmirea planurilor de execuție. Totodată, planul de situație constituie baza topografică pentru ridicare);
- complexitatea situației și a reliefului terenului, care influențează fidelitatea planului;
- condițiile utilizării în proiectare a construcțiilor și traseelor existente.

Exemple:

- planul la scara 1:10 000 și echidistanța  $E = 1$  până la  $2\text{ m}$  (pentru teren șes),  $E = 5\text{ m}$  (în teren accidentat), se folosește pentru alegerea traseelor magistrale (de drumuri, de căi ferate, canale de irigație, linii electrice magistrale), a amplasamentelor combinatelor industriale, la noduri hidrotehnice și hidroenergetice, etc.
- planul la scara 1:5000 cu  $E = 1\text{ m}$  (teren șes) sau  $E = 2\text{ m}$  (teren accidentat), constituie baza topografică pentru sistematizarea localităților, la echiparea tehnică a teritoriilor (îmbunătățiri funciare) etc.
- planul la scara 1:2000 cu  $E = 0.5 \div 1\text{ m}$  (teren șes și teren accidentat) servește pentru elaborarea proiectelor și planurilor generale ale construcțiilor hidrotehnice și industriale, a rețelelor edilitare sau la elaborarea detaliilor de sistematizare din localități;

- planul la scara 1:1000 cu  $E = 0.5 \div 1m$  (teren șes și accidentat) constituie baza pentru elaborarea detaliilor de execuție în extravilan sau în cazul suprafețelor cu grad de acoperire redus, la proiecte de execuție a rețelelor edilitare, la planuri de detaliu, trasee de drumuri și căi ferate, noduri feroviare etc.;

- planul la scara 1:500 (scara cea mai mare pentru o ridicare pe suprafețe întinse)  $E = 0.25m$  (teren șes),  $E = 0.50m$  (teren accidentat) – se utilizează la întocmirea planurilor în localități cu densitate mare de construcție, cu rețele edilitare dense atât la suprafață cât și în subteran.

- scara de ridicare 1:500 este scara de trasare în detaliu și de execuție în același timp la incinte industriale, poduri, baraje, etc. Alegerea scării planului trebuie strâns corelată cu cerințele proiectării, respectiv ale scopului pentru care se face ridicarea.

- de la proiectant se obține, de regulă, dimensiunea minimă care trebuie să fie reprezentată pe plan. Funcție de precizia grafică ( $m_g$ ) și de cerințele proiectării, ( $m_t$ ) = dimensiunea minimă din teren ce trebuie raportată pe plan, se poate calcula cu relația:

$$\frac{1}{n} = \frac{m_g}{m_t} \quad (1)$$

Ca exemplu:

$$m_g \leq 0.5mm \text{ și impunând } m_t = 0.5m \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{1000}; m_t = 1m \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{2000}$$

### **Rețele de sprijin pentru ridicări la scări mari**

#### Generalități

Un sistem de referință topo-geodezic, ia naștere, de regulă, prin determinarea sau stabilirea unui corp de referință, suprafață de referință, drepte de referință (linie), punct de referință sau, în general, a unei valori inițiale de referință bine fundamentată din punct de vedere matematic sau fizic. Descrierea matematică sau fizică a sistemului de referință și materializarea lui în teren conduce la rețeaua de sprijin. Când efectuăm măsurători asupra unui obiect din teren, creăm, de fapt, legături matematice sau fizice între acestea și rețeaua de sprijin, punctul acesta fiind definit ca poziție altimetrică sau gravimetrică în raport cu această rețea. În practica curentă, ne confruntăm, de regulă, în esență, cu determinarea poziției spațiale a obiectelor din teren. Datorită acestor limite, în precizia de determinare a punctelor a fost necesară o separare a sistemelor de referință planimetrice, altimetrice și gravimetrice. Dacă pentru determinarea altitudinilor relația fizică este primordială (suprafața de nivel zero – apa să nu curgă între 2 curbe de aceeași cotă), pentru determinarea poziției planimetrice relația la o suprafață matematică bine determinată este de importanță majoră. Pentru a păstra nivelul de precizie a informațiilor cuprinse în măsurători, în locul unui sistem tridimensional s-a optat pentru un sistem planimetric bidimensional și un sistem de altitudini unidimensional. Această separare nu a fost prea fericită mai ales în rețelele locale, unde sistemul de referință este de regulă local, unele date definitorii fiind alese arbitrar. Rețelele de sprijin pentru ridicări specifice de topografie inginerească depind de

mărimea suprafeței de ridicat, de existența și densitatea detaliilor ce interesează, de scara și precizia planului topografic, ca produs final al ridicării.

Din experiența practică, precum și din literatura de specialitate, principalele tipuri de rețele folosite ca bază topografică pentru ridicări la scări mari sunt:

a) Pe suprafețe mai mari de  $25\text{km}^2$  :

- *triangulatia*
  - *trilateratia*
  - *poligonometrie de precizie*
  - *drumuii poligonometrice*
  - *drumuii de teodolit ca baza de ridicare*
- } rețea de sprijin planimetrică
- *rețeaua de nivelm. geom. de ord. II, III, IV constituita sub forma de poligoane*
  - *drumuii de nivelm. geom. și trigonometric ca baza de ridicare*
- } rețea de sprijin altimetrică

b) Pentru suprafețe medii între  $25\text{km}^2$  și  $2.5\text{km}^2$  :

- rețeaua poligonometrică
  - drumuii de teodolit
- } rețea de sprijin planimetrică
- poligonație de nivelment geometric
  - drumuire de nivelm. geom. și trigon
- } rețea de sprijin altimetrică

c) Pe suprafețe mici până la  $2.5\text{km}^2$

- se folosește numai baza de ridicare sub formă de drumuii planimetrice și nivelitice.

### **Rețele poligonometrice**

Pe suprafețe relativ mici sau pentru teritoriile localităților mici, se poate renunța la triangulație ca rețea de sprijin, poligonometria oferind posibilitatea realizării unei rețele de sprijin compacte sub formă de poligoane închise. Aceste rețele constituie baza topografică de sprijin pentru ridicări la scări mari și, de asemenea, pentru proiectarea, trasarea și urmărirea unor lucrări de investiții de mare întindere (platforme industriale, sistematizarea cvartalelor în localități, reperaj fotogrammetric etc.). Tahimetrele electrooptice și stațiile totale care asigură o precizie ridicată în măsurarea distanțelor și a unghiurilor au făcut să crească randamentul lucrărilor de teren, poligonometria devenind astfel o metodă de realizare a rețelelor de sprijin preferată de specialiști în multe aplicații.

Drumuirea poligonometrică – în sens general, reprezintă o drumuire de precizie în care laturile (de ordinul sutelor de metri) și unghiurile sunt măsurate cu o precizie mai mare decât la o drumuire obișnuită, corespunzător scopului urmărit. La capete, o drumuire poligonometrică se sprijină, ca și drumuirea obișnuită, pe puncte și laturi din rețeaua de ordin superior.



Rețelele poligonometrice reprezintă o conexiune de drumuri care au unul sau mai multe puncte comune numite puncte nodale care aparțin la două sau mai multe trasee de drumuri poligonometrice. În foarte multe situații, o asemenea rețea poate să substituie cu succes rețeaua de trilateratie sau triangulație.

Condițiile generale pe care trebuie să la îndeplinească drumurile poligonometrice:

a) Laturile drumurii trebuie să fie cât mai mari pentru a elimina pe cât posibil propagarea erorilor datorită centrării instrumentelor, măsurării unghiurilor etc. Lungimile laturilor se aleg în anumite limite funcție de ordinul drumurii;

b) Laturile și unghiurile trebuie măsurate cu o precizie mărită pentru a justifica substituția rețelelor de triangulație sau trilateratie;

c) Lungimea totală a unei drumuri poligonometrice să se încadreze în limitele date în tabelul următor:

Ord. drum. polig.	Er.m.p de măs. a ungh.	Er.rel. lim.de închid. liniară	Lungimea maximă (km)				Lungimea unei laturi		
			Intrav. 1:500	Extravilan			Med (m)	Min. (m)	Max (m)
				1:1000	1:2000	1:5000			
Prec.sup	$\pm 10^{cc}$	1/25000	5	7	10	15	400	250	1000
Ord.I	$\pm 15^{cc}$	1/15000	3	4	6	10	250	100	600
Ord.II	$\pm 25^{cc}$	1/8000	2	2,5	4	6	175	80	400
Ord.III	$\pm 30^{cc}$	1/5000	1	1,5	2,5	4	150	70	300

Drumuirea poligonometrică de precizie superioară înlocuiește uneori rețeaua de triangulație de ordinul III, IV și V în special în localități când există dificultăți în ce privește realizarea acesteia.

Drumuirea poligonometrică de ordinul I – se sprijină pe puncte din rețeaua de triangulație și/sau pe puncte din drumuirea poligonometrică de precizie superioară. Traseul acestei drumuri este de regulă întins și se desfășoară în lungul arterelor mari de circulație, pe văi, căi de comunicație, etc. Ordinele II și III au scopul de îndesire a rețelei poligonometrice de ordinul I și superior.

## Proiectarea rețelelor poligonometrice

- se execută de regulă pe planuri la scara 1:10 000 (sau mai mari) cu curbe de nivel care conțin toate informațiile referitoare la rețeaua de triangulație și de nivelment în zonă. Drumuirile de precizie superioară și de ordinul I sunt stabilite încă din faza recunoașterii punctelor de triangulație ce vor servi ca sprijin pentru rețeaua poligonometrică. Între punctele drumuirilor de ordinul I și ordin superior se proiectează puncte ale drumuirilor de ordinul II, iar apoi, analog, puncte din drumuirea de ordinul III.

Punctele drumuirilor poligonometrice se amplasează în teren stabil urmărind a asigura între ele cele mai bune condiții de vizibilitate.

$A, A', B, B', C, C', D, D'$  - puncte de triangulație

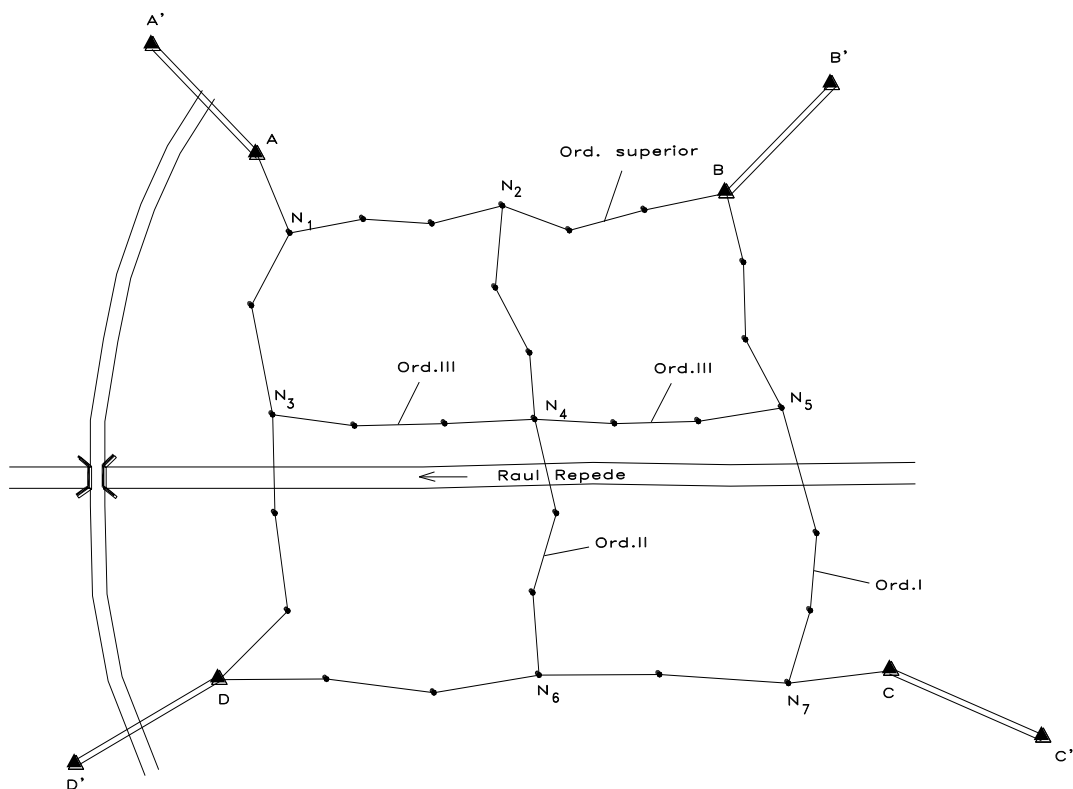
$N_i$  - puncte nodale (comune la două sau mai multe trasee de drumuire poligonometrică)

$BN_7$  - Ordinul I

$N_2N_6$  - Ordinul II

$N_3N_4, N_4N_5$  - Ordinul III

$AB$  - ordin superior



## Compensarea rețelelor poligonometrice neconstrânse

Tehnica de execuție și prelucrare a drumurilor cunoscute la cursurile de topografie generală este bazată pe principiul ierarhic, fiecare traseu de drumuire sprijinindu-se pe cel puțin un punct și o latură cunoscută din rețeaua de sprijin de ordin superior. Drumuirile se compensau individual (drumuirea închisă pe punctul de plecare, sprijinită pe puncte cunoscute) sau cel mult ca rețele cu punct nodal. Acest sistem de abordare era justificat întrucât drumuirile studiate formau rețeaua de ridicare și nu o rețea de sprijin de suprafață care să poată suplini o rețea de triangulație sau de trilateratie. Dacă, totuși, se interconectează mai multe trasee poligonale care se constituie în poligoane, modul de compensare cunoscut devine inefficient și prezintă următoarele deficiențe:

- pe trasee comune ale rețelei poligonale sprijinite însă pe puncte cunoscute diferite, se obțin pentru aceleași puncte coordonate diferite;
- compensarea nu este unitară și deci, nu se poate obține o omogenizare a preciziei în rețea;
- criteriile de repartizare a corecțiilor nu aveau o justificare teoretică fundamentală.

Noul sistem de compensare a rețelelor de drumuri prin metoda poligoanelor prezintă următoarele avantaje:

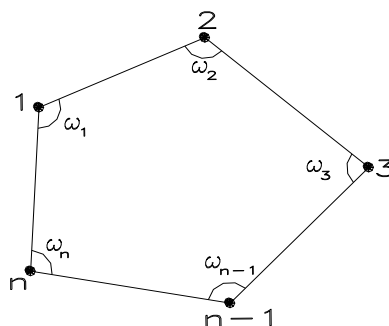
- se introduce un sistem de compensare unitar bazat pe principiul repartiției erorilor pe unitatea ponderată;
- se reușește să se dea compensării o soluție unică de ansamblu chiar și pe trasee comune;
- conduce la o omogenizare a preciziei în întreaga rețea de poligonometrie;
- stabilirea ecuațiilor și formarea sistemului pentru compensare este simplă, sistemul putând fi scris de cele mai multe ori direct de pe figura rețelei.

Aceste justificări conduc la motivația pentru care chiar traseele clasice de drumuri să fie interconectate în rețelele poligonometrice și să fie prelucrate după această metodă.

Existența mijloacelor de calcul moderne care permit rezolvarea rapidă a sistemelor de ecuații ar trebui să înlocuiască eventualele rețineri care mai există în aplicarea metodei rețelelor poligonometrice neconstrânse.

## Prelucrarea observațiilor în poligoane izolate

- compensarea unghiurilor



Cazul general: - considerăm un poligon cu  $n$  vârfuri în care s-au efectuat măsurători unghiulare.

Condiția geometrică:

$$\sum \omega_i = 200^G (n - 2) \quad (1)$$

Însumând unghiurile  $\omega_i$  măsurate, datorită erorilor de măsurare vom obține o neînchidere  $v$  în poligon care trebuie să fie mai mică sau egală decât o toleranță:

$$v \leq T = 2 \div 3 n_0 \sqrt{n} \quad (2)$$

unde:

$n_0$  – eroare medie pătratică de măsurare a unui unghi;

$n$  – numărul de vârfuri (stații).

Pornind de la considerentul că unghiurile au fost măsurate cu aceeași precizie vom putea determina corecțiile cu relația:

$$c_{\omega} = \left( -\frac{v}{n} \right) \quad (3)$$

rezultând ecuația de condiție pentru poligonul dat:

$$c_{\omega_1} + c_{\omega_2} + \dots + c_{\omega_n} + v = 0 \quad (4)$$

Admițând aceeași precizie în măsurarea unghiurilor (am atribui aceeași corecție) rezultă:

$$nk + v = 0 \quad (5)$$

$$k = -\frac{v}{n} \quad (6)$$

unde:

$k$  – corecția unitară ce se aplică fiecărui unghi măsurat.

Pentru o drumuire poligonometrică întinsă sprijinită la capete pe orientări cunoscute, particularitatea constă numai în modul de determinare a neînchiderilor  $v$ .

$$v = \theta_i + n \cdot 200^G - \sum \omega_i - \theta_f \quad (7)$$

unde:

$\theta_i$  – orientarea laturii inițiale;

$\theta_f$  – orientarea laturii finale.

Cu unghiurile compensate se calculează orientările laturilor poligonului pentru prelucrări ulterioare.

- Compensarea creșterilor de coordonate ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta H$ ) într-un poligon izolat

Relațiile generale pentru calculul creșterilor de coordonate sunt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= D \cos \theta \\ \Delta Y &= D \sin \theta \\ \Delta H &= D \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Creșterile pe înălțime se pot calcula cu această relație

$$\Delta H = D \operatorname{tg} \alpha \quad (9)$$

sau pot fi măsurate direct în teren prin nivelment geometric.

Neînchiderile în poligon se vor obține cu relațiile:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \sum \Delta X_i \\ v_y &= \sum \Delta Y_i \\ v_h &= \sum \Delta H_i \end{aligned} \right\} - \text{determinate pe contur} \quad (10)$$

Neînchiderile vor fi repartizate pe laturi direct proporțional cu ponderile stabilite în acest caz cu relația:

$$p_i = \frac{1}{D_i} \quad (11)$$

Relația generală (5) devine:

$$\left[ \frac{1}{P} \right] k + v = 0 \quad (12)$$

Rezultă:

$$k = - \frac{v}{\left[ \frac{1}{P} \right]} \quad (13)$$

iar corecția pe unitatea ponderată:

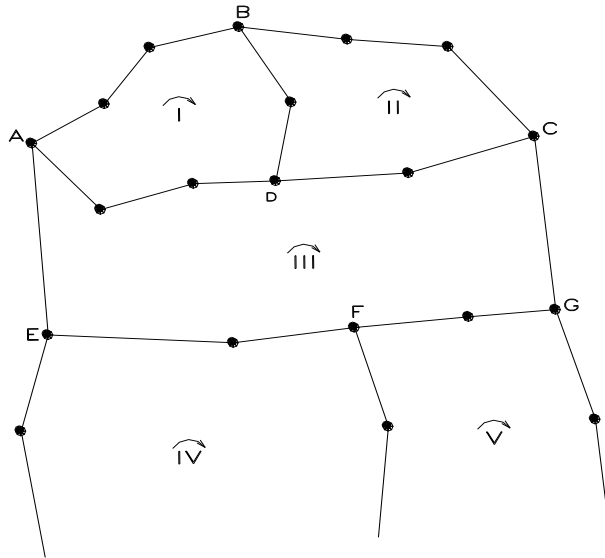
$$C_{\Delta X, \Delta Y, \Delta H} = - \frac{v}{\left[ \frac{1}{P} \right]} \cdot \frac{1}{p_i} \quad (14)$$

La o privire mai atentă, aceste relații împreună cu relația (12) conduc la aceleași valori pentru corecții ca și în cazul compensării clasice a unei drumuri închise pe punctul de plecare.

- Compensarea unghiurilor (direcțiilor) într-o rețea poligonometrică neconstrânsă (nu avem puncte de coordonate cunoscute)
  - fiecare unghi se obține ca diferență de două direcții măsurate
  - numărul direcțiilor măsurate pe conturul unui poligon va fi egal cu  $2n$  ( $n$  – numărul laturilor poligonului)
  - direcțiile se consideră măsurate cu aceeași precizie sub considerentele:

$$\left\{ \begin{aligned} & - \text{acelasi instrument} \\ & - \text{acelasi operator} \\ & - \text{aceeasi metoda de masurare} \\ & - \text{aceleasi conditii exterioare} \end{aligned} \right.$$

Considerăm rețeaua poligonometrică din figura alăturată:



- I, II...- numerotarea poligoanelor;
- A, B...- puncte nodale;
- segmentele între noduri sunt denumite secțiuni;
- neînchiderile în poligoane le vom numi corespunzător numerotării cu  $v_1, v_2$ ;
- numărul direcțiilor de pe o secțiune îl vom nota cu  $n$  și cu indice ce indică poligonul căruia îi aparține;

Exemplu:

$n_1$  – numărul direcțiilor pe secțiunea  $AB$  ;

$n_2$  – numărul direcțiilor pe secțiunea  $BC$  .

- secțiunile comune a două poligoane vor primi doi indici care indică între ce poligoane se află secțiunea respectivă;

Exemplu:

$n_{12}$  – numărul direcțiilor pe secțiunea  $BD$  ;

$n_{13}$  – numărul direcțiilor pe secțiunea  $DA$  ;

$n_{31}$  – numărul direcțiilor pe secțiunea  $AD$  .

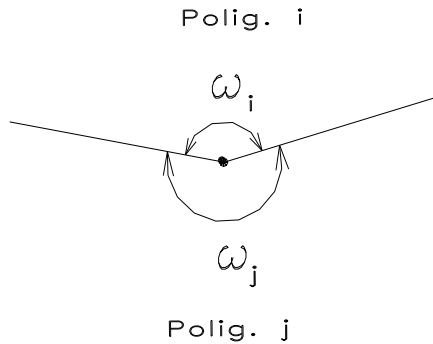
În majoritatea cazurilor, unghiurile sunt măsurate în teren prin metoda seriilor.

După prelucrarea observațiilor în stație și compensarea seriilor, este îndeplinită condiția ca suma unghiurilor din jurul unui punct să fie  $400^G$ . Această condiție nu trebuie să fie alterată prin compensarea noastră în special pe secțiunile dintre poligoane.

Dacă am compensa independent fiecare poligon, am avea conform relației (5) următoarea situație:

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_{12} + n_{13})k_1 + v_1 &= 0 - \text{pentru poligonul I} \\ (n_2 + n_{21} + n_{23})k_2 + v_2 &= 0 - \text{pentru poligonul II} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

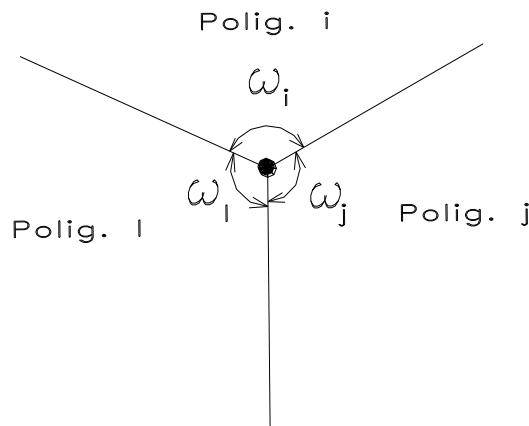
Condiția de legătură între poligoane schimbă însă situația. Corecțiile care se aplică unghiurilor măsurate în același punct dar care aparțin și poligoanelor vecine trebuie să se anuleze prin însumare. Pentru  $k_i$  reprezentând corecțiile unitare pentru fiecare direcție în poligonul "i" avem următoarele condiții:



$$C_{\omega_i} + C_{\omega_j} = 0 \quad (16)$$

sau

$$\begin{cases} C_{\omega_i} = 2k_i - 2k_j \\ C_{\omega_j} = 2k_j - 2k_i \end{cases} \quad (17)$$



$$C_{\omega_i} + C_{\omega_j} + C_{\omega_l} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{cases} C_{\omega_i} = 2k_i - k_j - k_l \\ C_{\omega_j} = 2k_j - k_i - k_l \\ C_{\omega_l} = 2k_l - k_i - k_j \end{cases} \quad (19)$$

Cu aceste referiri rezultă deci, că în ecuațiile de condiții care se formează pentru eliminarea neînchiderilor  $v_i$  din fiecare poligon trebuie să se țină cont și de influența condiției de repartizare a corecțiilor din poligoanele vecine.

Astfel vom putea scrie câte o ecuație pentru fiecare poligon din rețeaua de mai sus sub forma:

$$\left. \begin{aligned} (n_1 + n_{12} + n_{13})k_1 - n_{12}k_2 - n_{13}k_3 + v_1 &= 0 - \text{ec. pt. polig. I} \\ (n_2 + n_{21} + n_{23})k_2 - n_{21}k_1 - n_{23}k_3 + v_2 &= 0 - \text{ec. pt. polig. II} \\ (n_3 + n_{31} + n_{32} + n_{34} + n_{35})k_3 - n_{31}k_1 - n_{32}k_2 - n_{34}k_4 - n_{35}k_5 + v_3 &= 0 \text{ ec. pt. polig. III} \end{aligned} \right\} (20)$$

**Notă:** Sumele din paranteze constituie numărul total de direcții pe conturul unui poligon și se notează cu  $N_i$ .

$$\left. \begin{aligned} -n_{12} &= n_{21} \\ -n_{13} &= n_{31} \end{aligned} \right\} \text{ - nr. direcțiilor comune între două poligoane este același pentru fiecare poligon etc.}$$

considerat.

Vom putea scrie deci, forma generală a sistemului de ecuații:

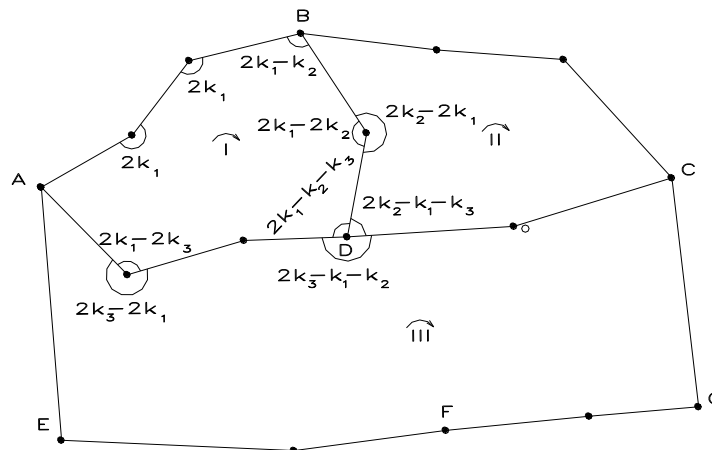
$$\left. \begin{aligned} N_1k_1 - n_{12}k_2 - n_{13}k_3 + v_1 &= 0 \\ -n_{21}k_1 + N_2k_2 - n_{23}k_3 + v_2 &= 0 \\ -n_{31}k_1 - n_{32}k_2 + N_3k_3 - n_{34}k_4 - n_{35}k_5 + v_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (21)$$

Se remarcă de la prima vedere faptul că, sistemul este normal și poate fi rezolvat printr-o metodă cunoscută din algebră sau prin schema Gauss.

Ecuațiile pot fi scrise de regulă direct de pe figură cu condiția ca schița rețelei să fie corectă.

După rezolvarea sistemului (21) vor rezulta corecțiile  $k_i$  pentru o direcție corespunzătoare poligonului  $i$ .

Exemplu de repartizare a corecțiilor:



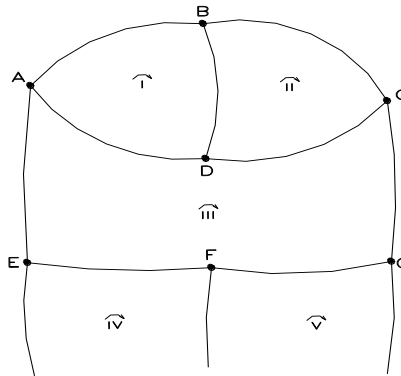
- corecțiile pentru un unghi se stabilesc ca fiind egale cu: de două ori corecția pentru direcțiile din poligonul considerat din care se scad corecțiile pentru aceleași direcții din poligoanele învecinate;

- se remarcă condiția inițială, suma unghiurilor în jurul unui punct rămâne nealterată;

- verificarea finală: suma corecțiilor unghiurilor pe conturul unui poligon trebuie să anuleze neînchiderea  $v_i$  din poligonul respectiv.



Compensarea creșterilor de coordonate ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ) și a diferențelor de nivel  $\Delta H$ , într-o rețea poligonometrică neconstrânsă



- I, II, III...- poligoane închise;
- A, B, C... - puncte nodale;
- se alege un sens comun de parcurgere în toate poligoanele (cel indicat de săgeți);
- neînchiderile din fiecare poligon le vom exprima sub forma:

$$\left. \begin{array}{l} pt. \Delta X \Rightarrow v_1^x, v_2^x \dots \\ pt. \Delta Y \Rightarrow v_1^y, v_2^y \dots \\ pt. \Delta H \Rightarrow v_1^H, v_2^H \dots \end{array} \right\} \quad (1)$$

- lungimile secțiunilor le vom exprima în  $m$ ,  $hm$  sau  $km$  așa încât să se poată forma ponderile  $p_i = \frac{1}{D_i}$ ;

- ponderile se vor stabili așa încât să fie apropiate de unitate, ceea ce asigură un sistem normal bine condiționat;

- lungimile secțiunilor le vom nota cu  $n$  și cu indice care indică numărul poligonului;

Exemplu:  $n_1$  – lungimea secțiunii AB;

$n_2$  – lungimea secțiunii BC...etc.

- secțiunile comune a două poligoane vor primi doi indici care specifică între ce poligoane se află secțiunea:

Exemplu:  $n_{12}$  – pentru secțiunea BD;

$n_{13}$  – pentru secțiunea DA.

- corespunzător se vor nota și creșterile de coordonate, respectiv diferențele de nivel pe fiecare secțiune:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta H_1 &\Rightarrow \text{pe secțiunea } AB \\ \Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta H_2 &\Rightarrow \text{pe secțiunea } BC \\ \Delta X_{12}, \Delta Y_{12}, \Delta H_{12} &\Rightarrow \text{pe secțiunea } BD \\ \Delta X_{13}, \Delta Y_{13}, \Delta H_{13} &\Rightarrow \text{pe secțiunea } DA \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

- întrucât creșterile de coordonate  $\Delta X, \Delta Y$  și diferențele de nivel măsurate  $\Delta H$ , pe secțiunile comune între poligoane respectă condițiile:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{12} = -\Delta X_{21}; \Delta Y_{12} = -\Delta Y_{21}; \Delta H_{12} = -\Delta H_{21} \\ \Delta X_{13} = -\Delta X_{31}; \Delta Y_{13} = -\Delta Y_{31}; \Delta H_{13} = -\Delta H_{31} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

rezultă că trebuie ca și corecțiile ce se atribuie secțiunilor comune să respecte condițiile (3) în sensul:

$$\left. \begin{aligned} x_{12} = -x_{21}; y_{12} = -y_{21}; h_{12} = -h_{21} \\ x_{13} = -x_{31}; y_{13} = -y_{31}; h_{13} = -h_{31} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

deci, pe secțiunile comune între poligoane, corecțiile trebuie să fie egale și de semn contrar în cele două poligoane învecinate.

Compensarea independentă a fiecărui poligon ar conduce la următoarele relații:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{1}{p_1} \right] \cdot k_1 + v_1 = 0 \Rightarrow (n_1 + n_{12} + n_{13}) \cdot k_1^{X,Y,H} + v_1^{X,Y,H} = 0 \\ \left[ \frac{1}{p_2} \right] \cdot k_2 + v_2 = 0 \Rightarrow (n_2 + n_{21} + n_{23}) \cdot k_2^{X,Y,H} + v_2^{X,Y,H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ținând însă cont de influența poligoanelor vecine vom putea scrie ecuații de forma:

$$\left\{ \begin{aligned} (n_1 + n_{12} + n_{13}) \cdot k_1^{X,Y,H} - n_{12} k_2^{X,Y,H} - n_{13} k_3^{X,Y,H} + v_1^{X,Y,H} &= 0 \\ (n_2 + n_{21} + n_{23}) \cdot k_2^{X,Y,H} - n_{21} k_1^{X,Y,H} - n_{23} k_3^{X,Y,H} + v_2^{X,Y,H} &= 0 \\ (n_3 + n_{31} + n_{32} + n_{34} + n_{35}) \cdot k_3^{X,Y,H} - n_{31} k_1^{X,Y,H} - n_{32} k_2^{X,Y,H} - n_{34} k_4^{X,Y,H} - n_{35} k_5^{X,Y,H} + v_3^{X,Y,H} &= 0 \\ \text{-----} & \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Se remarcă faptul că în parantezele din fața corecțiilor corespunzătoare fiecărui poligon avem chiar perimetrele poligoanelor pe care le vom nota cu  $N_i$  ( $i$  – numărul. poligonului).

Sistemul (6) se poate scrie sub forma:

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 k_1^{X,Y,H} - n_{12} k_2^{X,Y,H} - n_{13} k_3^{X,Y,H} + v_1^{X,Y,H} &= 0 \\ -n_{12} k_1^{X,Y,H} + N_2 k_2^{X,Y,H} - n_{23} k_3^{X,Y,H} + v_2^{X,Y,H} &= 0 \\ -n_{13} k_1^{X,Y,H} - n_{23} k_2^{X,Y,H} + N_3 k_3^{X,Y,H} - n_{34} k_4^{X,Y,H} - n_{35} k_5^{X,Y,H} + v_3^{X,Y,H} &= 0 \\ \text{-----} & \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Prin rezolvarea sistemului normal (7) vor rezulta corecțiile  $k_1^X, k_1^Y, k_1^H, k_2^X, k_2^Y, k_2^H, \dots$

Repartizarea corecțiilor pe secțiuni:

- Pentru secțiunile necomune:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= n_1 k_1^X; y_1 = n_1 k_1^Y; h_1 = n_1 k_1^H \\ x_2 &= n_2 k_2^X; y_2 = n_2 k_2^Y; h_2 = n_2 k_2^H \\ s.a.m.d. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

- Pentru secțiunile comune poligoanelor:

- pentru secțiunea  $BD$  din poligonul I vom avea corecția totală pe unitatea de lungime:

$$(k_1^{X,Y,H} - k_2^{X,Y,H})$$

- pentru aceeași secțiune din poligonul II ( $DB$ ) vom avea:

$$(k_2^{X,Y,H} - k_1^{X,Y,H})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{polig. I}(BD): x_{12} &= n_{12}(k_1^X - k_2^X); y_{12} = n_{12}(k_1^Y - k_2^Y); h_{12} = n_{12}(k_1^H - k_2^H) \\ \text{polig. II}(DB): x_{21} &= n_{12}(k_2^X - k_1^X); y_{21} = n_{12}(k_2^Y - k_1^Y); h_{21} = n_{12}(k_2^H - k_1^H) \\ \text{polig. I}(DA): x_{13} &= n_{13}(k_1^X - k_3^X); y_{13} = n_{13}(k_1^Y - k_3^Y); h_{13} = n_{13}(k_1^H - k_3^H) \\ \text{polig. III}(AD): x_{31} &= n_{13}(k_3^X - k_1^X); y_{31} = n_{13}(k_3^Y - k_1^Y); h_{31} = n_{13}(k_3^H - k_1^H) \\ \text{-----} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Prin acest mod de repartizare se constată că valoarea corecțiilor pe secțiunile comune a două poligoane învecinate este egală și de semn contrar în cele două poligoane.

Controlul final:

Suma corecțiilor pe conturul unui poligon trebuie să anuleze neînchiderea  $v_i^{(X,Y,H)}$  din poligonul respectiv.

- Rezolvarea sistemului de ecuații normale prin metoda aproximațiilor succesive

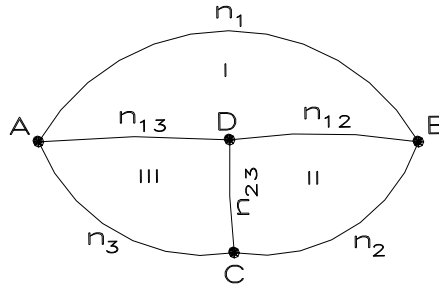
Din cele arătate până acum s-a remarcat că într-o rețea de poligoane neconstrânsă, sistemul ecuațiilor normale se poate scrie direct de pe schița rețelei, fiecărui poligon închis atribuindu-se câte o ecuație. Din forma generală a ecuației fiecărui poligon se remarcă existența unor valori absolut mai mari care apar la necunoscutele poligoanelor respective:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \text{ apare la } k_1 \\ N_2 \text{ apare la } k_2 \\ N_3 \text{ apare la } k_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{aligned} \right\} \quad (10),$$

coeficienții celorlalte necunoscute fiind cu mult mai mici. De fapt, coeficienții  $N_i$  reprezentau numărul total de direcții pe conturul unui poligon sau perimetrul poligonului, ceilalți coeficienți  $n_{ij}$  fiind fracțiuni ale acestuia.

Pornind de la acest considerent  $N_i \gg n_{ij}$  acest gen de sistem se pretează pentru a fi rezolvat prin metoda aproximațiilor succesive.

Pentru concretizare considerăm rețeaua din figura de mai jos:



$N_i$  - perimetrul poligonului;

$n_i$  - secțiunile aparținând poligonului I;

$n_{ij}$  - secțiunile comune poligoanelor i și j;

$v_i$  - neînchiderile în poligoane;

$k_i$  - corecții pe unitatea ponderată pentru fiecare poligon.

Sistemul normal se poate scrie direct de pe figură:

$$\begin{cases} N_1 k_1 - n_{12} k_2 - n_{13} k_3 + v_1 = 0 \\ -n_{21} k_1 + N_2 k_2 - n_{23} k_3 + v_2 = 0 \\ -n_{31} k_1 - n_{32} k_2 + N_3 k_3 + v_3 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Prin rezolvarea sistemului (11) se obțin necunoscutele  $k_i$  care reprezintă funcții liniare ale termenilor liberi  $v_i$ . Corecțiile  $k_i$  vor fi cu atât mai mari cu cât termenii liberi  $v_i$  sunt mai mari.

Dacă într-o primă fază neglijăm termenii cu coeficienții  $n_{ij}$ , va rezulta:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{v_1}{N_1} + k'_1 \\ k_2 &= -\frac{v_2}{N_2} + k'_2 \\ k_3 &= -\frac{v_3}{N_3} + k'_3 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$k'_i$  - trebuie interpretate ca niște corecții reziduale încă necunoscute.

Prin înlocuirea relației (12) în sistemul (11) rezultă:

$$\begin{cases} N_1 \left( -\frac{v_1}{N_1} + k'_1 \right) - n_{12} \left( -\frac{v_2}{N_2} + k'_2 \right) - n_{13} \left( -\frac{v_3}{N_3} + k'_3 \right) + v_1 = 0 \\ -n_{21} \left( -\frac{v_1}{N_1} + k'_1 \right) + N_2 \left( -\frac{v_2}{N_2} + k'_2 \right) - n_{23} \left( -\frac{v_3}{N_3} + k'_3 \right) + v_2 = 0 \\ -n_{31} \left( -\frac{v_1}{N_1} + k'_1 \right) - n_{32} \left( -\frac{v_2}{N_2} + k'_2 \right) + N_3 \left( -\frac{v_3}{N_3} + k'_3 \right) + v_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Făcând înmulțirile și separarea noilor corecții rezultă:

$$\begin{cases} N_1 k_1' - n_{12} k_2' - n_{13} k_3' + \left( \frac{n_{12}}{N_2} v_2 + \frac{n_{13}}{N_3} v_3 \right) = 0 \\ -n_{21} k_1' + N_2 k_2' - n_{23} k_3' + \left( \frac{n_{21}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_3} v_3 \right) = 0 \\ -n_{31} k_1' - n_{32} k_2' + N_3 k_3' + \left( \frac{n_{31}}{N_1} v_1 + \frac{n_{32}}{N_2} v_2 \right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Notând cu  $v_i'$  noile neînchideri în poligoane (mărimile din paranteze) rezultă:

$$\begin{cases} N_1 k_1' - n_{12} k_2' - n_{13} k_3' + v_1' = 0 \\ -n_{21} k_1' + N_2 k_2' - n_{23} k_3' + v_2' = 0 \\ -n_{31} k_1' - n_{32} k_2' + N_3 k_3' + v_3' = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Trebuie arătat că termenii liberi noi  $v_i'$  sunt mai mici decât  $v_i$ ; pentru aceasta, efectuăm suma lor:

$$\begin{aligned} v_1' + v_2' + v_3' &= \left( \frac{n_{12}}{N_2} v_2 + \frac{n_{13}}{N_3} v_3 \right) + \left( \frac{n_{21}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_3} v_3 \right) + \left( \frac{n_{31}}{N_1} v_1 + \frac{n_{32}}{N_2} v_2 \right) = \\ &= \left( \frac{N_1 - n_1}{N_1} \right) v_1 + \left( \frac{N_2 - n_2}{N_2} \right) v_2 + \left( \frac{N_3 - n_3}{N_3} \right) v_3 = \\ &= \left( 1 - \frac{n_1}{N_1} \right) v_1 + \left( 1 - \frac{n_2}{N_2} \right) v_2 + \left( 1 - \frac{n_3}{N_3} \right) v_3 \end{aligned} \quad (16)$$

Se remarcă faptul că noii termeni liberi  $v_i'$  sunt mai mici decât valorile inițiale  $v_i$ .

Urmărind același raționament se poate începe o nouă iterație:

$$\begin{cases} k_1' = -\frac{v_1'}{N_1} + k_1'' \\ k_2' = -\frac{v_2'}{N_2} + k_2'' \\ k_3' = -\frac{v_3'}{N_3} + k_3'' \end{cases} \quad (17)$$

Va rezulta un nou sistem normal:

$$\begin{cases} N_1 k_1'' - n_{12} k_2'' - n_{13} k_3'' + v_1'' = 0 \\ -n_{21} k_1'' + N_2 k_2'' - n_{23} k_3'' + v_2'' = 0 \\ -n_{31} k_1'' - n_{32} k_2'' + N_3 k_3'' + v_3'' = 0 \end{cases} \quad (18)$$

unde:

$$v_1'' = \left( \frac{n_{12}}{N_2} v_2' + \frac{n_{13}}{N_3} v_3' \right); v_2'' = \left( \frac{n_{21}}{N_1} v_1' + \frac{n_{23}}{N_3} v_3' \right); v_3'' = \left( \frac{n_{31}}{N_1} v_1' + \frac{n_{32}}{N_2} v_2' \right) \quad (19)$$

Continuând aproximațiile până când termenii liberi vor deveni neglijabil de mici (de exemplu în iterația n) se vor calcula în final corecțiile conform (17) astfel:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{N_1} (v_1 + v_1' + v_1'' + \dots) \\ k_2 &= -\frac{1}{N_2} (v_2 + v_2' + v_2'' + \dots) \\ k_3 &= -\frac{1}{N_3} (v_3 + v_3' + v_3'' + \dots) \end{aligned} \right\} (20) \Rightarrow \text{șiruri de valori } \underline{\text{convergente spre zero.}}$$

Se poate ajunge la o convergență mai rapidă, dacă nu se execută concomitent substituțiile în toate ecuațiile.

De exemplu,  $k_1 = -\frac{v_1}{N_1} + k_1'$  înlocuit în celelalte ecuații va conduce la o diminuare a termenilor liberi din ecuațiile 2 și 3, iar  $k_2$  și  $k_3$  vor fi determinate funcție de noile neînchideri:

$$-n_{21} \left( -\frac{v_1}{N_1} + k_1' \right) + N_2 k_2 - n_{23} k_3 + v_2 = 0 \Rightarrow N_2 k_2 + v_2 + \frac{n_{21}}{N_1} v_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{v_2 + \frac{n_{21}}{N_1} v_1}{N_2} + k_2'$$

unde  $k_1', n_{23} k_3, k_2'$  sunt valori neglijabile;

În ecuația a 3-a se vor înlocui noile valori pentru  $k_1$  și  $k_2$ :

$$\begin{aligned} -n_{31} \left( -\frac{v_1}{N_1} + k_1' \right) - n_{32} \left( -\frac{v_2 + \frac{n_{21}}{N_1} v_1}{N_1} + k_2' \right) + N_3 k_3 + v_3 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow N_3 k_3 + \left( v_3 + \frac{n_{13}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_2} \left( v_2 + \frac{n_{12}}{N_1} v_1 \right) \right) &= 0 \\ \Rightarrow k_3 = -\frac{v_3 + \frac{n_{13}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_2} v_2 + \frac{n_{12} n_{23}}{N_1 N_2} v_1}{N_3} & \quad (21) \end{aligned}$$

Dacă se analizează relația pentru calculul neînchiderilor noi  $v_i'$  din (14) și anume:

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \frac{n_{12}}{N_2} v_2 + \frac{n_{13}}{N_3} v_3 \\ v_2' &= \frac{n_{12}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_3} v_3 \\ v_3' &= \frac{n_{13}}{N_1} v_1 + \frac{n_{23}}{N_2} v_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

evident că în relațiile următoare raporturile care multiplică neînchiderile se păstrează.

De exemplu,  $v_1, v_1', v_1'' \dots$  vor fi întotdeauna multiplicare cu raporturile  $\frac{n_{12}}{N_1}$  și  $\frac{n_{13}}{N_1}$ .

Dacă s-ar înmulți neînchiderea cu raportul  $\frac{n_1}{N_1}$  s-ar obține un control asupra calculelor (prin însumare) întrucât  $N_1 = n_1 + n_{12} + n_{13}$ . Aceeași situație avem și în poligoanele II și III.

Din înmulțirile care se fac pentru obținerea corecțiilor  $k_i$  vor rezulta următoarele sume:

$$\left\{ \begin{aligned} S_1 &= \frac{n_1}{N_1} v_1 + \frac{n_1}{N_1} v_1' + \frac{n_1}{N_1} v_1'' + \dots \\ S_2 &= \frac{n_2}{N_2} v_2 + \frac{n_2}{N_2} v_2' + \frac{n_2}{N_2} v_2'' + \dots \\ S_3 &= \frac{n_3}{N_3} v_3 + \frac{n_3}{N_3} v_3' + \frac{n_3}{N_3} v_3'' + \dots \\ S_{12} &= \frac{n_{12}}{N_1} v_1 + \frac{n_{12}}{N_1} v_1' + \frac{n_{12}}{N_1} v_1'' + \dots \\ S_{21} &= \frac{n_{12}}{N_2} v_2 + \frac{n_{12}}{N_2} v_2' + \frac{n_{12}}{N_2} v_2'' + \dots \\ S_{13} &= \frac{n_{13}}{N_1} v_1 + \frac{n_{13}}{N_1} v_1' + \frac{n_{13}}{N_1} v_1'' + \dots \\ S_{31} &= \frac{n_{13}}{N_3} v_3 + \frac{n_{13}}{N_3} v_3' + \frac{n_{13}}{N_3} v_3'' + \dots \\ S_{23} &= \frac{n_{23}}{N_2} v_2 + \frac{n_{23}}{N_2} v_2' + \frac{n_{23}}{N_2} v_2'' + \dots \\ S_{32} &= \frac{n_{23}}{N_3} v_3 + \frac{n_{23}}{N_3} v_3' + \frac{n_{23}}{N_3} v_3'' + \dots \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Conform celor prezentate la compensarea rețelelor poligonometrice (referitor la repartizarea corecțiilor pe secțiuni avem de exemplu, pentru secțiunea  $AB$  corecția totală  $n_1 k_1$ ).

Dacă înlocuim valorile  $k_i$  deduse în (20), în relațiile pentru calculul corecțiilor pe secțiuni rezultă:

$$\left. \begin{aligned} n_1 k_1 &= -\frac{n_1}{N_1} (v_1 + v_1' + v_1'' + \dots) = -S_1 \\ n_2 k_2 &= -\frac{n_2}{N_2} (v_2 + v_2' + v_2'' + \dots) = -S_2 \\ n_3 k_3 &= -\frac{n_3}{N_3} (v_3 + v_3' + v_3'' + \dots) = -S_3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

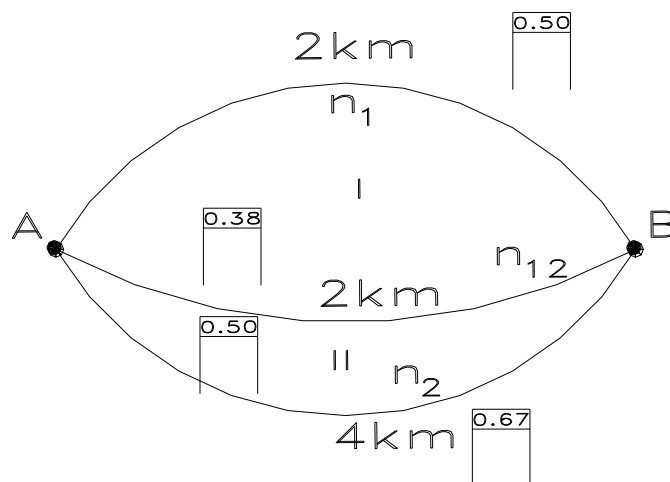
Pentru secțiunile comune a două poligoane:

$$n_{12}(k_1 - k_2) = -\frac{n_{12}}{N_1} (v_1 + v_1' + v_1'' + \dots) + \frac{n_{12}}{N_2} (v_2 + v_2' + v_2'' + \dots) = S_{21} - S_{12} \quad (25)$$

În mod similar:

$$\left\{ \begin{aligned} n_{13}(k_1 - k_3) &= S_{31} - S_{13} \\ n_{23}(k_2 - k_3) &= S_{32} - S_{23} \end{aligned} \right. \quad (26)$$

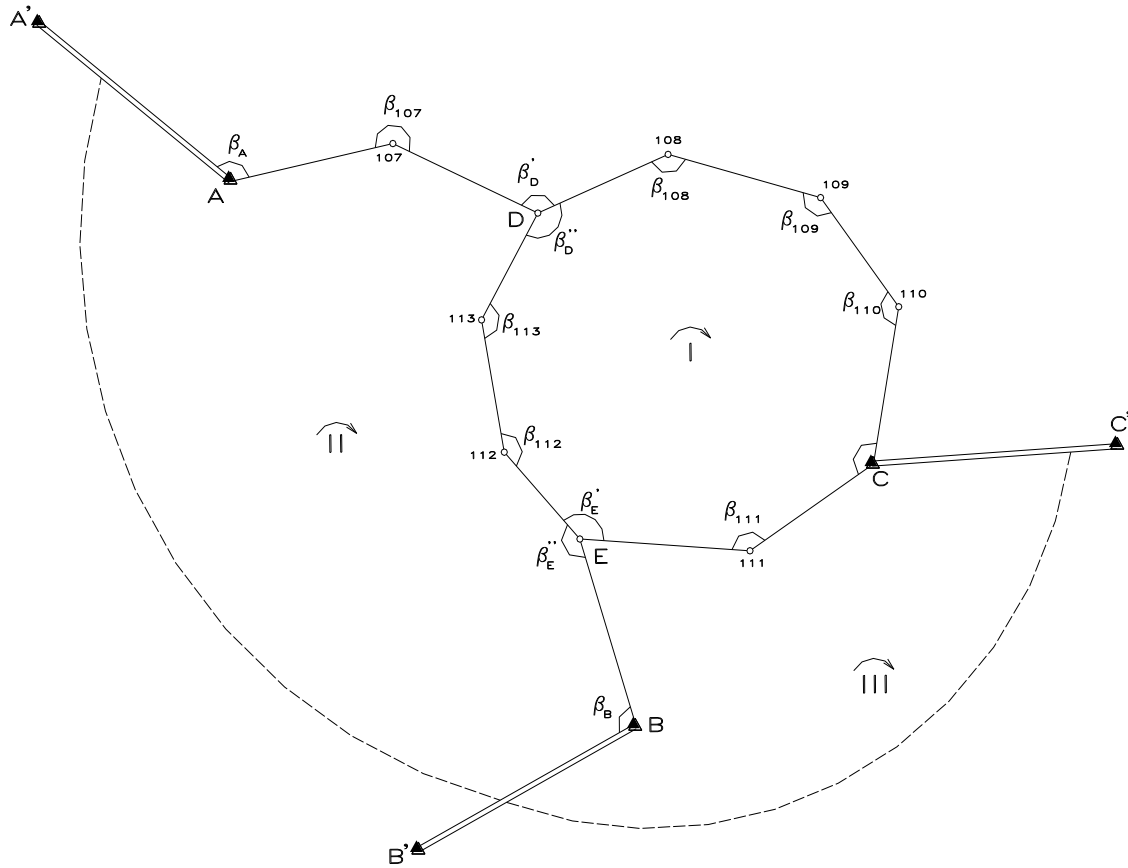
Raporturile  $\frac{n_1}{N_1}, \frac{n_{12}}{N_1}, \frac{n_{13}}{N_1}, \frac{n_2}{N_2}, \frac{n_{12}}{N_2}, \dots$  sunt denumite cifre roșii, iar întreaga rezolvare a sistemului se poate face pe baza unei scheme:





## Compensarea unghiurilor într-o rețea poligonometrică legată

Constrângerile care apar în rețeaua poligonometrică legată sunt date de laturi de orientări cunoscute incluse în rețeaua de poligonaj. Aceste laturi de orientări cunoscute sunt generate de două puncte din rețeaua de triangulație de stat care se îndesește.



$N$  – numărul de ecuații de condiție;

$$N = S + P - 1;$$

$S$  – numărul de poligoane închise;

$P$  – numărul de laturi fixe (elemente de constrângere);

$N=1+3-1=3 \Rightarrow$  3 ecuații de condiție pentru rețeaua din figură;

Se va introduce în această situație noțiunea de poligon fictiv pentru a putea aplica toate raționamentele de la rețelele poligonometrice neconstrânse. Poligoanele fictive se vor stabili întotdeauna pe traseul cel mai scurt.

$$\begin{cases} N_1 k_1 - n_{12} k_2 - n_{13} k_3 + v_1 = 0 \\ -n_{21} k_1 + N_2 k_2 - n_{23} k_3 + v_2 = 0 \\ -n_{31} k_1 - n_{32} k_2 + N_3 k_3 + v_3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$N_1$  - numărul de direcții pe conturul poligonului I;

$n_{21}$  - numărul de direcții comune poligoanelor II și I;

$v_1$  - neînchiderea în poligonul I.

Pentru figură:

$$\begin{cases} 18k_1 - 6k_2 - 4k_3 + v_1 = 0 \\ -6k_1 + 14k_2 - 3k_3 + v_2 = 0 \\ -4k_1 - 3k_2 + 8k_3 + v_3 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} v_1 = \sum \beta_i - 200(n-2) \\ v_2 = \theta_{transmis} - \theta_{calculat} \\ v_3 = \theta_{transmis} - \theta_{calculat} \end{cases} \quad (29)$$

Pentru a stabili  $v_2, v_3$ :

- se calculează  $\theta_{AA'}, \theta_{BB'}, \theta_{CC'}$  din coordonate;

- se face transmiterea orientării în interiorul poligoanelor fictive în sensul indicat de săgeți, de la o latură cunoscută la alta.

Orientarea transmisă:

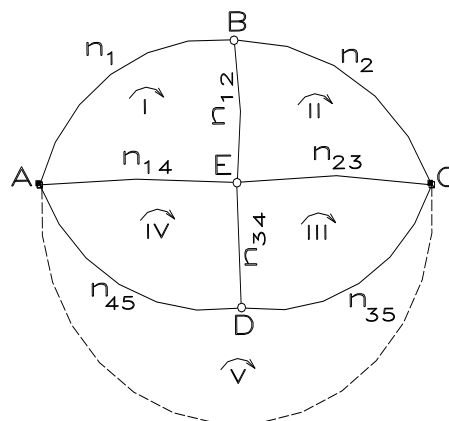
$$\theta_{BB'} = \theta_{AA'} + \sum \beta_i + n \cdot 200^G \quad (30)$$

și:

$$v_{2,3} = \theta_{transmis} - \theta_{calculat} = \theta_i + \sum \beta_i + n \cdot 200^G - \theta_f = \sum \beta_i - [(\theta_f - \theta_i) - n \cdot 200^G] \quad (31)$$

### Compensarea creșterilor de coordonate și a diferențelor de nivel într-o rețea poligonometrică legată

Constrângerile care apar de data aceasta în rețea sunt date de punctele de coordonate și cote cunoscute.



$A, C$  – puncte vechi;

$$N = S + P - 1;$$

$P$  – numărul de puncte vechi;

$$S \text{ – numărul de poligoane închise } \Rightarrow N = 4 + 2 - 1 = 5$$

$$\begin{cases} N_1 k_1 - n_{12} k_2 - n_{14} k_4 + v_1 = 0 \\ -n_{21} k_1 + N_2 k_2 - n_{23} k_3 + v_2 = 0 \\ -n_{32} k_2 + N_3 k_3 - n_{34} k_4 - n_{35} k_5 + v_3 = 0 \\ -n_{41} k_1 - n_{43} k_3 + N_4 k_4 - n_{45} k_5 + v_4 = 0 \\ -n_{53} k_3 - n_{54} k_4 + N_5 k_5 + v_5 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

$N_1$  - perimetrul din poligonul I ;  $N_i$  - perimetrul din poligonul i;

$N_5 = n_{45} + n_{35}$ ;

$n_{12}$  - latură comună pentru poligonul I și II;

$n_{ij}$  - latură comună pentru poligonul i și j;

$v_{1...4}$  - neînchiderile în poligoanele închise.

$$\begin{aligned} v_i^X &= \sum \Delta X_i \\ v_i^Y &= \sum \Delta Y_i \\ v_i^H &= \sum \Delta H_i \end{aligned} \quad (33)$$

Corecțiile  $v_5$  - se transmit coordonatele în poligonul fictiv în sensul dat de săgeată de la un punct la celălalt.

$$\begin{aligned} v_5^X &= \left( X_A + \sum_A^C \Delta X_i \right) - X_C \\ v_5^Y &= \left( Y_A + \sum_A^C \Delta Y_i \right) - Y_C \\ v_5^H &= \left( H_A + \sum_A^C \Delta H_i \right) - H_C \end{aligned} \quad (34)$$

### Compensarea riguroasă a unei rețele poligonometrice, planimetrice neconstrânse prin metoda măsurătorilor condiționate

După cum s-a remarcat în metodele anterioare de prelucrare, compensarea unei rețele poligonometrice se realizează independent pentru fiecare gen de măsurătoare executată (unghiuri, coordonate relative, diferențe de nivel), pentru fiecare în parte scriindu-se un sistem de ecuații.

Pentru rețelele planimetrice de exemplu, se vor compensa într-o primă fază unghiurile și direcțiile din rețeaua poligonometrică, cu care se calculează apoi orientări, iar cu acestea și cu distanțele măsurate se calculează creșterile de coordonate  $\Delta X, \Delta Y, \Delta H$  pentru compensarea cărora se scriu din nou două sisteme normale direct de pe figură. Acest mod de abordare are unele avantaje dar și unele deficiențe în special din punct de vedere al rigurozității prelucrării, respectiv evaluării corecte a preciziei în rețea.

Se știe că pentru fiecare poligon în care s-au efectuat măsurători (unghiulare și liniare) pe contur se pot scrie 3 ecuații geometrice de condiție:

- O ecuație pentru unghiuri:

$$\left. \begin{aligned} \sum \beta_i &= 200^G (n + 2) \Rightarrow \text{in exteriorul poligonului} \\ &\text{sau} \\ \sum \omega_i &= 200^G (n - 2) \Rightarrow \text{in interiorul poligonului} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- Două ecuații pentru coordonate relative:

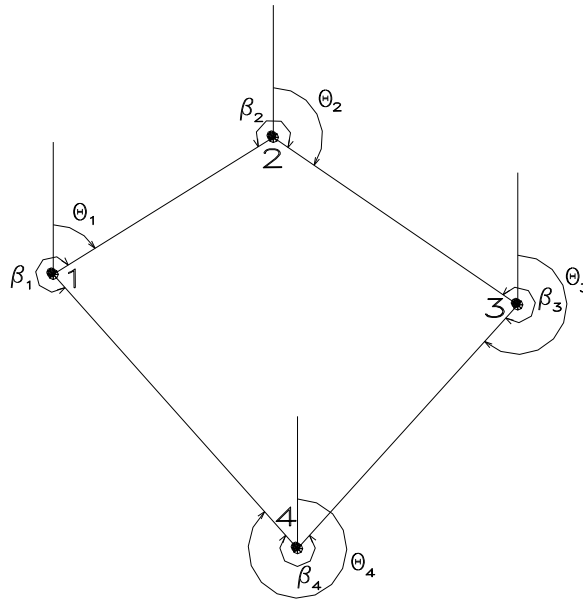
$$\sum \Delta X_i = \sum \Delta Y_i = 0 \quad (2)$$

Numărul total de ecuații de condiție într-o rețea poligonometrică neconstrânsă este egală cu 3xnumărul poligoanelor închise. Practic, măsurătorile executate trebuie să satisfacă anumite condiții geometrice, pretându-se din acest punct de vedere pentru o compensare prin metoda măsurătorilor condiționate cu următoarele avantaje:

- compensarea se realizează în bloc pentru toate mărimile măsurate în teren (direcții, unghiuri sau distanțe)
- din faza de pregătire a măsurătorilor pentru compensare pot fi depistate greșeli în setul de măsurători (acestea apărând în termenii liberi)
- sistemul ecuațiilor normale este redus (3xnumărul poligoanelor)

Dezavantaje: - automatizarea calculelor este mai greoaie, întrucât ecuațiile de condiție depind de fiecare configurație de rețea și programe universal valabile nu se pot realiza.

## Stabilirea ecuațiilor de condiție pentru un poligon închis



### Condiția 1:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 200^G(n+2) = 0 \quad (3)$$

Considerând  $v_{\beta_i}$  - corecțiile pentru unghiurile măsurate  $\beta'_i$ , rezultă:

$$(\beta'_1 + v_{\beta_1}) + (\beta'_2 + v_{\beta_2}) + (\beta'_3 + v_{\beta_3}) + (\beta'_4 + v_{\beta_4}) - 200^G(n+2) = 0 \quad (4)$$

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} + W_{\beta} = 0 \quad (5)$$

$$W_{\beta} = \sum_{i=1}^n \beta'_i - 200^G(n+2) \quad (6)$$

În cazul nostru  $n=4$ .

### Condițiile 2 și 3:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta X_i = \sum_{i=1}^n s_i \cos \theta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \Delta Y_i = \sum_{i=1}^n s_i \sin \theta_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$n=4$ ;

$s_i$  - distanțe;

$\theta_i$  - orientări.

Cu unghiurile măsurate se vor calcula orientările provizorii:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_i \\ \theta_2^0 = \theta_i - 200^G + \beta_2' = \theta_i + \beta_2' - 200^G \\ \theta_3^0 = \theta_2^0 - 200^G + \beta_3' = \theta_i + (\beta_2' + \beta_3') - 2 \cdot 200^G \\ \theta_4^0 = \theta_3^0 - 200^G + \beta_4' = \theta_i + (\beta_2' + \beta_3' + \beta_4') - 3 \cdot 200^G \\ \theta_1^0 = \theta_4^0 - 200^G + \beta_1' = \theta_i + (\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4') - 4 \cdot 200^G \end{cases} \quad (8)$$

$\theta_i$  - se alege arbitrar sau se determină (exemplu: cu declinator magnetic).

Calculul creșterilor de coordonate:

$$\begin{cases} \Delta X_1 = (s_1' + v_{s_1}) \cos \theta_i \\ \Delta X_2 = (s_2' + v_{s_2}) \cos(\theta_i + (\beta_2' + v_{\beta_2}) - 200^G) \\ \Delta X_3 = (s_3' + v_{s_3}) \cos(\theta_i + (\beta_2' + v_{\beta_2}) + (\beta_3' + v_{\beta_3}) - 2 \cdot 200^G) \\ \Delta X_4 = (s_4' + v_{s_4}) \cos(\theta_i + (\beta_2' + v_{\beta_2}) + (\beta_3' + v_{\beta_3}) + (\beta_4' + v_{\beta_4}) - 3 \cdot 200^G) \end{cases} \quad (9)$$

Ecuțiile fiind neliniare, urmează o liniarizare a acestora prin dezvoltare în serie Taylor a funcției:

$$f_i(s_i, \beta_i) = \Delta X_i = (s_i' + v_{s_i}) \cos\left(\theta_i + \sum_{i=2}^4 (\beta_i' + v_{\beta_i})\right) \quad (10)$$

$$f_i(s_i^0, \beta_i^0) + \sum \frac{\partial f}{\partial s_i} v_{s_i} + \sum \frac{\partial f}{\partial \beta_i} v_{\beta_i} = 0 \quad (11)$$

Rezultând pentru ecuațiile de mai sus:

$$\begin{aligned} & s_i' \cos \theta_i + v_{s_i} \cos \theta_i \\ & s_2' \cos \theta_2^0 + v_{s_2} \cos \theta_2^0 - s_2' \sin \theta_2^0 v_{\beta_2} \\ & s_3' \cos \theta_3^0 + v_{s_3} \cos \theta_3^0 - s_3' \sin \theta_3^0 (v_{\beta_2} + v_{\beta_3}) \\ & s_4' \cos \theta_4^0 + v_{s_4} \cos \theta_4^0 - s_4' \sin \theta_4^0 (v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4}) \end{aligned} \quad (12)$$

---


$$\sum_{i=1}^4 s_i' \cos \theta_i^0 + \sum_{i=1}^4 v_{s_i} \cos \theta_i^0 - \sum_{i=2}^4 \Delta Y_i^0 v_{\beta_2} - \sum_{i=3}^4 \Delta Y_i^0 v_{\beta_3} - \Delta Y_4^0 v_{\beta_4} = 0$$

Notăm:

$$\sum_{i=1}^4 s_i' \cos \theta_i^0 = W_X \quad (13)$$

În mod asemănător se procedează și pentru creșterile de coordonate  $\Delta Y$  rezultând formulele generale:

$$\sum_{i=1}^4 v_{s_i} \cos \theta_i^0 - \sum_{i=2}^4 \frac{\Delta Y_i^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_2} - \sum_{i=3}^4 \frac{\Delta Y_i^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_3} - \frac{\Delta Y_4^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_4} + W_X = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^4 v_{s_i} \sin \theta_i^0 + \sum_{i=2}^4 \frac{\Delta X_i^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_2} + \sum_{i=3}^4 \frac{\Delta X_i^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_3} + \frac{\Delta X_4^0}{\rho^{cc}} v_{\beta_4} + W_Y = 0 \quad (15)$$

Pentru generalizare se vor extinde sumele de la indicii de jos până la  $n$  ( $n$  = numărul de laturi sau unghiuri măsurate) ca indici superiori în sume.

Grupând ecuațiile de condiție rezultă din (5), (14) și (15) coeficienții:

Nr. ecuație	Corecții pentru $s_i$				Corecții pentru $\beta_i$				[aa]	[ab]	[ac]
	$v_{s_1}$	$v_{s_2}$	$v_{s_3}$	$v_{s_4}$	$v_{\beta_1}$	$v_{\beta_2}$	$v_{\beta_3}$	$v_{\beta_4}$			
1					+1	+1	+1	+1			
2	$\cos \theta_1^0$	$\cos \theta_2^0$	$\cos \theta_3^0$	$\cos \theta_4^0$	0	$\sum_{i=2}^4 \frac{\Delta Y_i}{\rho}$	$\sum_{i=3}^4 \frac{\Delta Y_i}{\rho}$	$\frac{\Delta Y_4}{\rho}$		[bb]	[bc]
3	$\sin \theta_1^0$	$\sin \theta_2^0$	$\sin \theta_3^0$	$\sin \theta_4^0$	0	$\sum_{i=2}^4 \frac{\Delta X_i}{\rho}$	$\sum_{i=3}^4 \frac{\Delta X_i}{\rho}$	$\frac{\Delta X_4}{\rho}$			[cc]

Formarea sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + W_\beta = 0 \\ [ab]k_1 + [ab]k_2 + [bc]k_3 + W_x = 0 \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + W_y = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Rezolvând sistemul normal (16) rezultă corelatele  $k_1, k_2, k_3$  cu care se calculează corecțiile:

$$v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 \quad (17)$$

Cu ajutorul relației (17) se poate calcula precizia dată de eroarea medie pătratică

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \quad (18)$$

unde:

$r$  - numărul ecuațiilor de condiție.

Se remarcă faptul că în prima ecuație apar numai elemente măsurate (unghiuri  $\beta_i$ ) și deci, această ecuație nu depinde de sistemul de coordonate.

Condițiile din ecuațiile (5) și (6) sunt invariabile față de o translație, însă unghiurile de orientare  $\theta_i^0$  pot produce influențe în valorile finale, funcție de  $\theta_i$ , rezultând rotația poligonului în sistemul de coordonate adoptat.

Cazul general: În cazul unui poligon cu  $n$  laturi, orientarea  $\theta_i'$  pentru latura  $i$  are expresia:

$$\theta_i' = \theta_1 + \sum_{j=2}^n \beta_j - (i-1) \cdot 200^G = 0 \quad (19)$$

Rezultă ecuațiile de condiție:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (\beta'_i + v_{\beta_i}) - (n+2) \cdot 200^G = 0 \\ \sum_{i=1}^n (s'_i + v_{s_i}) \cos \left( \theta_1 + \sum_{j=2}^i (\beta'_j + v_{\beta_j}) - (i-1) \cdot 200^G \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (s'_i + v_{s_i}) \sin \left( \theta_1 + \sum_{j=2}^i (\beta'_j + v_{\beta_j}) - (i-1) \cdot 200^G \right) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Calculând termenii liberi cu relațiile:

$$\left. \begin{aligned} W_{\beta} &= \sum_{i=1}^n \beta_i^0 - (n+2) \cdot 200^G \\ W_x &= \sum_{i=1}^n s_i^0 \cos \theta_i^0 \\ W_y &= \sum_{i=1}^n s_i^0 \sin \theta_i^0 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

liniarizând ecuațiile (20), rezultă:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n v_{\beta_i} + W_{\beta} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 v_{s_i} - \sum_{i=2}^n \left( s'_i \frac{\sin \theta_i^0}{\rho} \right) \cdot \sum_{j=2}^i v_{\beta_j} + W_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \theta_i^0 v_{s_i} + \sum_{i=2}^n \left( s'_i \frac{\cos \theta_i^0}{\rho} \right) \cdot \sum_{j=2}^i v_{\beta_j} + W_y = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Reordonând termenii ultimelor două ecuații, obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 v_{s_i} - \sum_{i=2}^n \left( \sum_{j=i}^n \frac{s'_j \sin \theta_j^0}{\rho} \right) \cdot v_{\beta_i} + W_x &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \theta_i^0 v_{s_i} + \sum_{i=2}^n \left( \sum_{j=i}^n \frac{s'_j \cos \theta_j^0}{\rho} \right) \cdot v_{\beta_i} + W_y &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

și substituind  $\Delta X = s \cos \theta$  și  $\Delta Y = s \sin \theta$ , rezultă forma finală a ecuațiilor:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n v_{\beta_i} + W_{\beta} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 v_{s_i} - \sum_{i=2}^n \frac{\Delta Y_i}{\rho} \cdot v_{\beta_i} + W_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \theta_i^0 v_{s_i} + \sum_{i=2}^n \frac{\Delta X_i}{\rho} \cdot v_{\beta_i} + W_y = 0 \end{cases} \quad (24)$$

**Observații:**

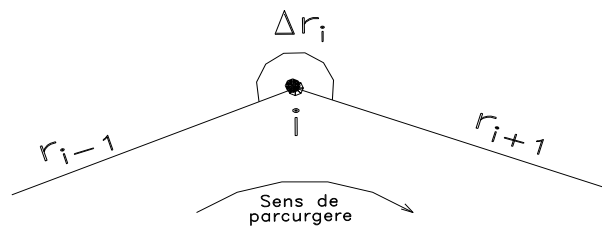
1. Sistemul (24) al ecuațiilor de condiție corespunde situației când unghiurile pe conturul poligonului au fost măsurate pe partea stângă în sensul de parcurgere;



2. La o rețea poligonometrică, în punctele comune relațiile corespund numai dacă pe poligoanele vecine se parcurge același sens;

3. Dacă notăm unghiurile situate pe stânga traseului cu indicele „L”, iar cele de pe dreapta traseului cu „R”, diferența direcțiilor  $\Delta r_i = r_{i+1} - r_{i-1}$  (unde  $r_{i+1}$  - direcția spre punctul din față;  $r_{i-1}$  - direcția spre punctul din spate (în sensul de parcurgere)), rezultă valorile tipice:

$$\left. \begin{aligned} \beta_i &= \beta_{i,L} \\ \beta_i &= 400 - \beta_{i,R} \\ \beta_i &= r_{i+1} - r_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$



Se remarcă că în sistemul ecuațiilor de condiție (24),  $v_{\beta_i}$  trebuie substituit prin valorile tipice concrete:

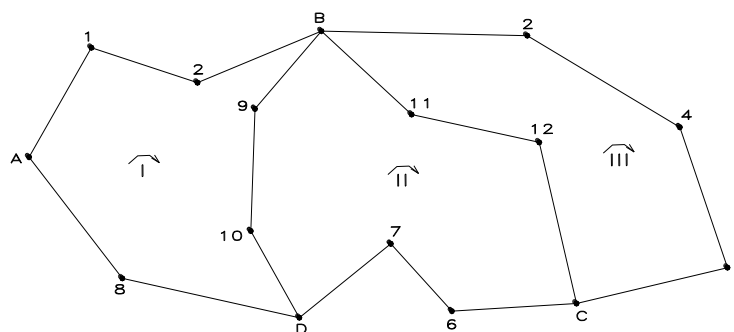
$v_{\beta_i} = v_{\beta_{i,L}}$  - pentru  $\beta_i$  ținând de partea stângă;

$v_{\beta_i} = -v_{\beta_{i,R}}$  - pentru  $\beta_i$  ținând de partea dreaptă;

$v_{\beta_i} = v_{\beta_{r_{i+1}}} - v_{\beta_{r_{i-1}}}$  - pentru  $\beta_i$  ținând de  $\Delta r$ .

Considerând o rețea poligonometrică se pot scrie pentru fiecare poligon ecuațiile deduse anterior, care generalizate conform (24) au forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_{\beta_i} + W_{\beta} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 v_{s_i} - \sum_{i=2}^n \frac{\Delta Y_i}{\rho} \cdot v_{\beta_i} + W_x &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \theta_i^0 v_{s_i} + \sum_{i=2}^n \frac{\Delta X_i}{\rho} \cdot v_{\beta_i} + W_y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (26)$$



Trebuie avut în vedere faptul că pe laturile comune poligoanelor, în punctele comune direcțiile provin dintr-o prelucrare a seriilor, rezultând:

$$\begin{aligned}\beta_9^I + \beta_9^{II} &= 400^G \\ \beta_{10}^I + \beta_{10}^{II} &= 400^G \\ \beta_{11}^{II} + \beta_{11}^{III} &= 400^G \\ &etc.\end{aligned}$$

Corecțiile aplicate acestor unghiuri în cadrul compensării rețelei poligonometrice nu trebuie să schimbe în niciun caz condiția geometrică a sumei unghiurilor într-un punct. Trebuie deci respectat  $v_{\beta_i} = v_{\beta_{i,R}}$  ( $\beta_{i,R}$  - unghiul pe partea dreaptă în sens de parcurgere).

Dacă  $v_{\beta_i} = v_{\beta_{i,R}}$ , atunci  $v_{\beta_i} = -v_{\beta_{i,L}}$  ( $\beta_{i,L}$  - unghiul pe partea stângă în sens de parcurgere).

Pentru a evita anumite complicații se poate recurge la faptul că unghiurile provin din diferențe de direcții.

Exemplu: Dacă unghiurile  $\beta_i$  sunt unghiuri interioare  $\beta_i = r_{i-1} - r_{i+1}$  (direcția spre punctul înapoi minus direcția spre punctul înainte în sensul pozitiv de parcurgere), ecuațiile de condiție pentru un poligon devin:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (v_{r_{i-1}} - v_{r_{i+1}}) + W_{\beta_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \cos \theta_i^0 \cdot v_{s_i} - \sum_{i=2}^n \frac{\Delta Y_i}{\rho} (v_{r_{i-1}} - v_{r_{i+1}}) + W_x = 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \theta_i^0 \cdot v_{s_i} + \sum_{i=2}^n (v_{r_{i-1}} - v_{r_{i+1}}) + W_y = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Dacă se alege sensul pozitiv de parcurgere în toate poligoanele din figura de mai sus, semnele corecțiilor pentru direcțiile comune la două poligoane își schimbă automat semnele în cele două poligoane vecine. Din această cauză este recomandabil a se utiliza pentru compensarea măsurătorilor într-o rețea poligonometrică neconstrânsă.

## Compensarea rețelelor poligonometrice legate

Rețelele poligonometrice legate se execută de regulă, pentru completarea rețelei de triangulație geodezică. Aceste rețele includ în configurația lor puncte de coordonate sau cote cunoscute. Aceste puncte „tari” sau „vechi” introduc anumite constrângeri în rețeaua poligonometrică. Dacă măsurătorile din rețeaua poligonometrică au un grad de precizie ridicat, iar punctele de constrângere sunt mai slabe din punct de vedere al preciziei, acestea degradează calitatea noii rețele.

Metoda poligoanelor cu scrierea ecuațiilor direct de pe figură, cunoscută de la rețelele neconstrânse se poate aplica și-n această situație fără modificări esențiale. Și în această situație, rețelele se vor trata separat – unghiuri, creșteri de coordonate.

Pentru rețelele de nivelment geometric, toate raționamentele stabilite până acum își păstrează valabilitatea. Evaluarea preciziei în această situație se va face după metoda măsurătorilor condiționate:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \quad (1)$$

unde:

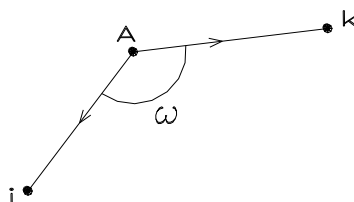
$$p_i = \frac{1}{d_i} \text{ - ponderi;}$$

$v_i$  - corecțiile calculate după compensare;

$r$  - numărul ecuațiilor de condiție.

Pentru o rețea planimetrică însă, sau chiar spațială, când sunt măsurate concomitent și unghiurile verticale în vederea calculării diferențelor de nivel, se recomandă tratarea prin metoda măsurătorilor indirecte.

### Ecuațiile de condiție pentru o direcție și unghi măsurat



a) Directii:

$$\begin{aligned} v_{Ak} &= -dz_A + \rho \frac{\Delta Y_{Ak}}{S_{Ak}^2} \cdot (\delta X_A - \delta X_k) - \rho \frac{\Delta X_{Ak}}{S_{Ak}^2} \cdot (\delta Y_A - \delta Y_k) - l_{Ak} \\ v_{Ai} &= -dz_A + \rho \frac{\Delta Y_{Ai}}{S_{Ai}^2} \cdot (\delta X_A - \delta X_i) - \rho \frac{\Delta X_{Ai}}{S_{Ai}^2} \cdot (\delta Y_A - \delta Y_i) - l_{Ai} \end{aligned} \quad (2)$$

unde:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\Delta Y_{Ak}}{\bar{S}_{Ak}^2} = a_{Ak}; \quad \rho \frac{\Delta X_{Ak}}{\bar{S}_{Ak}^2} = b_{Ak} \\ \rho \frac{\Delta Y_{Al}}{\bar{S}_{Al}^2} = a_{Al}; \quad \rho \frac{\Delta X_{Al}}{\bar{S}_{Al}^2} = b_{Al} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

„- dz<sub>A</sub>” – necunoscuta de orientare a stației;

$\delta X_{A,I,k}$  - corecțiile coordonatelor provizorii  $X_{A,I,k}^0$ ;

$\delta Y_{A,I,k}$  - corecțiile coordonatelor provizorii  $Y_{A,I,k}^0$ ;

$l_{A,k,I} = \theta^0 - \theta$  - termenul liber;

$\bar{S}$  distanța în planul de proiecție (distanța orizontală).

b) Unghiuri:

$$v_{\omega} = a_{\omega} \delta X_A + b_{\omega} \delta Y_A - a_{A,I} \delta X_I - b_{A,I} \delta Y_I + a_{A,k} \delta X_k + b_{A,k} \delta Y_k - l_{\omega} \quad (4)$$

unde:

$$\left. \begin{aligned} a_{\omega} &= (a_{Al} - a_{Ak}) \\ b_{\omega} &= (b_{Al} - b_{Ak}) \\ l_{\omega} &= (l_{Ak} - l_{Al}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

### Ecuatia pentru lungimi înclinate măsurate

( $v_{S}$  - corecția pentru lungime)

$$v_{S,Al} = \left( \frac{\Delta X_{Al}}{S_{Al}} \right) \cdot (\delta X_I - \delta X_A) + \left( \frac{\Delta Y_{Al}}{S_{Al}} \right) \cdot (\delta Y_I - \delta Y_A) + \left( \frac{\Delta Z_{Al}}{S_{Al}} \right) \cdot (\delta Z_I - \delta Z_A) - l_{S,Al} \quad (6)$$

$S$  – lungimi înclinate măsurate

$\delta X, \delta Y, \delta Z$  - corecțiile care se aplică coordonatelor provizorii;

$l_{S,Al} = S^0 - S$

$S^0$  - lungimea înclinată calculată din coordonatele provizorii

$$S^0 = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (7)$$

### Ecuatiile pentru unghiurile zenitale

$\beta^0$  - unghi zenital

$$\beta^0 = \arctg \frac{\bar{S}}{\Delta H}$$

$$v_{\beta,Al} = \rho \frac{\Delta Z \cdot \Delta X}{S^2 \cdot \bar{S}} (\delta X_I - \delta X_A) + \rho \frac{\Delta Z \cdot \Delta Y}{S^2 \cdot \bar{S}} (\delta Y_I - \delta Y_A) - \rho \frac{\bar{S}}{S^2} (\delta Z_I - \delta Z_A) - l_{\beta,Al} \quad (8)$$

unde:  $l_{\beta,Al} = \beta^0 - \beta_{masurat}$

o problemă care trebuie discutată în cazul prelucrării în comun a tuturor măsurătorilor o reprezintă stabilirea judicioasă a ponderilor:

$$p = Q_{ll}^{-1} \quad (9)$$

$$Q_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

*matricea de varianța-covarianța*

$$p = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} & & & & \\ & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

- ponderile pentru o direcție măsurată sunt luate totdeauna egale cu unitatea;
- ponderile pentru unghiurile măsurate:  $p_{i,\omega} = 0.5$ ;
- ponderile pentru lungimile măsurate:  $p_s = \frac{const.}{\mu_0^2}$ , unde  $\mu_0^2$  - precizia de măsurare a lungimilor înclinate scoase din cartea tehnică a instrumentului (tahimetru electrooptic).

Constanta de la numărător se alege convenabil așa încât ponderile  $p_s$  să aibă mărimi exacte (aproape de unitate).

Prin metoda măsurătorilor indirecte vom avea deci, pentru fiecare măsurătoare efectuată în rețeaua poligonometrică, câte o ecuație de corecție.

Toți termenii ecuației sunt astfel încât coeficienții să fie cuprinși în matricea  $A$ , corecțiile în vectorul  $v$ , necunoscutele în vectorul  $x$ , termenii liberi în vectorul  $l$ , rezultând sistemul matriceal:

$$v = Ax - l \quad (12)$$

Se va stabili matricea ponderilor (conform criteriilor enunțate mai sus).

Prelucrarea se face punând condiția:

$$v^T p v = \text{minim} \quad (13)$$

Rezultă sistemul normal:

$$A^T p A \cdot x - A^T p l = 0 \quad (14)$$

apoi necunoscutele:

$$x = (A^T p A)^{-1} A^T p l \quad (15)$$

Corecțiile se calculează după relația:

$$v = Ax - l \quad (16)$$

Abaterea medie pătratică a unității de pondere ( $m_0$ ) se calculează cu relația:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{v^T p v}{n - u}} \quad (17)$$

unde:

$n$  - numărul total de măsurători;

$u$  - numărul de necunoscute.

### Transmiterea la sol a punctelor de triangulație și îndesire (puncte staționabile)

Când, din cauza lipsei de vizibilitate (în orașe, pe șantiere, în terenuri cu acoperire mare și obstacole multe și înalte), suntem siliți să ne urcăm pe edificii înalte (terasele clădirilor, turnuri etc.) pentru a putea da vizele necesare triangulației sau îndesirii punctelor, legarea drumurilor de aceste puncte situate la înălțime nu se mai poate face pe calea normală cunoscută. Este necesar în acest caz, ca printr-o măsurătoare și calcule suplimentare, să se determine pe sol în apropierea punctului înalt de pe clădire, câteva puncte 1, 2, 3 prin coordonatele lor, de care se vor lega apoi drumurile.

Se întâlnesc frecvent în practică două cazuri, după cum punctele sunt staționabile sau nestaționabile.

#### a) Punctele sunt accesibile (staționabile)

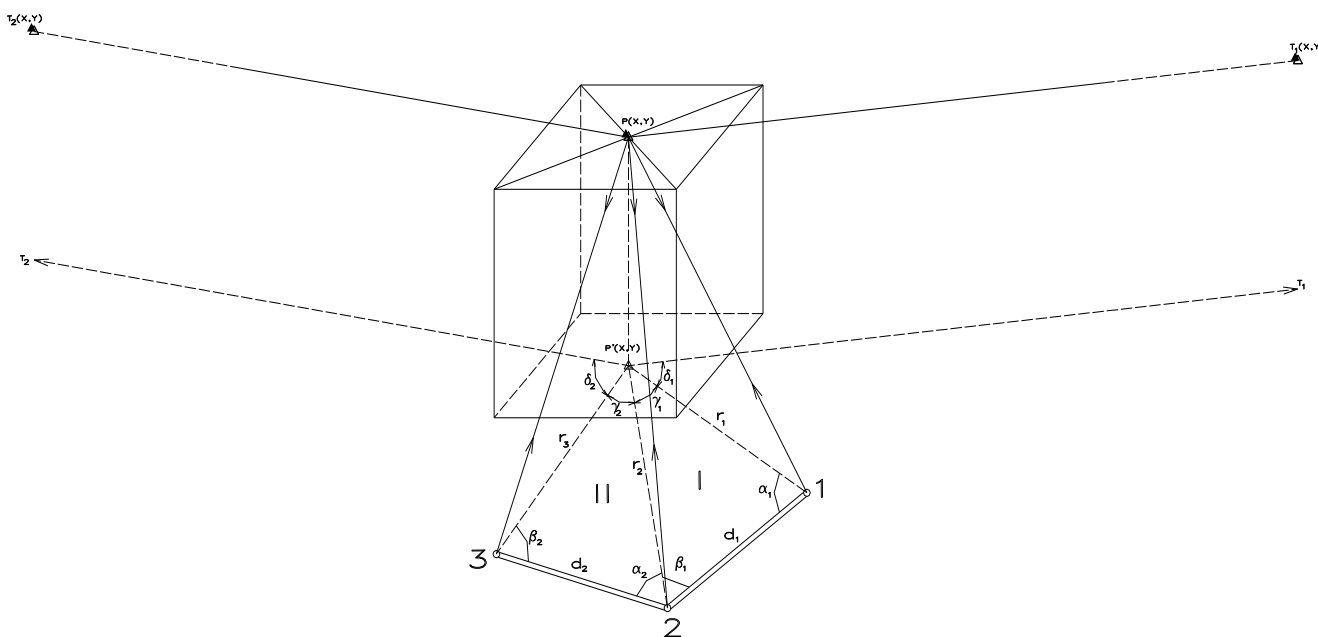


Fig. 1 Transmiterea la sol a punctelor de triangulație și îndesire (puncte staționabile)

Să presupunem că avem un punct de triangulație  $P$  de coordonate cunoscute situat pe terasa unei clădiri. Avem astfel posibilitatea să facem stație cu teodolitul în acest punct. Din acest punct  $P$  se observă încă cel puțin unul sau două puncte de triangulație, mai îndepărtate.

Pentru ca acest punct să servească la închiderea drumurilor, el trebuie transmis la sol.

În acest scop, efectuăm următoarele operații de teren:

- se aleg la nivelul terenului trei puncte 1, 2, 3 în așa fel încât ele să formeze cu punctul  $P$  două triunghiuri aproximativ echilaterale și se bornează aceste puncte;
- se staționează cu teodolitul în punctul  $P$ , în punctele 1, 2, 3 și se măsoară cu precizia corespunzătoare îndesirii triangulației, unghiurile  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  și  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ ;

- se măsoară cu precizie corespunzătoare laturile  $d_1$  și  $d_2$  ale celor două triunghiuri.

La birou efectuăm următoarele operații:

- se determină în valorile lor orizontale, distanțele  $d_1$  și  $d_2$  prin aplicarea tuturor corecțiilor (tensiune, etalonare, temperatură și reducere la orizont);

- dacă se lucrează în sistemul de coordonate geodezice, se vor mai aplica distanțelor  $d_1$  și  $d_2$  corecțiile de reducere la nivelul mării și corecții prin care să se țină seama de deformațiile cauzate de sistemul de proiecție adoptat;

- se compensează unghiurile  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  în cele două triunghiuri, astfel:

triunghiul I:

$$\alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1 - 200^G = W_1 \quad (1)$$

unde  $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$  sunt unghiuri măsurate.

Rezultă:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha'_1 + \frac{W_1}{3} \\ \beta_1 &= \beta'_1 + \frac{W_1}{3} \\ \gamma_1 &= \gamma'_1 + \frac{W_1}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

triunghiul II:

$$\alpha'_2 + \beta'_2 + \gamma'_2 - 200^G = W_2$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha'_2 + \frac{W_2}{3} \\ \beta_2 &= \beta'_2 + \frac{W_2}{3} \\ \gamma_2 &= \gamma'_2 + \frac{W_2}{3} \end{aligned} \quad (3)$$

Control:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 200^G \quad (4)$$

- se calculează orientările  $\theta_{P-T_2}$  și  $\theta_{P-T_1}$  din coordonatele punctelor vechi ( $P, T_1$  și  $T_2$ );

- se calculează orientările de la punctul  $P$  spre cele trei puncte de la sol, astfel:

$$\left. \begin{aligned} \theta'_{P-1} &= \theta_{P-T_1} + \delta_1 \\ \theta''_{P-1} &= \theta_{P-T_2} - (\delta_2 + \gamma_2 + \gamma_1) \end{aligned} \right\} \theta_{P-1} = \frac{\theta'_{P-1} + \theta''_{P-1}}{2}$$



$$\left. \begin{aligned} \theta'_{P-2} &= \theta_{P-T_1} + (\delta_1 + \gamma_1) \\ \theta''_{P-2} &= \theta_{P-T_2} - (\delta_2 + \gamma_1) \end{aligned} \right\} \theta_{P-2} = \frac{\theta'_{P-2} + \theta''_{P-2}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta'_{P-3} &= \theta_{P-T_1} + (\delta_1 + \gamma_1 + \gamma_2) \\ \theta''_{P-3} &= \theta_{P-T_2} - \delta_2 \end{aligned} \right\} \theta_{P-3} = \frac{\theta'_{P-3} + \theta''_{P-3}}{2}$$

- cu teorema sinusului se calculează lungimile laturilor triunghiurilor, adică  $r_1, r_2, r_3$ :

$$\frac{d_1}{\sin \gamma_1} = \frac{r_1}{\sin \beta_1} = \frac{r_2}{\sin \alpha_1} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{d_1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \beta_1 \\ r_2 = \frac{d_1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \alpha_1 \end{cases}$$

și:

$$\frac{d_2}{\sin \gamma_2} = \frac{r_2}{\sin \beta_2} = \frac{r_3}{\sin \alpha_2} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{d_2}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \beta_2 \\ r_3 = \frac{d_2}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \alpha_2 \end{cases}$$

- se calculează coordonatele punctelor 1, 2, 3 prin radiere din  $P'(X, Y)$ ;

- ca verificare trebuie să găsim din coordonatele calculate aceleași distanțe  $d_1$  și  $d_2$ .

Coordonatele punctelor 1, 2, 3, transmise la sol se mai pot calcula și prin drumuire plecând din punctul  $P'$ , pe traseul  $P'-1-2-3-P'$  în care, în prealabil s-au transmis orientările  $\theta_{P'-1}, \theta_{1-2}, \theta_{2-3}, \theta_{3-P'}$  făcându-se compensarea respectivă pe orientări și pe coordonate.

Punctelor 1, 2, 3 li se pot determina și cotele prin nivelment geometric, de la un reper de nivelment sau prin nivelment trigonometric din punctul  $P$  în funcție de altitudinea punctului  $P$ , de unghiurile verticale și de distanțele respective.

b) Transmiterea la sol a punctelor de triangulație și îndesire (puncte nestaționabile)

Este cazul crucilor de la biserici sau a coșurilor de fum. De la sol trebuie să se vadă punctul  $P$  și cel puțin unul sau două puncte de triangulație (fig.1).

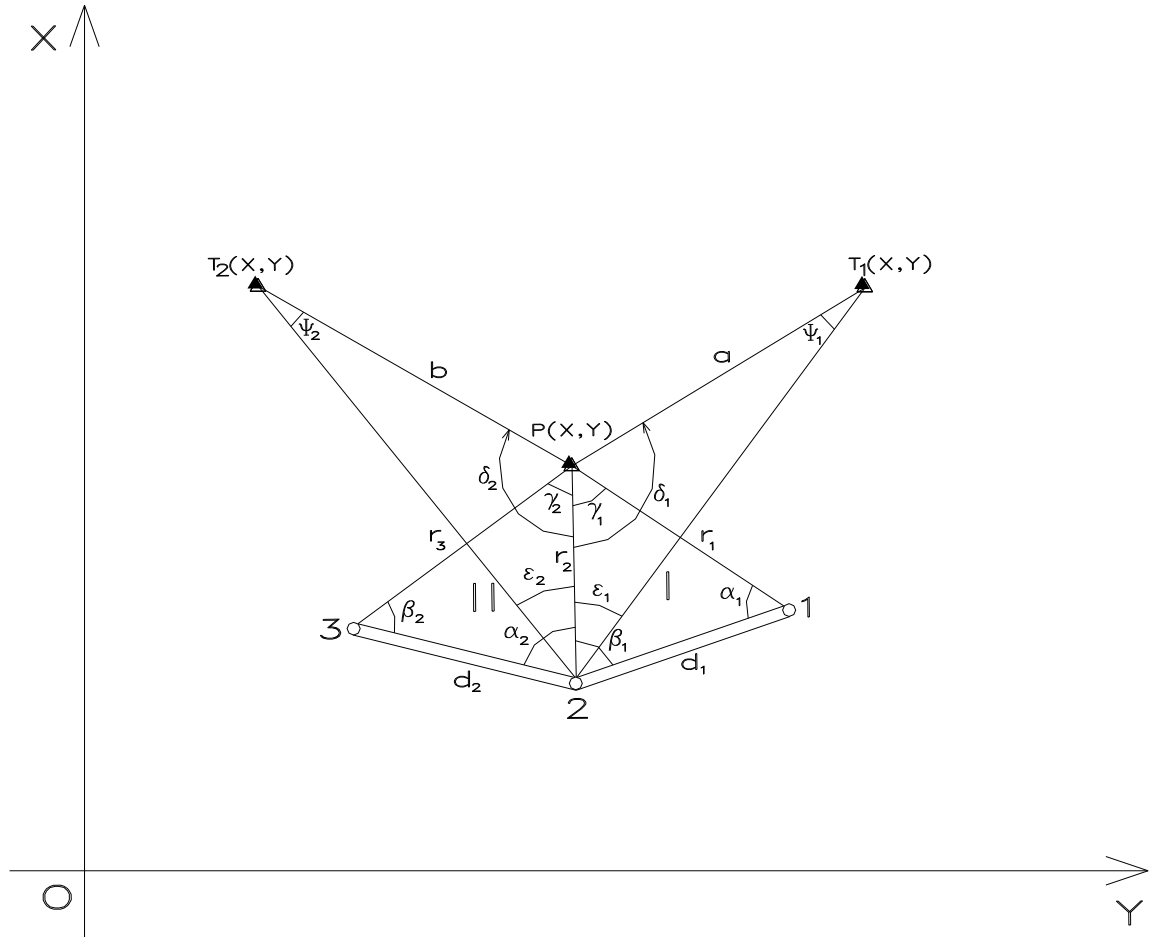


Fig.1 Transmiterea la sol a punctelor de triangulație și îndesire (puncte nestaționabile)

Se dau punctele  $P(X, Y)$ ,  $T_1(X, Y)$  și  $T_2(X, Y)$ .

Se măsoară pe teren bazele  $d_1$  și  $d_2$  și unghiurile horizontale  $(\alpha_1, \beta_1, \epsilon_1)$  și  $(\alpha_2, \beta_2, \epsilon_2)$ .

Se cer coordonatele punctelor la sol  $1(X_1, Y_1)$ ,  $2(X_2, Y_2)$ ,  $3(X_3, Y_3)$ .

Operații de birou:

- se calculează unghiurile  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= 200^G - (\alpha_1 + \beta_1) \\ \gamma_2 &= 200^G - (\alpha_2 + \beta_2) \end{aligned} \right\}$$

- se calculează laturile triunghiurilor:

$$\left. \frac{d_1}{\sin \gamma_1} = \frac{r_1}{\sin \beta_1} = \frac{r_2}{\sin \alpha_1} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{d_1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \beta_1 \\ r_2 = \frac{d_1}{\sin \gamma_1} \cdot \sin \alpha_1 \end{cases}$$

$$\left. \frac{d_2}{\sin \gamma_2} = \frac{r_2}{\sin \beta_2} = \frac{r_3}{\sin \alpha_2} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{d_2}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \beta_2 \\ r_3 = \frac{d_2}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Pentru latura  $r_2$  se va lua media.

- se calculează orientările  $\theta_{P-T_1}$  și  $\theta_{P-T_2}$  din coordonate;
- se calculează distanțele  $a, b$  din coordonate astfel:

$$\begin{cases} a = \frac{Y_{T_1} - Y_P}{\sin \theta_{P-T_1}} = \frac{X_{T_1} - X_P}{\cos \theta_{P-T_1}} \\ b = \frac{Y_{T_2} - Y_P}{\sin \theta_{P-T_2}} = \frac{X_{T_2} - X_P}{\cos \theta_{P-T_2}} \end{cases}$$

- se calculează unghiurile  $\Psi_1$  și  $\Psi_2$  astfel:

$$\begin{cases} \frac{r_2}{\sin \Psi_1} = \frac{a}{\sin \varepsilon_1} \Rightarrow \sin \Psi_1 = \frac{r_2 \sin \varepsilon_1}{a} \\ \frac{r_2}{\sin \Psi_2} = \frac{b}{\sin \varepsilon_2} \Rightarrow \sin \Psi_2 = \frac{r_2 \sin \varepsilon_2}{b} \end{cases}$$

- se calculează unghiurile  $\delta_1$  și  $\delta_2$  astfel:

$$\begin{cases} \delta_1 = 200^G - (\varepsilon_1 + \Psi_1) \\ \delta_2 = 200^G - (\varepsilon_2 + \Psi_2) \end{cases}$$

- se calculează orientarea laturii  $r_2$  astfel:

$$\left. \begin{cases} \theta_{P-2}' = \theta_{P-T_1} + \delta_1 \\ \theta_{P-2}'' = \theta_{P-T_2} - \delta_2 \end{cases} \right\} \Rightarrow \theta_{P-2} = \frac{\theta' + \theta''}{2}$$

apoi:

$$\begin{cases} \theta_{P-1} = \theta_{P-2} - \gamma_1 \\ \theta_{P-3} = \theta_{P-2} + \gamma_2 \end{cases}$$

- se calculează coordonatele punctelor 1, 2, 3 ca radieri sau printr-o drumuire.

### Transcalcularea coordonatelor punctelor unei triangulații locale

Operația de încadrare într-o triangulație generală (geodezică) a unui număr oarecare de puncte determinate într-un sistem local de referință sau într-un alt sistem geodezic, se numește transcalculare.

Această problemă are două aspecte și anume:

- Geodezic – atunci când este vorba de puncte mult depărtate între ele și în al căror calcul s-a ținut seama de forma elipsoidă a Pământului → acesta este cazul triangulației geodezice. Transcalcularea triangulațiilor geodezice apare atunci când se schimbă sistemul de proiecție sau atunci când poziția unor puncte trebuie cunoscută și în alt sistem (transcalcularea dintr-un fus sau altul etc.).

- Topografic – atunci când este vorba de puncte în a căror determinare nu s-a ținut seama de curbura Pământului. Este cazul punctelor de triangulație determinate într-un sistem topografic local. Sistemul de axe rectangulare pentru o lucrare topografică locală, diferă de sistemul de axe rectangulare al unui sistem geodezic, atât în ce privește centrul de proiecție și originea axelor rectangulare, cât și în ceea ce privește orientarea lor.

Unghiul pe care-l fac între ele axele de același nume ale celor două sisteme de proiecție, crește cu latitudinea celor două origini. Acesta este tocmai unghiul la pol al meridianelor celor două origini. Acesta este tocmai unghiul la pol al meridianelor celor două origini, cunoscut sub denumirea de convergență meridiană.

Să notăm cu  $X, O, Y$  sistemul general (geodezic) de coordonate și cu  $x, o, y$  sistemul local de coordonate (fig.2).

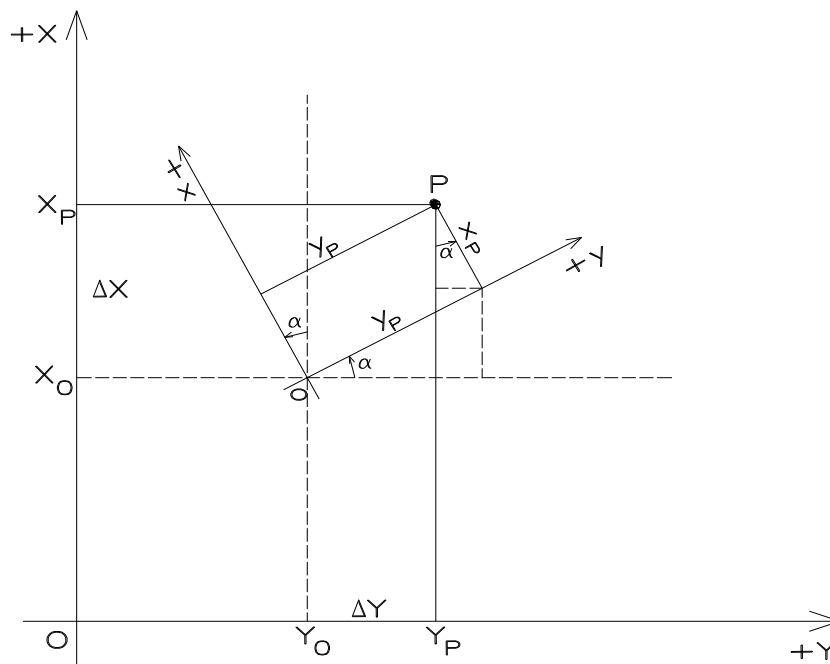


Fig.2

Notăm cu  $X, Y$  coordonatele punctelor în sistemul general și cu  $x, y$  coordonatele punctelor în sistem local.

Notăm unghiul de rotație a celor două sisteme cu  $\alpha$ .

Considerăm un punct  $P$  care are coordonatele  $x_p$  și  $y_p$  în sistem local și coordonatele  $X_p$  și  $Y_p$  în sistemul geodezic.

Între coordonatele punctului  $P$  din sistemul local  $x, y$  și din sistemul geodezic  $X, Y$  există relațiile:

$$X_p = X_0 + \Delta X = X_0 + x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$Y_p = Y_0 + \Delta Y = Y_0 + y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Sau, în general:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_0 + x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha \\ Y_i &= Y_0 + y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

### Transcalcularea punctelor din sistemul local în sistemul geodezic (procedeul clasic)

Transcalcularea presupune următoarele faze de operații de teren și de birou:

a) Se determină prin operațiuni de teren și birou un număr de puncte din triangulație locală, în sistemul geodezic

un număr de puncte vor avea coordonate duble (în sistem local și în sistem geodezic) (fig.1).

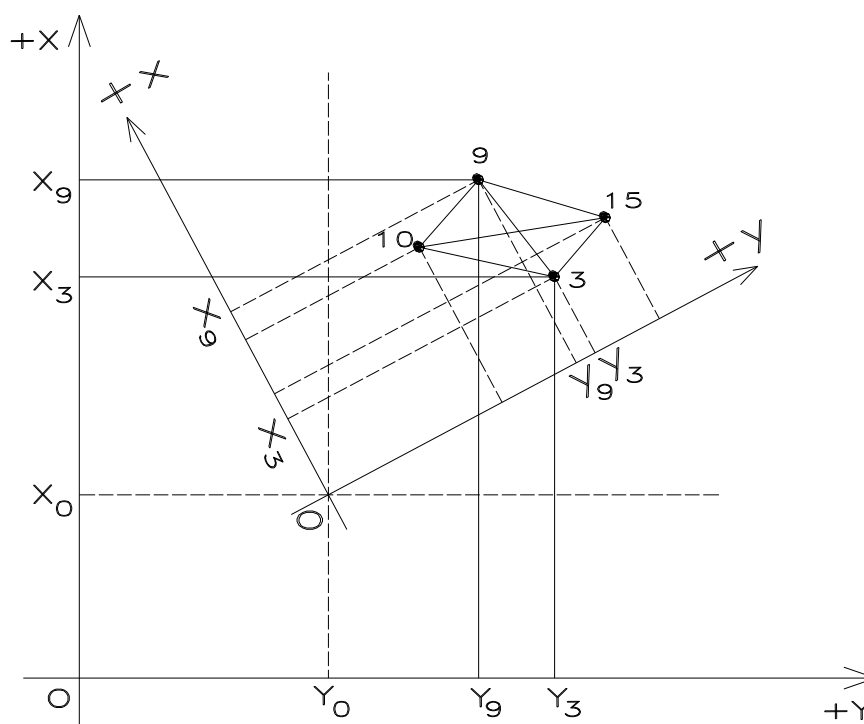


Fig.1

Punctele 3, 10, 9, 15 au coordonate determinate în ambele sisteme.

b) Se calculează unghiul mediu de rotație a axelor (fig.2)

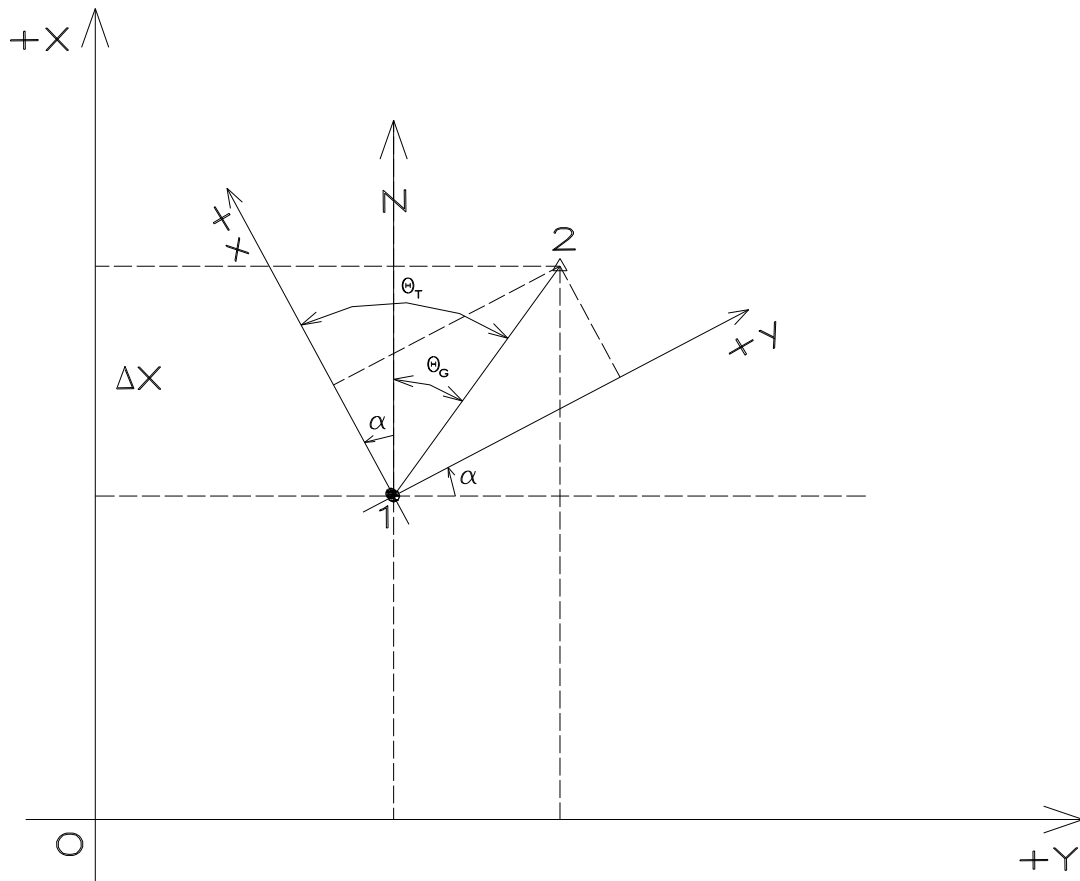


Fig.2

În cazul a două puncte 1 și 2:

$$\theta_{Geodezic} = \arctg \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \arctg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \quad (1)$$

$$\theta_{Topografic} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \arctg \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

Unghiul de rotație al axelor va fi:

$$\alpha = \theta_T - \theta_G \quad (3)$$

În cazul a mai multor puncte de coordonate duble avem:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{T(10-9)} - \theta_{G(10-9)} &= \alpha' \\ \theta_{T(9-15)} - \theta_{G(9-15)} &= \alpha'' \\ \theta_{T(15-3)} - \theta_{G(15-3)} &= \alpha''' \\ \theta_{T(3-10)} - \theta_{G(3-10)} &= \alpha^{IV} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Se va lua media acestor valori și obținem unghiul mediu de rotație al axelor.

c) Se calculează coeficientul mediu de deformare

Calculând distanța din coordonatele locale a două puncte obținem  $D_{Topografic}$ .

Calculând distanța din coordonatele geodezice ale acelorași puncte obținem  $D_{Geodezic}$ .

Cele două distanțe nu sunt egale, deși pe teren avem aceeași distanță. Acest lucru se datorează faptului că în triangulația locală s-au produs anumite erori, iar la determinarea geodezică a acelorași puncte s-au produs alte erori (s-a lucrat cu precizie diferită) și, de asemenea, se datorează faptului că în triangulația geodezică intervin deformații datorită sistemului de proiecție.

Va trebui să corectăm coordonatele locale în așa fel încât din acestea să deducem distanțe care să fie egale cu cele din coordonatele geodezice.

În topografie, această corectare se face prin calcularea unui coeficient mediu de deformație cu care înmulțim distanțele și coordonatele din sistemul local, să le transpunem în scara distanțelor din sistemul geodezic (punerea în scară).

Acest coeficient are expresia:

$$k = \frac{\text{Distanța din coordonate geodezice}}{\text{Distanța din coordonate topografice}} = \frac{D_G}{D_T} \quad (5)$$

de unde:

$$D_G = D_T \cdot k \quad (6)$$

Se calculează mai mulți coeficienți de deformație, atâția câte distanțe putem calcula:

$$\left. \begin{array}{l} D_{G(10-9)}, D_{T(10-9)}; \quad k' = \frac{D_G}{D_T} \\ D_{G(9-15)}, D_{T(9-15)}; \quad k'' = \frac{D_G}{D_T} \\ D_{G(15-3)}, D_{T(15-3)}; \quad k''' = \frac{D_G}{D_T} \\ D_{G(3-10)}, D_{T(3-10)}; \quad k^{IV} = \frac{D_G}{D_T} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Se calculează un coeficient mediu:

$$k_{mediu} = \frac{\sum_i^n k_i}{n} \quad (8)$$

Pentru a obține, deci, coordonate geodezice, distanțele din planul local se înmulțesc cu  $k_{mediu}$ . Mai concret, coordonatele  $x$  și  $y$  din planul local se înmulțesc cu  $k$  pentru a obține coordonatele  $X, Y$  în sistemul geodezic.

#### d) Calculul coordonatelor geodezice a originii „o” a sistemului local

Pentru a obține coordonatele geodezice trebuie să înmulțim coordonatele locale cu  $k$ .

Astfel, formula generală (A) → (vezi curs precedent), devine:

$$\begin{cases} X_i = X_o + (x_i \cdot k) \cos \alpha + (y_i \cdot k) \sin \alpha \\ Y_i = Y_o + (y_i \cdot k) \cos \alpha - (x_i \cdot k) \sin \alpha \end{cases} \quad (9)$$



de unde:

$$\begin{cases} X_o = X_i - x_i(k \cos \alpha) - y_i(k \sin \alpha) \\ Y_o = Y_i - y_i(k \cos \alpha) + x_i(k \sin \alpha) \end{cases} \quad (10)$$

Formulele (10) arată că pentru fiecare punct cu coordonate duble va corespunde o pereche de coordonate  $X_o, Y_o$  (geodezice) ale originii sistemului local.

Se va lua media pentru aceste coordonate:

$$\begin{cases} X_o = \frac{X_o' + X_o'' + X_o''' + X_o^{IV} + \dots + X_o^n}{n} \\ Y_o = \frac{Y_o' + Y_o'' + Y_o''' + Y_o^{IV} + \dots + Y_o^n}{n} \end{cases} \quad (11)$$

#### e) Calculul coordonatelor geodezice a punctelor din sistemul local

Scriem relațiile generale (9) pentru două puncte din sistemul local (1 și 2):

$$\begin{cases} X_1 = X_o + x_1(k \cos \alpha) + y_1(k \sin \alpha) \\ Y_1 = Y_o + y_1(k \cos \alpha) - x_1(k \sin \alpha) \end{cases} \quad (12)$$

și

$$\begin{cases} X_2 = X_o + x_2(k \cos \alpha) + y_2(k \sin \alpha) \\ Y_2 = Y_o + y_2(k \cos \alpha) - x_2(k \sin \alpha) \end{cases} \quad (13)$$

Pentru a calcula o serie întreagă de puncte „automat” la calculator, din punct în punct, vom transforma aceste relații generale astfel:

- relațiile (12) le înmulțim cu (-1), iar relațiile (13) cu (+1) și le adunăm:

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = X_o - X_o + x_2(k \cos \alpha) - x_1(k \cos \alpha) + y_2(k \sin \alpha) - y_1(k \sin \alpha) \\ Y_2 - Y_1 = Y_o - Y_o + y_2(k \cos \alpha) - y_1(k \cos \alpha) - x_2(k \sin \alpha) + x_1(k \sin \alpha) \end{cases} \quad (14)$$

de unde:

$$\begin{cases} X_2 = X_1 + (x_2 - x_1)k \cos \alpha + (y_2 - y_1)k \sin \alpha \\ Y_2 = Y_1 + (y_2 - y_1)k \cos \alpha - (x_2 - x_1)k \sin \alpha \end{cases} \quad (15)$$

Cu aceste ultime formule se pot calcula în serie, din punct în punct la calculator, coordonatele geodezice a mai multor puncte din sistemul local.

#### f) Calculul simplificat al factorilor „ksin $\alpha$ ” și „kcos $\alpha$ ”

Din relația (15) deducem, ca necunoscute, aceste cantități.

Astfel, din prima ecuație deducem:

$$(X_2 - X_1) - (y_2 - y_1)k \sin \alpha = (x_2 - x_1)k \cos \alpha$$

de unde:

$$k \cos \alpha = \frac{(X_2 - X_1) - (y_2 - y_1)k \sin \alpha}{(x_2 - x_1)} \quad (16)$$

iar din a doua ecuație deducem:

$$(Y_2 - Y_1) + (x_2 - x_1)k \sin \alpha = (y_2 - y_1)k \cos \alpha$$

de unde:

$$k \cos \alpha = \frac{(Y_2 - Y_1) + (x_2 - x_1)k \sin \alpha}{(y_2 - y_1)} \quad (17)$$

Egalăm (16) cu (17) și obținem:

$$\frac{(X_2 - X_1) - (y_2 - y_1)k \sin \alpha}{(x_2 - x_1)} = \frac{(Y_2 - Y_1) + (x_2 - x_1)k \sin \alpha}{(y_2 - y_1)}$$

sau:

$$(X_2 - X_1) \cdot (y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)^2 k \sin \alpha = (Y_2 - Y_1) \cdot (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 k \sin \alpha$$

adică:

$$\Delta X \cdot \delta y - \delta y^2 k \sin \alpha = \Delta Y \cdot \delta x + \delta x^2 k \sin \alpha$$

sau:

$$\Delta X \cdot \delta y - \Delta Y \cdot \delta x = (\delta x^2 + \delta y^2) k \sin \alpha$$

de unde:

$$k \sin \alpha = \frac{\Delta X \cdot \delta y - \Delta Y \cdot \delta x}{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (18)$$

În mod analog, se obține valoarea:

$$k \cos \alpha = \frac{\Delta X \cdot \delta x + \Delta Y \cdot \delta y}{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (19)$$

Pentru fiecare pereche de puncte de coordonate duble obținem valori apropiate pentru  $(k \sin \alpha)$  și  $(k \cos \alpha)$ , iar pentru transcalculare se ia media acestora.

## Rețele locale tridimensionale

### Mărimi geodezice în rețele 3D

Pornind de la problema geodezică principală de determinare a coordonatelor unui punct  $P_i$  referitor la un punct cunoscut  $P_0$ , vom considera două sisteme de coordonate topocentrice care au originea în  $P_0$ .

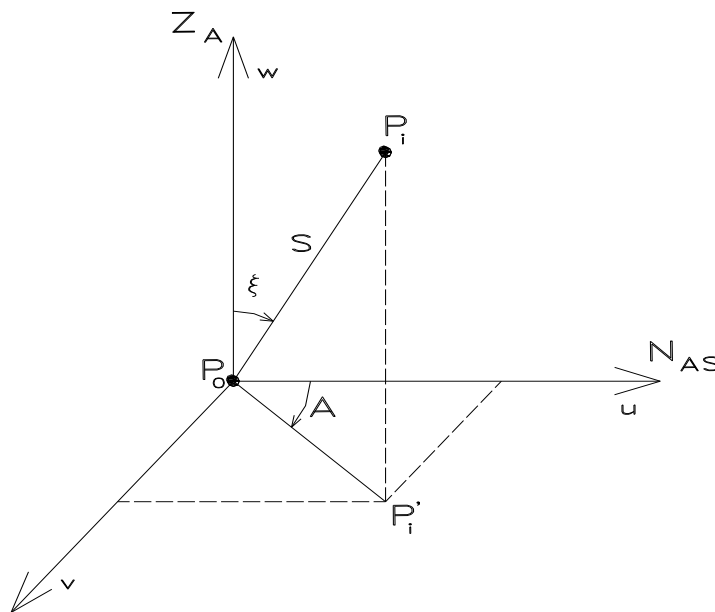


Fig. 1 Sistemul local astronomic

Axa  $u \rightarrow N_{AS}$  - Nordul astronomic;

Axa  $v$  - Perpendiculară pe axa  $u$ ;

Axa  $w$  - Perpendiculară pe planul  $uv$  și indică zenitul astronomic.

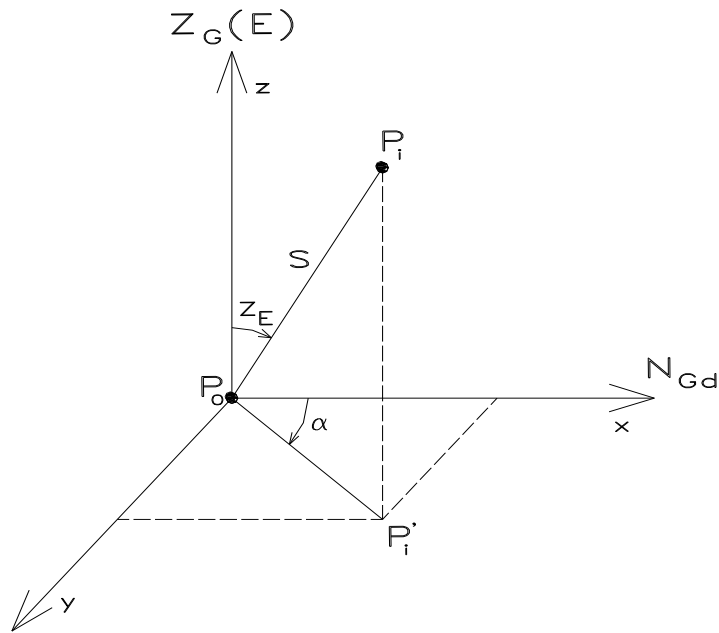


Fig.2 Sistemul elipsoidal

Axa  $x \rightarrow N_{Gg}$  (Nordul geodezic);

Axa  $y$  - Perpendiculară pe  $x \rightarrow$  spre vest;

Axa  $z$  - Perpendiculară pe  $xy \rightarrow$  zenitul geodezic (elipsoidal);

$\alpha$  - azimut geodezic

$Z_{astronomic}$  are sens opus direcției verticalei locului

$Z_{elipsoidal}$  are sens opus normalei la elipsoid

Cele două sisteme se deosebesc după modul în care este definită direcția Nord și Zenitul. Ambele deosebiri pot fi interpretate ca deviații ale verticalei.

În sistemele topocentrice arătate putem defini poziția unui punct  $P_i$  prin coordonatele sale polare.

O explicație a mărimilor introduse poate fi dată în figurile de mai jos:

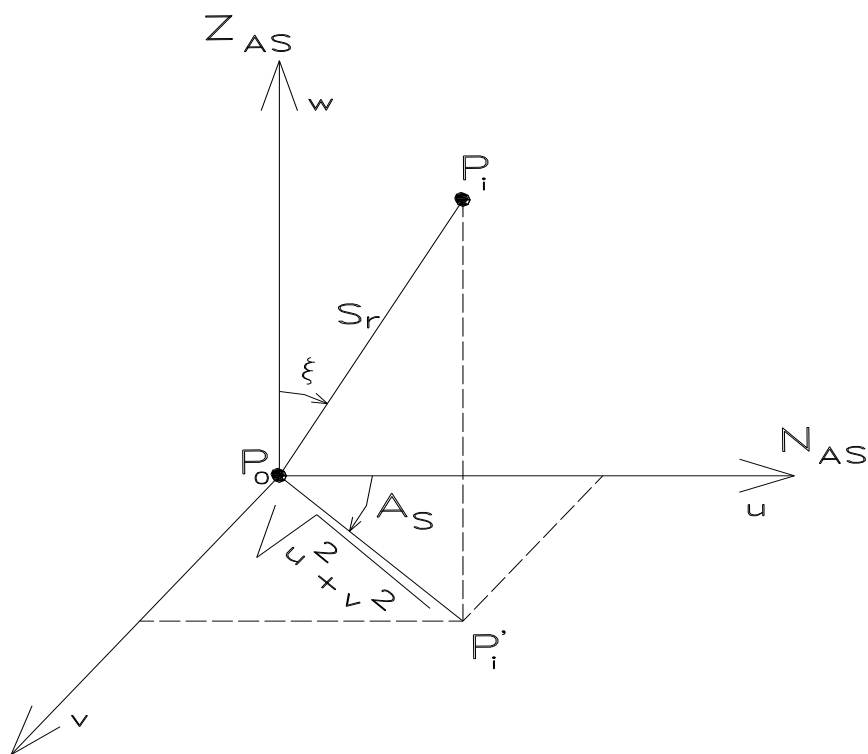


Fig.3 Sistemul topocentric local astronomic

Sistemul topocentric local astronomic este sistemul în care executăm măsurătorile curente (este singurul sistem care are mărimi definite fizic). În calcule, acest sistem nu poate fi folosit, ci un sistem cu suprafețe matematice (de exemplu, sistemul elipsoidal).

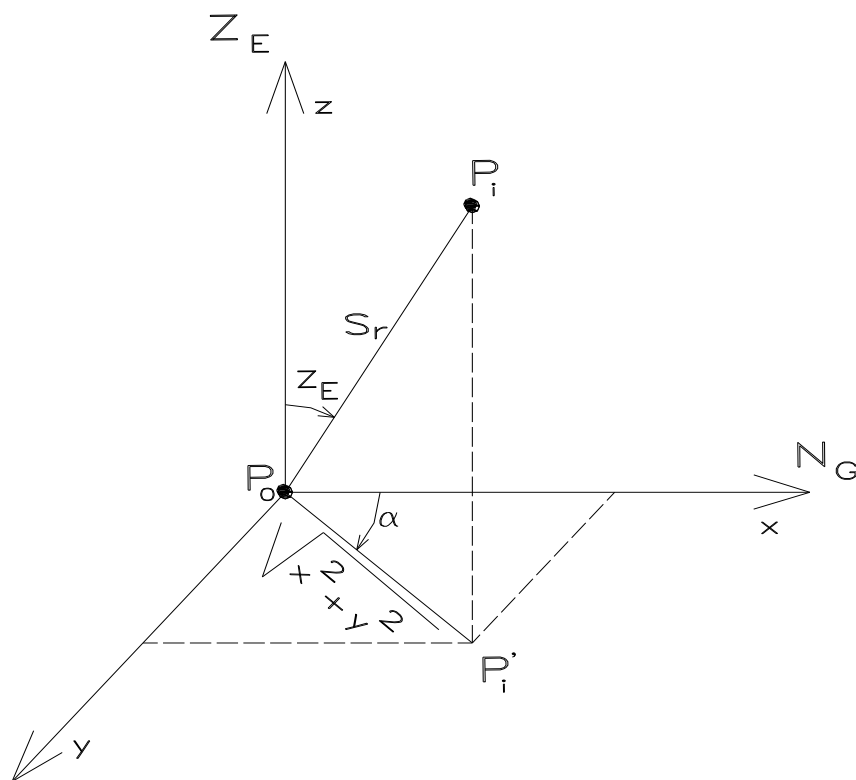


Fig.4 Sistemul topocentric local elipsoidal

$S_r$  - lungime redusă;

$\alpha$  - azimut pe elipsoid.

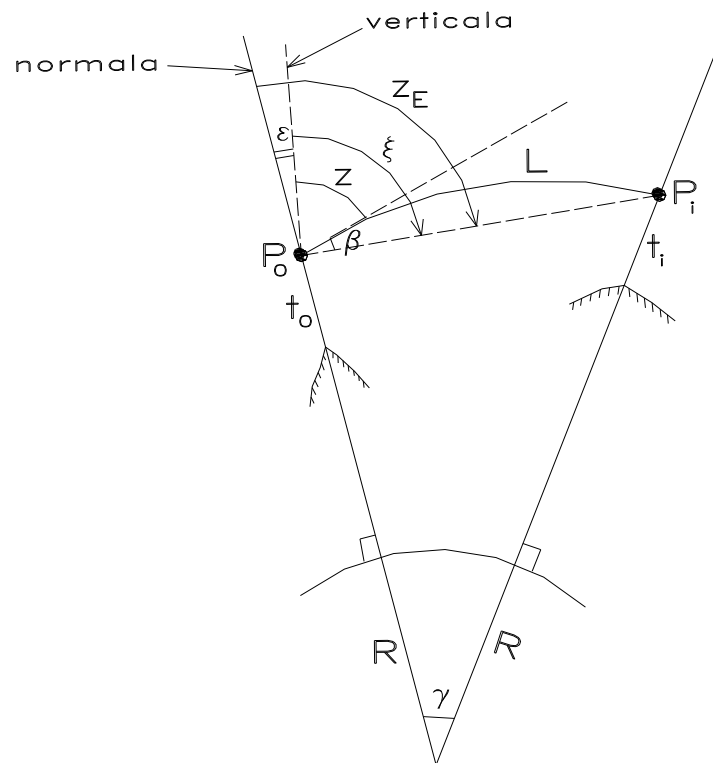


Fig.5 Deviația verticalei

$\varepsilon$  - unghiul de deviație a verticalei;

$z$  - unghiul zenital pe care-l măsurăm efectiv în teren;

$\beta$  - unghiul de refracție;

$$\xi = z + \beta;$$

$z_E \rightarrow$  unghi zenital astronomic

Toate măsurătorile în teren se fac în sistem astronomic fiindcă numai acesta este definit pe baze fizice și poate fi realizat în realitate.

O prelucrare practică a măsurătorilor într-o rețea geodezică este posibilă numai într-un sistem de referință simplu cum este cel elipsoidal. Trebuie deci, să determinăm într-o primă etapă diferențele unghiulare între sistemul astronomic și sistemul topocentric elipsoidal și după aceea să transformăm elementele măsurate.