Universitatea “Politehnica” din Timişoara
Facultatea de Construcţii
Specializarea: Măsurători Terestre şi Cadastru
Anul: III
Curs: Cartografie 1

Cursul nr. 1
Noţiuni generale de cartografie matematică

1.1 Introducere

Obiectul de studiu al cartografiei îl constituie pe de o parte reprezentarea suprafeţei curbe a Pământului pe o suprafaţă plană (harta), iar pe de altă parte modalităţile de utilizare a hărţilor în diferite scopuri ştiinţifice şi practice.

Cartografia este ştiinţa care se ocupă cu studiul hărţilor privind conţinutul, metodele şi procesele tehnologice de redactare, întocmire şi reproducere în tiraj.

La începuturile sale, cartografia făcea parte integrală din geografie, deoarece aceasta se ocupa nu numai cu descrierea suprafeţei Pământului, ci şi cu reprezentarea ei în plan. Cu timpul a devenit o ştiinţă aparte cu mai multe ramuri:

- *cartografia matematică* - studiază baza matematică a hărţilor. Prin intermediul cartografiei matematice se stabilesc relaţiile funcţionale între coordonatele punctelor de pe suprafaţa terestră şi coordonatele punctelor corespunzătoare din plan sau hartă;
- *cartologia* – se ocupă cu studiul metodelor de reprezentare a elementelor de pe suprafaţa terestră pe hărţi;
- *întocmirea hărţilor* – este ramura care studiază metodele necesare pentru confecţionarea originalului hărţii;
- *editarea hărţilor* – studiază metodele şi procedeele tehnice de editare a originalului hărţii şi de multiplicarea acestuia;
- *cartometria* – se ocupă cu studiul instrumentelor şi metodelor necesare diferitelor măsurători ce se pot efectua pe planuri şi hărţi.

Reprezentarea în plan a unei porţiuni din suprafaţa terestră se efectuează prin alegerea unui sistem de proiecţie adecvat scopului şi destinaţiei hărţii sau planului topografic ce urmează a se întocmi.

Realizarea acestor lucruri necesită executarea unor măsurători terestre, lucru care aduce la interdisciplinarea ei cu alte ştiinţe cum ar fi:

- *geodezia* – ştiinţa ce se ocupă cu studiul formei şi dimensiunii Pământului;
- *topografia* – o ramură a geodeziei care se ocupă cu studiul măsurătorilor terestre;
- *ştiinţele matematice* – matematica şi fizica.

Proiectarea unei hărţi necesită cunoaşterea unor elemente specifice proiecţiilor şi anume:

- ➢ *planul de proiecţie* – reprezintă suprafaţa pe care se face proiectarea unei porţiuni de teren pe elipsoidul de referinţă. Aceste planuri sunt suprafeţe plane tangente sau secante la suprafaţa de reprezentat sau sunt suprafeţe desfăşurabile, în cazul cilindrului şi conului;
- ➢ *punctul central al proiecţiei* – este punctul care se află în centrul suprafeţei de reprezentat. Acest punct poate să fie materializat pe teren şi determinat prin măsurători geodezice sau poate să fie fictiv;
- ➢ *reţeaua geografică* – este constituită dintr-un ansamblu de paralele şi meridiane;
- ➢ *reţeaua cartografică* – este reţeaua formată din linii curbe sau drepte, rezultate din proiecţia în plan a meridianelor şi paralelelor. Cu ajutorul acestei reţele se pot efectua diferite măsurători pe hartă, se pot determina coordonatele geografice ale unor puncte geodezice;

➢ *reţeaua (kilometrică) rectangulară* – este formată din linii drepte şi paralele cu sistemul de axe rectangulare din proiecţia aleasă.

Utilizând măsurătorile terestre, cartografia reprezintă în plan elementele suprafeţei terestre pentru ca în final să rezulte harta utilizată în majoritatea cercetărilor topografice, geografice şi geologice.

1.2 Parametrii de bază ai elipsoidului de rotaţie

Elipsoidul pământesc a fost considerat ca un elipsoid de rotaţie a cărei suprafaţă rezultă prin rotaţia unei elipse în jurul axei mici a acesteia, care se presupune că este comună cu axa PP' a Pământului.

Ecuaţia elipsoidului de rotaţie în coordonate rectangulare, raportată la centrul său este de forma:

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1$$

unde axa z coincide cu axa de rotaţie

Pentru determinarea unui elipsoid este suficient să cunoaştem elementele elipsei meridiane prin rotirea căreia s-a format elipsoidul.

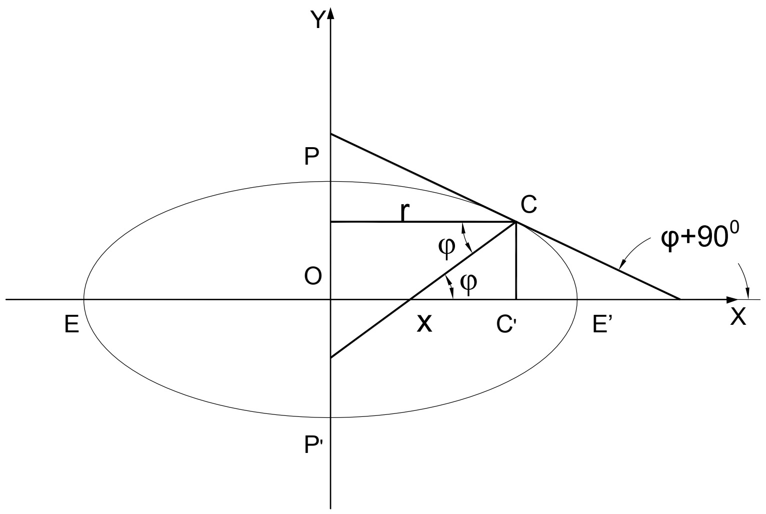


Fig.1.1. Elipsa meridiană raportată la un sistem de axe de coordonate carteziene xOy

Ecuaţia elipsei meridiane este :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

unde : - a este semiaxa mare a elipsoidului (ecuatorială)
- b este semiaxa mică a elipsoidului (polară)

Alţi parametrii care definesc elipsa meridiană sunt:

$\alpha = \frac{a-b}{a}$ - turtirea elipsoidului

$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ - prima excentricitate a elipsei meridiane

$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1$ - a doua excentricitate a elipsei meridiane

Pentru determinarea elipsei meridiane este necesar să se cunoască doar doi dintre cei cinci parametrii, iar unul dintre ei trebuie să fie liniar.

Legătura dintre coordonatele X,Y ,Z şi x, y este dată de relaţiile:

$X = x\cos\lambda$

$Y = x\sin\lambda$

$Z = z$

Pentru diferiţi elipsoizi de referinţă utilizaţi în România sunt date în tabelul de mai jos valorile parametrilor a şi α:

Tabelul 1.1

Elipsoidul de referinţă	Anul determinării	Semiaxa mare a[m]	Turtirea α	Perioada de utilizare în România
Bessel	1841	6377397.115	1:299.1528	1873-1916
Clarke	1881	6378243.000	1:293.5	1916-1930
Hayford	1909	6378388.000	1:297.0	1930-1951
Krasovski	1940	6378245.000	1:298.3	1951 -prezent
WGS-84	1984	6378137.000	1:298.257223563	

Parametri elipsoidului Krasovski 1940:

a = 6378245.00000w 6 = 6356863.01877

α = 1/298.3 = 0.003352329869

e^2 =0.006693421623 e'^2 =0.006738525415

1.3 Coordonatele hărţilor

Pe hărţile topografice găsim două sisteme de coordonate, un sistem rectangular şi un sistem de coordonate geografice.

Coordonatele geografice sunt latitudinea şi longitudinea.

Latitudinea (φ) este unghiul format de normala dusă în punctul dat, cu planul ecuatorului şi se măsoară de la ecuator spre nord având valori pozitive sau spre sud având valori negative. La ecuator avem $\varphi = 0^0$, iar la poli $\varphi = \pm 90^0$.

Longitudinea (λ) este unghiul diedru format de planul ce trece prin meridianul punctului dat. Longitudinea se măsoară de la meridianul origine spre est având valori pozitive sau spre vest având valori negative.

Pe plan internaţional se consideră ca meridian origine, meridianul Greenwich.

Latitudinea şi longitudinea determină poziţia unui punct pe suprafaţa elipsoidului sau sferei.

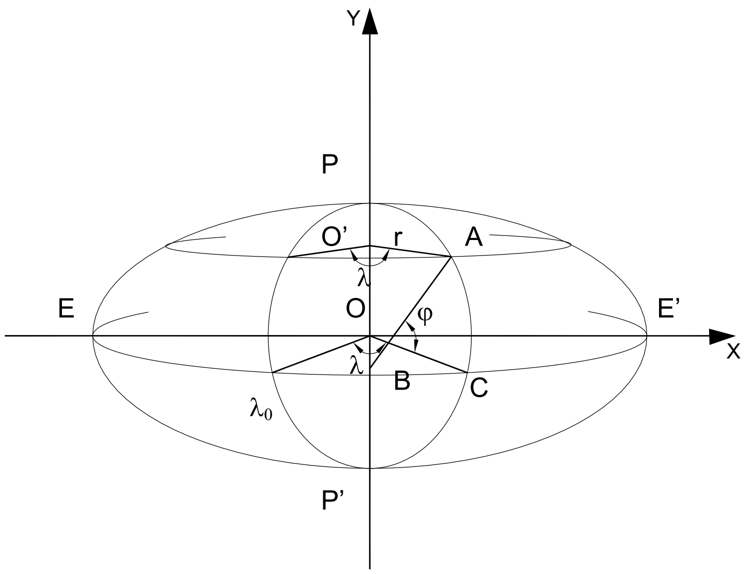


Fig. 1.2. Coordonate geografice pe elipsoid (φ,λ)

Colatitudinea (ψ) este complementul latitudinii. Se defineşte ca fiind unghiul format de axa polilor cu verticala locului în punctul considerat.Valoarea ei se calculeaza în funcţie de latitudine $\psi = 90° - \varphi$.
Sistemului de coordonate geografice (φ,λ) i se asociază o reţea de linii de coordonate formată dintr-o familie de paralele obţinute pentru φ = const. şi o familie de meridiane pentru
λ= const.
Pe elipsoid, **paralelele** sunt cercuri ale căror plane sunt perpendiculare pe axa polilor PP', iar **meridianele** sunt jumătăţi de elipsă care trec prin polii P şi P'.

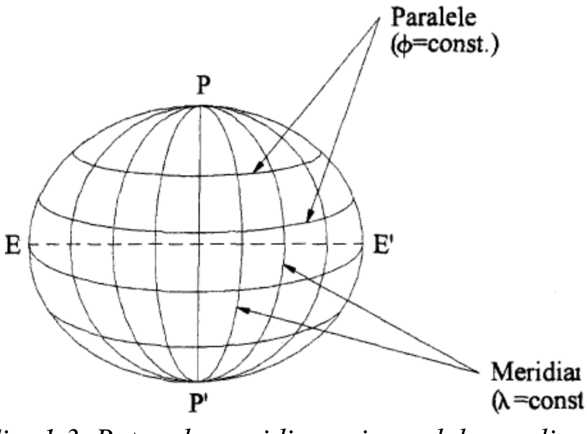


Fig. 1.3. Reţea de meridiane şi paralele pe elipsoid

Coordonatele rectangulare sunt valori ce stabilesc poziţiile pe hartă ale unor detalii din teren. Aceste coordonate se notează cu X şi Y şi reprezintă depărtarea punctului dat faţă de un sistem de axe. Axa XX' se numeşte abcisă, iar YY' se numeşte ordonată; punctul de intersecţie O se numeşte originea sistemului de coordonate.

În topografie axa abciselor coincide cu linia meridianului care trece prin punctul de origine al sistemului, iar drept direcţie a acestei axe se ia direcţia nord.

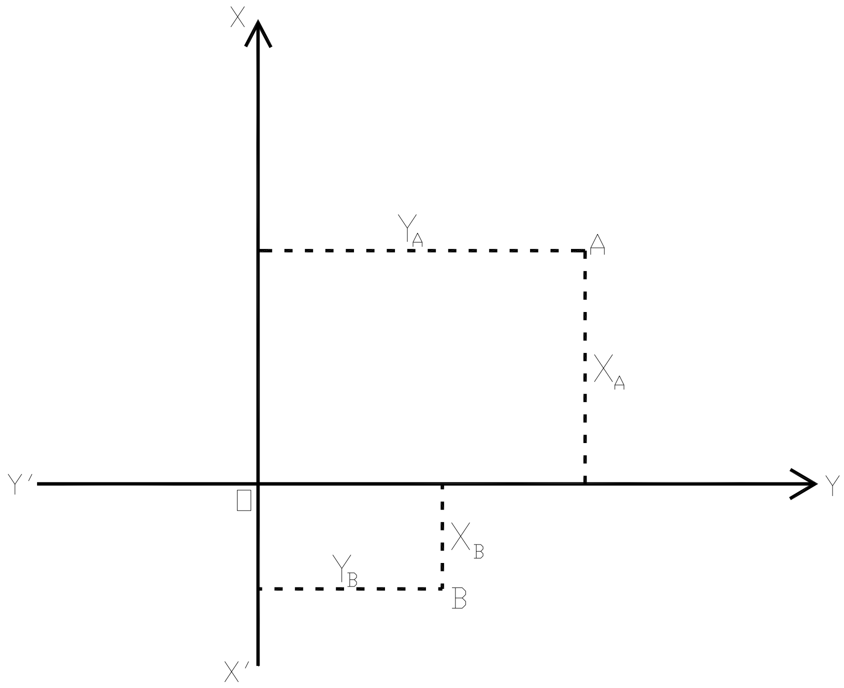


Fig. 1.4. Coordonate rectangulare

Pe hărţilr topografice coordonatele rectangulare ale oricărui punct pot fi determinate cu ajutorul reţelei kilometrice.

Cursul nr.2
SISTEME DE COORDONATE

1.4. Sisteme de coordonate utilizate pe sferă

Sfera este corpul mărginit de o suprafaţă curbă închisă ale cărei puncte sunt egal depărtate de un punct interior numit centru.
Zona sferică este porţiunea din suprafaţa sferei cuprinsă între două secţiuni plane.
Calota sferică este partea din suprafaţa sferei rezultată din intersecţia unui plan cu sfera.
Trapezul sferic este porţiunea de pe sfera terestră delimitată de două meridiane şi două paralele.
Fusul sferic este porţiunea de pe sfera terestră cuprinsă între două meridiane.

1.4.1 Coordonate geografice

Există situaţii, în cartografia matematică, când suprafaţa terestră este considerată sferă de rază R. Această variantă presupune utilizarea unor formule de calcul simplificate deoarece suprafaţa sferei este mai simplă decât cea a elipsoidului.

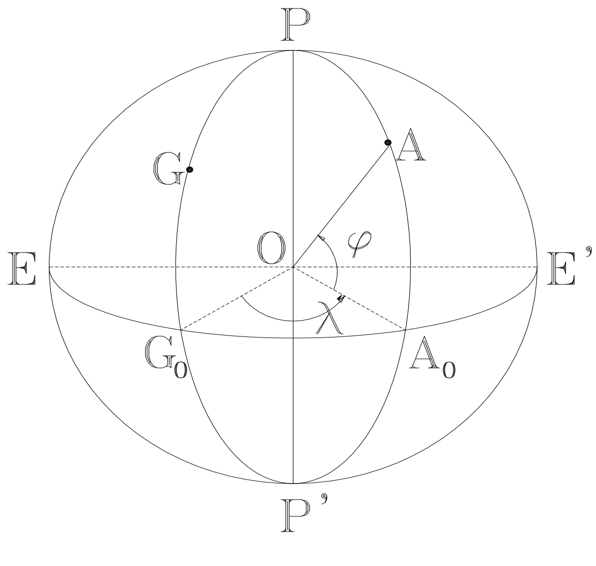


Fig.1.5 Coordonate geografice pe sferă

Latitudinea φ este unghiul format de normala AA' la sferă în punctul dat cu planul ecuatorului.

Latitudinea se măsoară de la ecuator spre nord sau spre sud şi ia valori cuprinse între [-90^0, $+90^0$]. Pentru emisfera sudică valorile latitudinilor sunt cuprinse în intervalul [-90^0, 0^0], iar pentru emisfera nordică între [0^0, $+90^0$]. La polul nord (PN) latitudinea are valoarea $\varphi = +90^0$, la Ecuator $\varphi = 0^0$ iar la polul sud (PS) $\varphi = -90^0$.

Longitudinea λ este unghiul diedru format de planul ce trece prin meridianul origine cu planul ce trece prin meridianul punctului dat.

Ca meridian origine ales în accepţiune internaţională se foloseşte meridianul Greenwich. Longitudinile se măsoară de la meridianul origine spre vest şi spre est şi au valori cuprinse în intervalul [-180^0, $+180^0$]. Pentru partea vestică valorile sunt cuprinse în intervalul [-180^0,0^0] iar pentru partea estică între [0^0, $+180^0$].
Sistemului de coordonate geografice i se asociază o reţea de linii de coordonate formată dintr-o familie de paralele obţinute pentru φ = const. şi o familie de meridiane pentru λ = const.

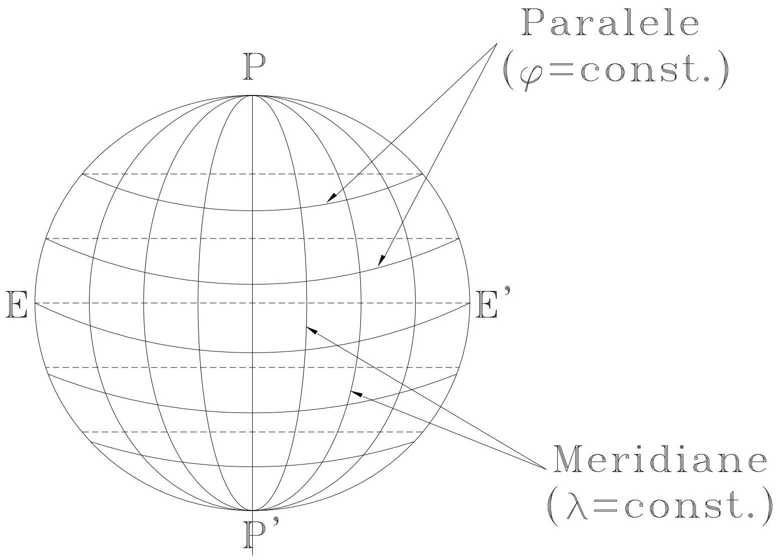


Fig.1.6 Reţeaua de meridiane şi paralele pe sferă

1.4.2 Coordonate sferice polare

Dacă se consideră punctul Q de coordonate φ_0 şi λ_0 ca pol al sistemului de coordonate sferice, poziţia unui punct oarecare de pe suprafaţa sferei se determină cu ajutorul ***distanţei zenitale z*** si a *unghiului azimutal A.*
În cazul suprafeţei sferice a Pământului meridianele şi paralelele sunt înlocuite de verticaluri şi almucantarate.
În acest caz meridianelor le vor corespunde cercuri mari de pe suprafaţa sferei. Planele corespunzătore acestora nu vor trece prin diametrul ce reprezintă axa polilor ci printr-un alt diametru. Aceste cercuri şi corespondentele lor de pe hartă se numesc ***verticaluri.***
Paralelelor le corespund cercuri mici iar planele lor sunt perpendiculare pe diametrul corespunzător verticalurilor. Aceste cercuri şi corespondentele lor de pe hartă se numesc ***almucantarate***.
Verticalurile şi almucantaratele sunt linii de coordonate ale sistemelor de coordonate sferice polare.

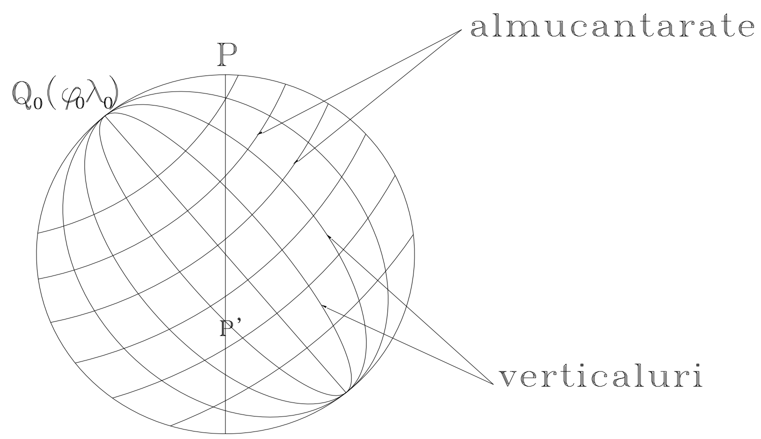


Fig. 1.7 Reţeaua de verticaluri şi almucantarate pe sferă

Poziţia unui punct de pe suprafaţa Pământului e determinată dacă se cunosc coordonatele geografice φ şi λ.
Poziţia aceluiaşi punct poate fi determinată şi cu ajutorul altor elemente: distanţa zenitală şi unghiul azimutal.

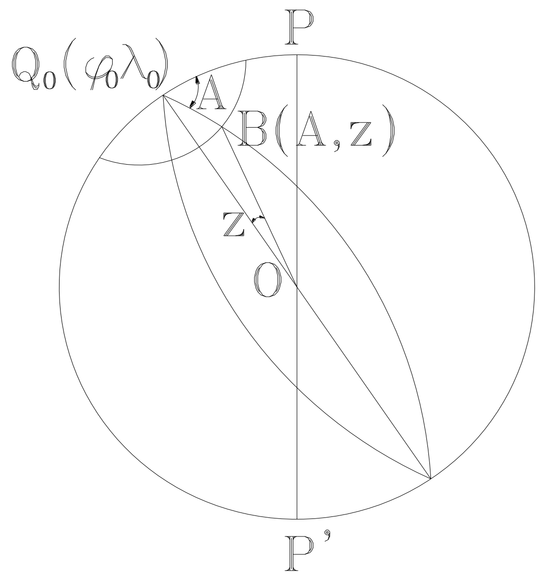


Fig. 1.8 Coordonate sferice polare

Unghiul azimutul (azimutul) *A este este unghiul format de meridianul polului Q_0 şi cercul mare care trece prin punctele Q_0 şi B.*
Azimutul variază de la 0° la 360°.

Distanţa zenitală *z este mărimea in grade a arcului de cerc mare Q_0 B, sau este egală cu mărimea unghiului cu vârful in centrul sferei făcut de razele care trec prin punctele Q_0 şi B.*
Distanţa zenitală variază de la 0° la 180°.
În funcţie de valoarea φ_o a polului Q_0 al proiecţiei, se obţin trei tipuri de sisteme de coordonate sferice polare:
- $\varphi_o=\pm 90^o$ polul Q_0 corespunde cu unul din polii geografici şi se va obţine un sistem de coordonate normale;

- φ_o=0 ne aflăm pe ecuator, polul Q_0 se va afla pe un punct oarecare de pe ecuator şi se va obţine un sistem de coordonate transversal;
- φ_o=0-90° Q_0 se află între ecuator şi pol şi se va obţine un sistem de coordonate oblic.

1.5 Raze de curbură ale elipsoidului terestru. lungimi de arce de meridian şi paralel

1.5.1 Raze de curbura ale elipsoidului terestru

Prin orice punct de pe elipsoid se pot duce mai multe plane secante. Toate se numesc secţiuni normale. În cartografie se folosesc razele de curbură ale secţiunilor normale.
Fie M raza de curbură a elipsei meridiane într-un punct A de latitudine φ .

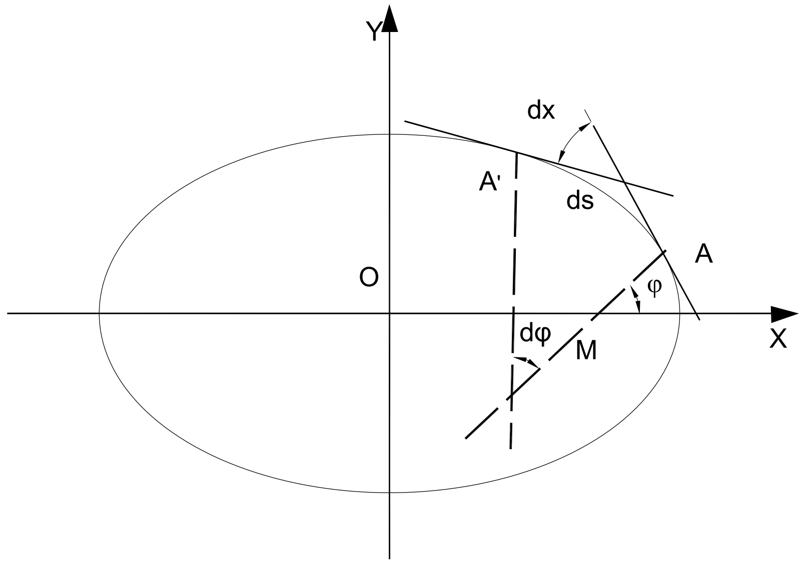


Fig.1.12

În funcţie de elementele elipsoidului şi de latitudinea punctului A considerat, raza de curbură M se calculează cu formula:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$$

unde $w = \sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}$

Se consideră normala AB la elipsoid în punctul A. Fie paralelul ce trece prin punctul A, care are împreună cu secţiunea primului vertical o tangentă comună pe care o notăm cu T. Raza de curbură a paralelului ce trece prin punctul A este dată de relaţia :

$$r = N \cos\varphi,$$

unde N este raza de curbură a primului vertical în punctual A,
φ este latitudinea punctului A.

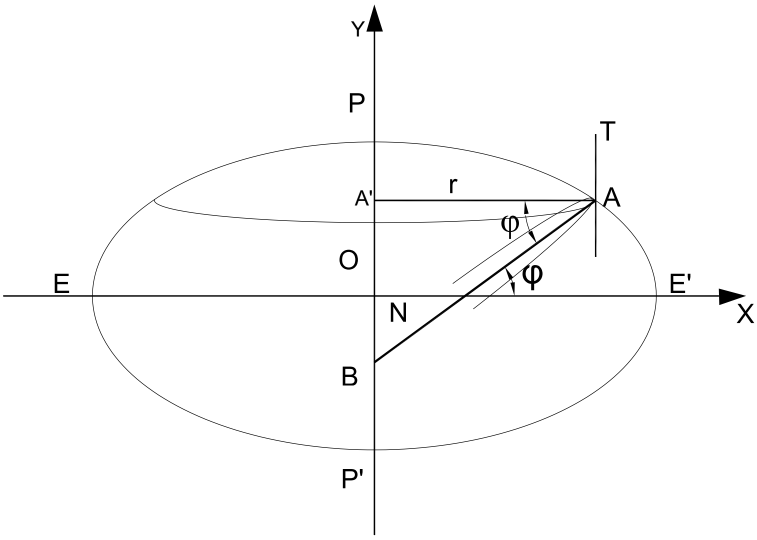


Fig.1.13

Dar $r = x = \dfrac{a\cos\varphi}{w} \Rightarrow N = \dfrac{a}{w}$

Facem raportul $\dfrac{N}{M}$ şi obţinem :

$$\frac{N}{M} = \frac{a}{w} \cdot \frac{w^3}{a(1-e^2)} = \frac{w^2}{1-e^2} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2} = \frac{1-e^2+e^2\cos^2\varphi}{1-e^2} = 1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}$$

Deci $N \geq M$

La poli unde $\varphi = \pm 90^0$ avem $N = M = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}$, iar la ecuator unde $\varphi = 0^0$ rezultă $M = a(1-e^2)$ şi $N = a$.

Raza medie de curbură Gauss se notează cu R şi se determină cu relaţia :

$R = \sqrt{M \cdot N}$

1.5.2 Lungimi de arce de meridian şi paralel

Arce de meridian

Arcul de meridian infinit mic este dat de:

$ds_m = Md\varphi$ 1.18

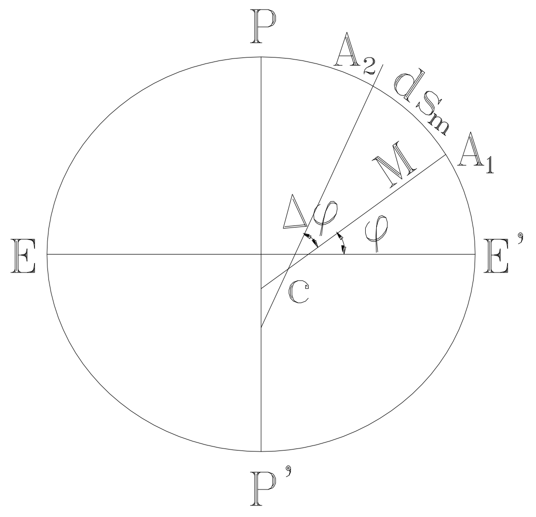


Fig.1.14 Arc de meridian

Arcul de meridian de lungime finită se calculează cu relaţia:
$(s_m)_{\varphi1,\varphi2} = (s_m)_{0,\varphi2} - (s_m)_{0,\varphi1}$ 1.19

unde:
$(s_m)_{\varphi1,\varphi2}$ – arcul de meridian între latitudinile 1 si 2;
$(s_m)_{0,\varphi2}$ – arcul de meridian de la Ecuator la latitudinea φ_1;
$(s_m)_{0,\varphi1}$ – arcul de meridian de la Ecuator la latitudineaφ_2.

Arce de paralel

Lungimea arcului de paralel infinit mic ds_p dintre două puncte se calculează cu relaţia:

$ds_p = rd\lambda$

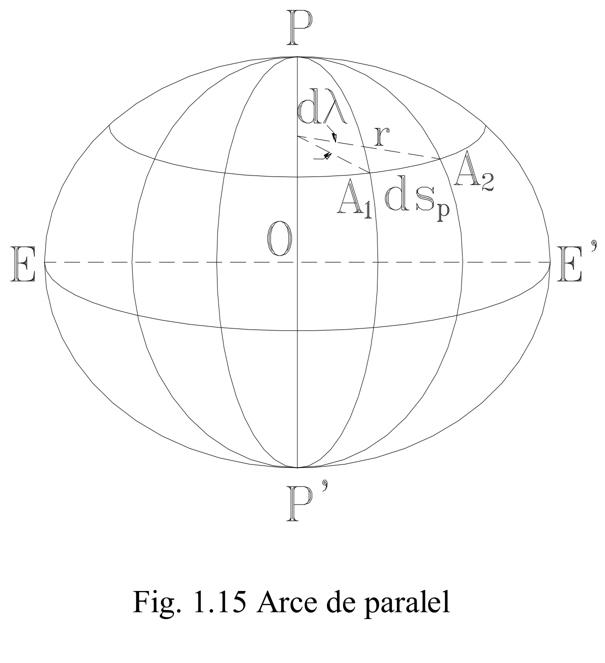


Fig. 1.15 Arce de paralel

Arcul de paralel finit se calculeaza cu relatia:

$(s_P)_{\lambda 1,\lambda 2} = r(\lambda_2 - \lambda_1)^{rad}$

$(s_P)^0_{\lambda 1,\lambda 2} = r(\lambda_2 - \lambda_1)^0/\rho^0$
$(s_P)'_{\lambda 1,\lambda 2} = r(\lambda_2 - \lambda_1)'/\rho'$
$(s_P)''_{\lambda 1,\lambda 2} = r(\lambda_2 - \lambda_1)''/\rho''$

unde:
$\rho^0 = 57^0,29578$
$\rho' = 3\ 437',7468$
$\rho'' = 206\ 264'',806$

Notă
Noţiuni importante:

- *Elipsoidul de referinţă, adică elipsoidul folosit la un moment dat, într-o ţară sau în mai multe ţări, pentru rezolvarea problemelor geodezice este un elipsoid de rotaţie cu turtire mică la poli.*
- *Pentru determinarea unui elipsoid este suficient să cunoaştem elementele elipsei meridiane prin rotirea căreia s-a format elipsoidul.*
- Parametrii care definesc elipsa meridiană sunt:
  - semiaxa mare
  - semiaxa mică
  - turtirea
  - prima excentricitate
  - a doua excentricitate
- Coordonate geografice pe elipsoid
- Coordonate rectangulare
- Coordonate geografice (φ,λ)
- Coordonate sferice polare
- Raze de curbură ale elipsoidului terestru
- Lungimile arcelor de meridian şi de paralel ale elipsoidului

Cursul nr. 3

2 . NOŢIUNI PRIVIND REPREZENTAREA ELIPSOIDULUI ŞI A SFEREI PE PLAN

2.1 Ecuaţiile hărţii

Pentru întocmirea hărţilor, suprafaţa elipsoidului terestru sau a sferei se reprezintă pe plan cu ajutorul proiecţiilor cartografice. Acesată reprezentare se face pe baza reţelei de meridiane şi paralele (sau a altor linii).

Reprezentarea pe plan trebuie să fie continuă sau neîntreruptă, adică oricărui punct A((p,X) de pe suprafaţa elipsoidului sau a sferei, trebuie să-i corespundă în plan un punct A'(x,y), determinat de exemplu în sistemul xOy.

Reprezentarea pe plan a unei porţiuni sau a întregii suprafeţe terestre se exprimă prin *ecuaţiile hărţii:*

$x = f_1(\varphi,\lambda)$ (2.1)

$y = f_2(\varphi,\lambda)$

unde *fi* şi *f2* sunt două funcţii finite şi continue într-un domeniu de variaţie al argumentelor cp şi X. Funcţiile *fi şi f2* pot fi determinate concret din condiţiile puse reprezentării, astfel încât fiecărui sistem de proiecţie îi sunt proprii ecuaţiile hărţii.

La reprezentarea suprafeţei terestre pe plan, în orice proiecţie, liniile, ariile şi unghiurile, în general vor suferi unele modificări, adică se vor deforma. Mărimile deformaţiilor servesc ca indice principal al calităţii proiecţiilor.

2.2 Deformaţii şi scări

2.2. l Scara generală şi scara locală a unei hărţi

Atunci când se reprezintă o suprafaţă mică de teren aceasta poate fi considerată ca fiind plană, în acest caz, întâlnit la topografie, toate porţiunile reprezentării au aceeaşi scară. La reprezentarea suprafeţelor mari de teren pe un plan de proiecţie, unde trebuie să se ţină seama de curbura Pământului, scara nu mai are o valoare constantă, ci variază de la un punct la altul, fiind diferită chiar în acelaşi punct pe diferite direcţii. Astfel există două tipuri de scări şi anume: *scara generală* sau *principală (* care se trece pe hărţi) şi *scara locală* sau *particulară.*

Scara generală, s_0 reprezintă raportul dintre un element liniar de pe elipsoidul pământesc micşorat de "n" ori, *ds şi* corespondentul său de pe elipsoidul neredus, ds_0..

$$s_0 = \frac{ds}{ds_0} = \frac{1}{n} \qquad (2.2)$$

Scara locală, s este raportul dintre un element liniar de pe hartă, *ds'* şi corespondentul său de pe elipsoid ds_o.

$$s = \frac{ds'}{ds_0}$$ (2.3)

Într-un plan de proiecţie, deformaţiile variază de la un punct la altul. Din acest motiv, studiul lor se va face pe domenii infinit mici.

2.2.2 Deformaţiile liniare

Raportul dintre distanţa infinit mică (elementul liniar) ds' din planul de proiecţie şi distanţa infinit mică ds care îi corespunde pe suprafaţa elipsoidului terestru sau a sferei, poartă denumirea de *modul de deformaţie liniară n sau scară liniară.*

$$\mu = \frac{ds'}{ds}$$ (2.4)

Interpretarea valorilor numerice ale modulului de deformaţie liniară μ:

- μ>l => ds'>ds => se produce o alungire a imaginii din planul de proiecţie, deci o deformaţie pozitivă a lungimii
- μ=l=>ds =>lungimea nu se deformează
- μ<1=> ds'<ds =>se produce o micşorare a lungimii în planul de proiecţie, deci o deformaţie negativă

Deformaţiile relative ale distanţelor din planul de proiecţie

Pentru stabilirea relaţiilor matematice avem în vedere domenii infinit mici. Concluziile le extindem apoi la domenii finite, dar destul de restrânse, astfel încât să folosim aproximaţia că deformaţiile sunt egale cu cele din punctul aflat în centrul domeniului .

Dacă ds este distanţa infinit mică de pe suprafaţa elipsoidului sau a sferei, iar ds' este imaginea ei din planul de proiecţie, atunci deformaţia absolută a distanţei în urma reprezentării pe plan este: (ds'- ds).

Fie D deformaţia relativă a distanţei care reprezintă raportul dintre deformaţia absolută şi distanţa nedeformată:

$$D = \frac{ds'-ds}{ds}$$ (2.5)

$$D = \frac{ds'}{ds} - 1$$ (2.6)

$$D = \mu - 1$$ (2.7)

$$D_{m/Km} = 10^3(\mu - 1)$$

$$D_{cm/Km} = 10^5(\mu - 1)$$ (2.8)

2.2.3 Elipsa deformaţilor

În orice proiecţie care nu păstrează asemănarea în domeniile infinit mici, modulul de deformaţie liniară μ variază într-un punct oarecare A(φ,λ) în funcţie de azimutul α.

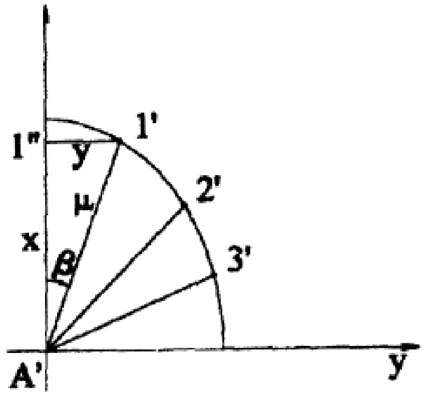
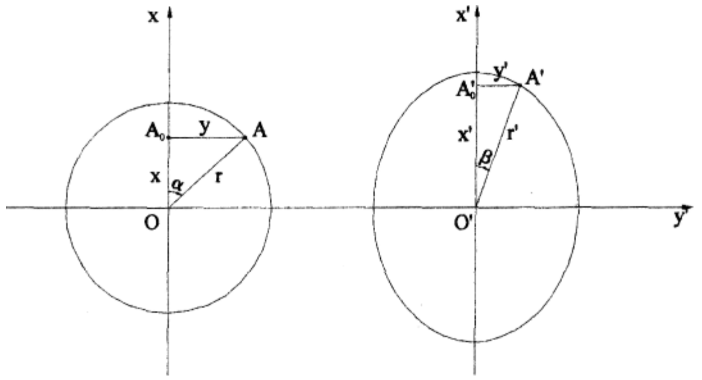


Fig. 2.1. Elipsa deformaţiilor in punctul A '(x,y)

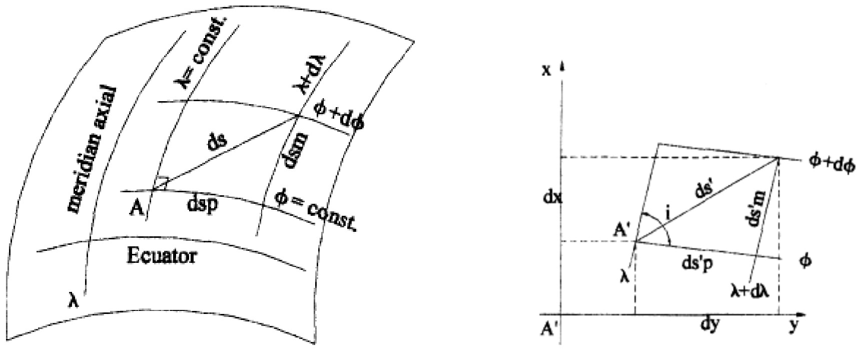
Astfel pentru azimute diferite α_i, α_1, α_2, α_3.... corespund valori diferite ale modulului de deformaţie liniară μ_1, μ_2, μ_3.... Punctului A(φ,λ) de pe elipsoid îi corespunde în planul de proiecţie un punct A'(x, y), iar azimutelor α_1, α_2, α_3....le corespund unghiurile β_1, β_2, β_3.... Dacă se reprezintă pe plan direcţiile β_1, β_2, β_3.... din punctul A'(x, y) şi pe acestea se măsoară segmente de lungimi μ_1, μ_2, μ_3...., iar apoi se unesc capetele segmentelor rezultate se obţine o elipsă. Aceasta se numeşte elipsa deformaţiilor sau indicatricea lui Tissot. Semiaxele elipsei de deformaţie, notate a şi b, corespund valorilor maximă, respectiv minimă a modulilor de deformaţie liniară în punctul considerat. Se numesc direcţii principale într-un punct dat al suprafeţei, două direcţii reciproc perpendiculare, care rămân reciproc perpendiculare şi în reprezentarea pe plan, iar modulii de deformaţie au valori extreme pe aceste direcţii.



Fîg. 2.2. Cercul infinit mic de pe elipsoid, raportat la direcţiile principale şi elipsa corespunzătoare din plan, raportată la axele sale

2.2.4 Deformările areolare

Fie pe suprafaţa elipsoidului un dreptunghi infinit mic având laturile ds_m şi ds_p. Acestui dreptunghi îi corespunde în planul de proiecţie un paralelogram.



Pe elipsoid În planul de proiecţie

Fig. 2.3. Aria infinit mică dTdepe elipsoid şi corespondenta sa dT' din planul de proiecţie

Modulul de deformaţie areolară reprezintă raportul dintre aria paralelogramului infinit mic şi aria dreptunghiului infinit mic care îi corespunde pe elipsoid sau sferă.

$$p = \frac{dT'}{dT} \qquad (2.9)$$

dar:

$dT = ds_m . ds_p$

$dT = ds'_m \text{-} ds'_p \text{-} \sin i$ (2.10)

unde *i* este unghiul din plan format de imaginile meridianului ds_m *şi paralelului. dsp.*

Din relaţiile de mai sus rezultă:

$p = m * n * \sin i$ (2.11)

unde *m* este modulul de deformaţie liniară pe direcţia meridianului, iar *n* este modulul de deformaţie liniară pe direcţia paralelului.

În cazul proiecţiilor conforme $i = 90°$, $m = a$ şi $n = b$, relaţia de mai sus devine:

$p = a * b$ (2.12)

Interpretarea valorilor numerice ale modulului de deformaţie areolară p:

- Dacă p = 1, înseamnă că nu există deformaţii, deci ariile din planul de proiecţie sunt egale cu ariile corespunzătoare de pe suprafaţa elipsoidului, respectiv a sferei.
- Dacă p< 1, ariile din planul de proiecţie sunt mai mici decât ariile corespunzătoare de pe suprafaţa elipsoidului, respectiv a sferei şi spunem că în acest caz deformaţiile areolare sunt negative.
- Dacă p>1, ariile din planul de proiecţie sunt mai mari decât ariile corespunzătoare de pe suprafaţa elipsoidului, respectiv a sferei şi în acest caz deformaţiile areolare sunt pozitive.

2.2.5 Deformaţiile unghiurilor

Fie pe suprafaţa elipsoidului sau a sferei un cerc infinit mic cu centrul în punctul A şi de rază r. Raza OA formează cu direcţia principală în punctul O, (pe care modulul de deformaţie liniară ia valoarea maximă), un unghi α , căruia îi corespunde în reprezentarea pe plan unghiul β . Din figura 2.4. se observă că:

$$tg\beta = \frac{y'}{x'} = \frac{by}{ax} = \frac{b}{a} tg\alpha , \qquad (2.13)$$

unde a şi b sunt seraiaxelei elipsei deformaţiilor.

$$tg(\beta + u') = \frac{b}{a} tg(\alpha + u)$$

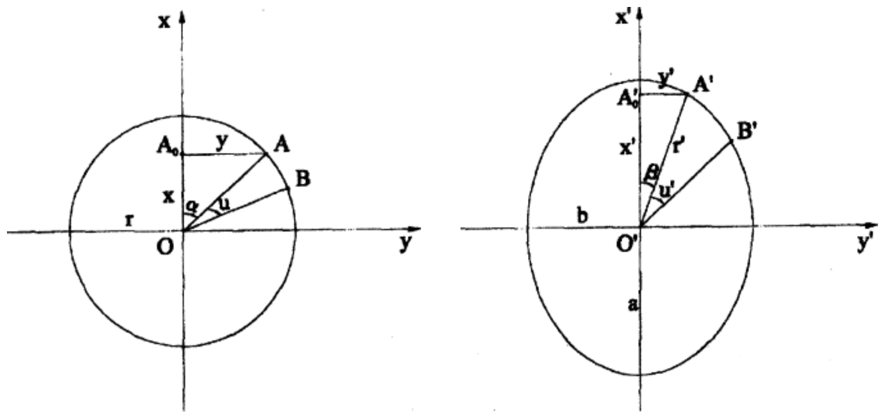


Fig. 2.4 Deformaţia maximă în plan a unghiului u de pe elipsoid sau sferă

Notăm cu μ, unghiul format pe elipsoid de razele O A şi OB. Acestui unghi îi corespunde în planul de proiecţie unghiul μ'=<A 'O 'B'.Conform relaţiei (2.13) rezultă:

$$tg(\beta + u') = \frac{b}{a} tg(\alpha + u)$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$tg(45^0 + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Cursul nr.4

3. CLASIFICAREA PROIECŢIILOR CARTOGRAFICE

3.1 Clasificarea proiecţiilor cartografice după natura elementelor care nu se deformează

În funcţie de natura elementelor care nu se deformează există:

- proiecţii conforme
- proiecţii echivalente
- proiecţii echidistante

3.1.1 Proiecţiile conforme (care păstrează unghiurile)

Sunt acele proiecţii în care figurile infinit mici de pe elipsoid sau de pe sfera terestră se reprezintă în plan prin figuri asemenea.

In proiecţiile conforme modulul de deformaţie al lungimilor, u, în orice punct al proiecţiei, nu depinde de azimutul direcţiei considerate, deci:

$a = b = m = n = \mu$ (3.1)

Aceasta înseamnă că elipsa deformaţiilor se transformă în "cercul deformaţiilor".

Unghiurile se reprezintă nedeformate în proiecţiile conforme, ceea ce înseamnă că deformaţia unghiulară maximă este egală cu zero:

$\omega = 0$ (3.2)

iar modulul de deformaţie areolară este egal cu:

$P = \mu 2$ (3.3)

deoarece:

$p = m \cdot n \cdot \sin i$

$m = n = \mu$,

unde i este unghiul format de imaginile meridianului şi $i = 90°$ paralelului în proiecţiile conforme se deformează în general ariile şi distanţele.

Concluzie:

Proiecţiile conforme sunt acele proiecţii în care unghiurile nu se deformează, adică unghiurile măsurate în teren au aceeaşi valoare cu cele din planul de proiecţie.

Figurile din planul de proiecţie sunt asemenea cu cele de pe teren, dar cu ariile neegale, ceea ce duce la concluzia că în proiecţiile conforme forma figurilor se păstrează, dar se modifică suprafeţele acestora.

Ţinând seama de faptul că prin natura lor proiecţiile conforme conservă unghiurile, ele îşi găsesc o largă aplicare la întocmirea hărţilor topografice . În literatura de specialitate proiecţiilor conforme li se mai spune proiecţii echiunghiulare, autogonale sau ortomorfe.

3.1.2 Proiecţiile echivalente (proiecţiile care păstrează ariile)

Se caracterizează prin faptul că păstrează constant raportul dintre ariile din planul de proiecţie şi cele corespunzătoare de pe elipsoid sau sfera terestră. De obicei acest raport se ia egal cu unitatea.

în proiecţiile echivalente, modulul de deformaţie areolară este:

$p = a*b = m*n* \sin i$ (3.4)

În aceste proiecţii, în general se deformează unghiurile şi distanţele.

Concluzie:

Proiecţiile echivalente sunt proiecţiile în care se păstrează egalitatea dintre suprafeţele de pe elipsoid şi cele reprezentate în planul de proiecţie. Rezultă că cele două figuri, oricare ar fi forma lor, sunt echivalente, adică au aceeşi arie.

3.1.3 Proiecţiile arbitrare

Din clasa proiecţiilor arbitrare fac parte proiecţiile echidistante, în aceste proiecţii se pune condiţia ca modulul de deformaţie liniară să fie constant pe una dintre direcţiile principale, de exemplu pe meridiane sau paralele.

Concluzie:

Proiecţiile arbitrare sunt acele proiecţii care, după natura deformărilor, nu aparţin nici celor conforme, nici celor echivalente, întrucât acestea deformează atât unghiurile, cât şi suprafeţele. Aceste proiecţii au o largă aplicare la întocmirea hărţilor geografice generale, mai ales când se urmăreşte ca destinaţia acestora să satisfacă elaborarea hărţilor tematice.

3.2 Clasificarea proiecţiilor cartografice după latitudinea polului Qo (φ0, λ0) al sistemului de coordonate sferice polare

Reprezentarea suprafeţei terestre se poate face fie direct în planul de proiecţie, fie pe o suprafaţă intermediară, care se desfăşoară apoi pe un plan, de exemplu pe suprafaţa unui con, sau a unui cilindru.

Poziţia reciprocă dintre elipsoidul sau sfera terestră şi suprafaţa pe care se face reprezentarea este definită prin coordonatele φo, λ0 proiecţiei Q0. în funcţie de latitudinea polului Q0, proiecţiile cartografice se clasifică astfel:

- proiecţii drepte, numite şi normale sau polare, în care:

$$\varphi o = 90° \qquad (3.5)$$

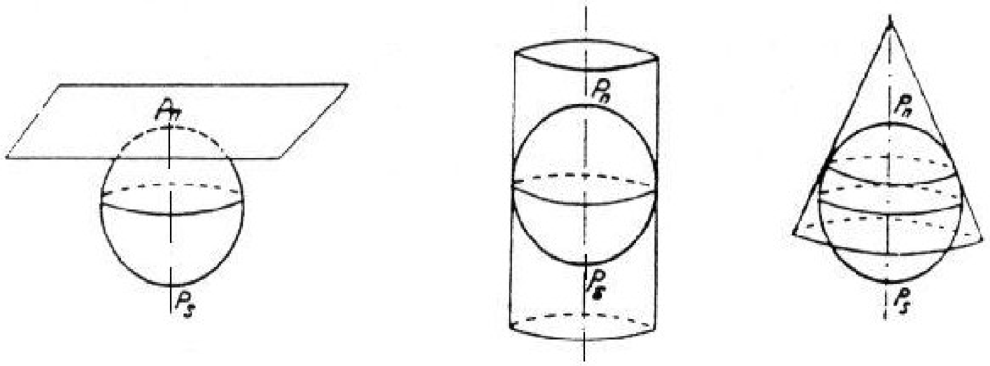


Fig. 3.1. Proiecţii drepte

- proiecţii oblice, în care:

$$0° < \varphi o < 90° \qquad (3.6)$$

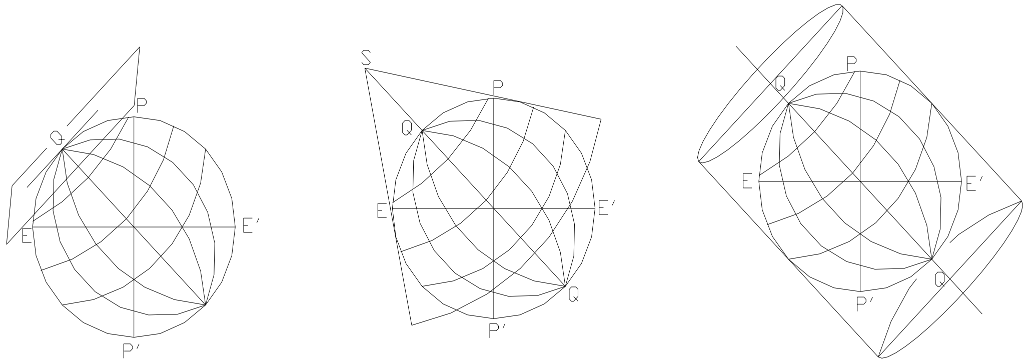


Fig. 3.2. Proiecţii oblice

- proiecţii transversale, sau ecuatoriale, în care:

$$\varphi o = 0° \quad (3.7)$$

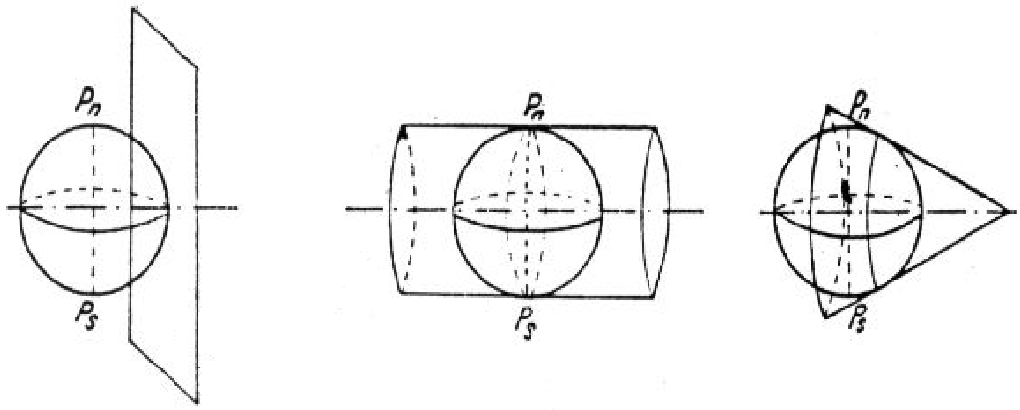


Fig. 3.3. Proiecţii transversale

3.3 Clasificarea proiecţiilor cartografice după aspectul reţelei de meridiane şi paralele

După aspectul reţelei de meridiane şi paralele, proiecţiile se împart în: azimutale, cilindrice, conice, pseudoconice, pseudocilindrice, policonice şi circulare.

3.3.1 Proiecţiile azimutale

Proiecţiile azimutale (zenitale) sunt proiecţiile în care meridianele se reprezintă prin linii drepte, convergente într-un punct, intersectându-se sub unghiuri egale cu diferenţele longitudinilor corespunzătoare, iar paralelele se reprezintă prin cercuri concentrice, cu centrul în punctul de convergenţă al meridianelor.

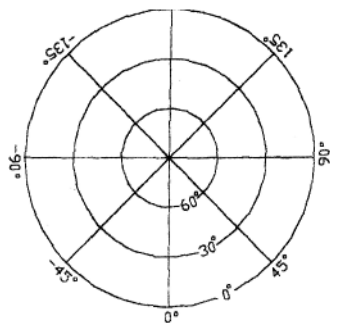


Fig. 3.4. Aspectul reţelei cartografice intr-o proiecţie azimutală dreaptă

În afară de proiecţii azimutale drepte mai întâlnim şi proiecţii azimutale oblice sau orizontale şi transversale sau ecuatoriale. De obicei în aceste proiecţii, suprafaţa terestră se consideră sferă.
În practică , peoiecţiile azimutale se fpolosesc la ăntocmirea hărţilor la scări mici.

3.3.2 Proiecţiile cilindrice

În proiecţiile cilindrice drepte, reţeaua normală se reprezintă prin două familii de drepte paralele astfel:

- meridianele se reprezintă printr-o familie de drepte paralele, situate la distanţe proporţionale cu diferenţele de longitudine corespunzătoare;
- paralelele se reprezintă printr-o familie de drepte paralele, perpendiculare pe imaginile meridianelor.

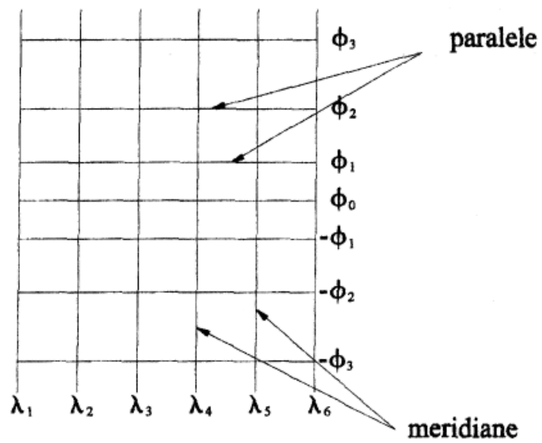


Fig. 3.5. Aspectul reţelei cartografice intr-o proiecţie cilindrică dreaptă

În funcţie de orientarea cilindrului faţă de elipsoid sau sferă, proiecţiile cilindrice se ămpart în :
- drepte când axa coincide cu axa polară a elipsoidului sau sferei ;
- oblice când axele formează un unghi ascuţit sau obtuz;
- transversale când axele se interesectează sub un unghi drept.

Proiecţiile cilindrice se pot considera un caz particular al celor conice, şi anume atunci când centrul comun al cercurilor prin care se reprezintă paralelele este la infinit.Proiecţiile cilindrice au o largă aplicabilitate la întocmirea hărţilor de navigaţie maritimă şi aeriană.

3.3.3 Proiecţiile conice

În proiecţiile conice drepte, reţeaua cartografică de meridiane şi paralele are următorul aspect:

- paralelele se reprezintă prin arce de cercuri concentrice;
- meridianele se reprezintă prin drepte concurente în centrul cercurilor, care fac între ele unghiuri proporţionale cu diferenţele de longitudine corespunzătoare.

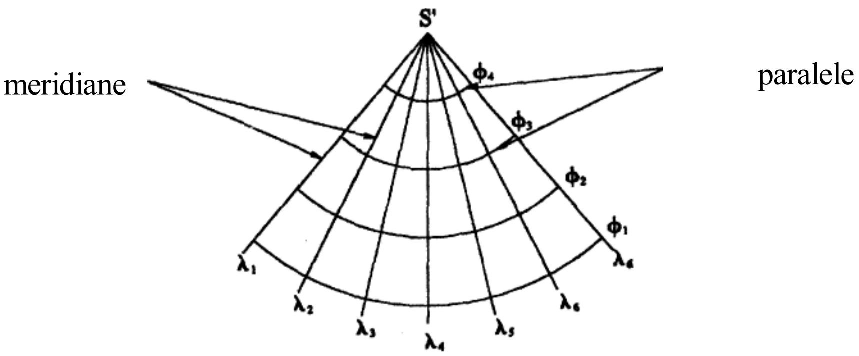


Fig. 3.6. Aspectul reţelei cartografice intr-o proiecţie conică dreaptă

În aceste proiecţii suprafaţa terestră se consideră elipsoid sau sferă. În funcţie de orientarea conului faţă de elipsoid sau sferă, proiecţiile conice se împart în :
- drepte când axa conului coincide cu axa polară a elipsoidului sau sferei;
- oblice când axele se intersectază sub un unghi ascuţit sau obtuz;
- transversale cînd axele se intersectează sub un unghi drept.
O largă utilizare la întocmirea hărţilor o au proiecţiile conice drepte.

3.3.4 Proiecţiile pseudoconice

Se aseamănă cu proiecţiile conice (drepte) doar prin reprezentarea paralelelor ca arce de cercuri concentrice, cu centrul situat pe o dreaptă care este imaginea meridianului axial. Celelalte meridiane se reprezintă prin linii curbe, simetrice faţă de meridianul axial
Cele mai răspândite proiecţii pseudoconice sunt cele echivalente, dintre care cea mai cunoscută este proiecţia pseudoconică Bonn, care a fost utilizată în România.

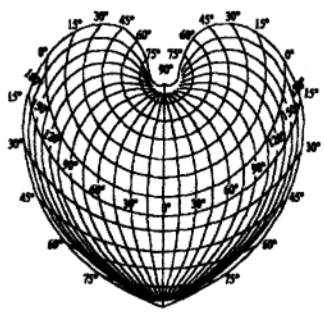


Fig. 3.7. Aspectul reţelei cartografice in proiecţia pseudoconică Bonn

3.3.5 Proiecţiile pseudocilindrice

În aceste proiecţii, ca şi în cazul proiecţiilor cilindrice, paralelele se reprezintă prin drepte paralele între ele şi perpendiculare pe dreapta care este imaginea meridianului axial al zonei cartografiate. Celelalte meridiane se reprezintă prin linii curbe simetrice faţă de meridianul axial.
În această proiecţie se menţin lingimile pe toate paralelele şi pe meridianul mijlociu.
Din clasa acestor proiecţii face parte proiecţia pseudocilindrică a lui Sanson, în care meridianele sunt sinusoide, iar pe meridianul axial şi pe toate paralelele nu se deformează lungimile.

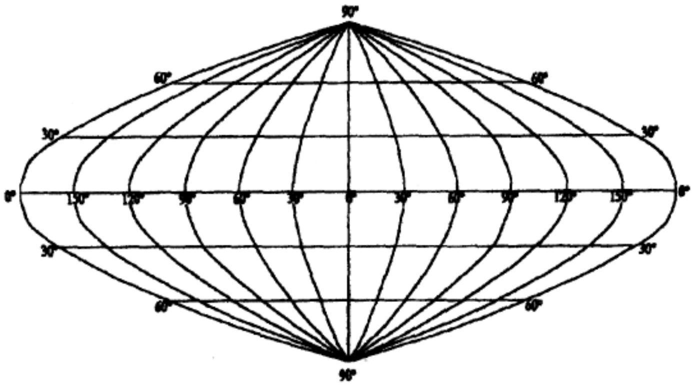


Fig. 3.8. Aspectul reţelei cartografice în proiecţia pseudocilindrică Sanson

3.3.6 Proiecţiile policonice

În aceste proiecţii reţeaua normală se reprezintă astfel:
-paralelele se reprezintă prin arce de cercuri excentrice, centrele lor fiind situate pe o dreaptă care reprezintă imaginea meridianului axial;
-meridianele se reprezintă prin curbe simetrice faţă de meridianul axial.
Din clasa acestor proiecţii, cea mai cunoscută este proiecţia policonică simplă americană, în care lungimile pe meridianul mediu şi pe toate paralelele se menţin nedeformate.

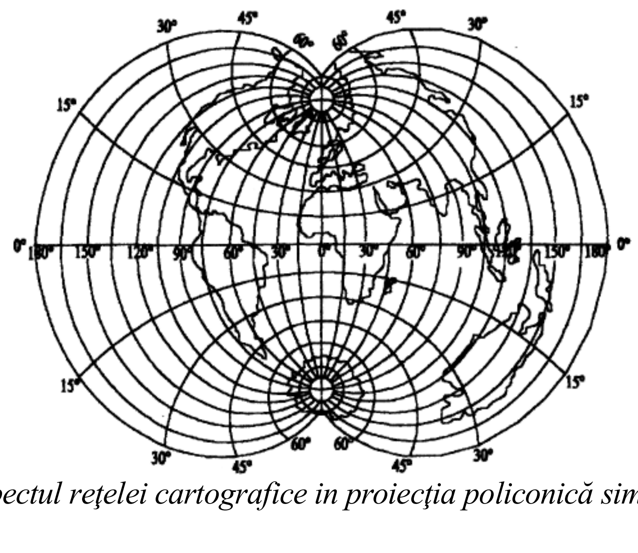


Fig. 3.9. Aspectul reţelei cartografice in proiecţia policonică simplă americană

3.3.7 Proiecţiile circulare

Sunt acele proiecţii în care imaginile meridianelor şi paralelelor sunt cercuri. Dintre proiecţiile circulare trebuie amintită proiecţia circulară conformă Lagrange, în care meridianul axial şi un paralel se reprezintă prin linii drepte, iar restul meridianelor şi paralelelor se reprezintă prin cercuri. Meridianele sunt simetrice faţă de meridianul mijlociu.

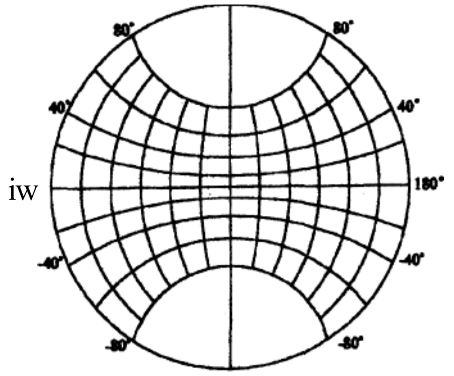


Fig. 3.10. Aspectul reţelei cartografice in proiecţia circulară Lagrange

Cursul nr.5

PROIECŢII AZIMUTALE

4.1 Principii de bază şi formule generale

Proiecţiile azimutale, numite şi zenitale se caracterizează printr-un aspect al reţelei de meridiane şi paralele ca cel prezentat în fig. 4.1.

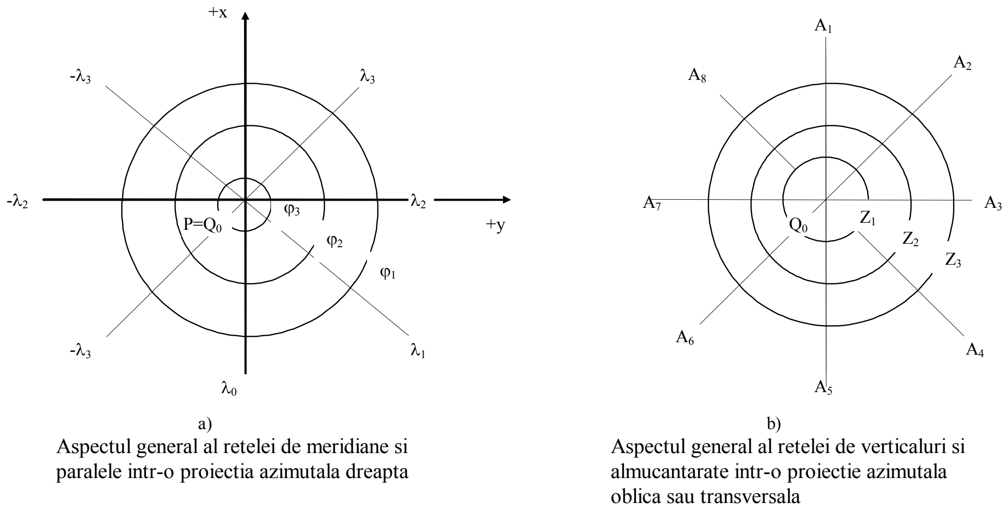


Fig. 4.1. Aspectul general al reţelei normale în proiecţiile azimtale

În proiecţiile azimutale, Pământul, considerat de obicei sferă, se reprezintă pe un plan care poate fi tangent sau secant la sferă. Poziţia planului tangent se stabileşte prin coordonatele φo şi λo ale polului proiecţiei Q_0. Poziţia planului secant se stabileşte prin coordonatele φ_0, λ_0 şi prin distanţa zk, a almucantaratului de secţionare (fig. 4.2).

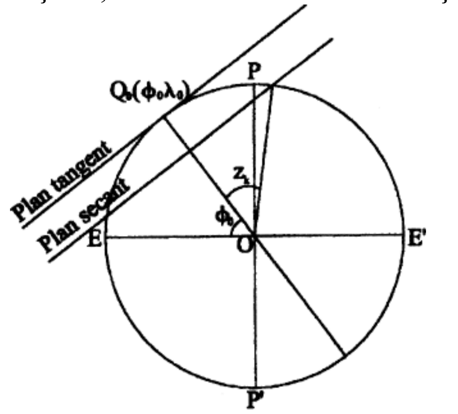


Fig. 4.2. Poziţia planului de proiecţie

Există situaţii, în cartografia matematică, când suprafaţa terestră este considerată sferă de rază R. Această variantă presupune utilizarea unor formule de calcul simplificate deoarece suprafaţa sferei este mai simplă decât cea a elipsoidului.În particular, dacă planul de secţionare este paralel cu planul ecuatorului, poziţia lui se determină prin latitudinea φk, a paralelului de secţionare.

Clasificarea proiecţiilor azimutale :

- în funcţie de latitudinea φ_0 a polului Q_0 proiecţiile azimutale pot fi:

- drepte (normale sau polare):$\varphi_0 = 90°$

- oblice: 0°<φ_0<90°
- transversale: φ0 = 0°

- După caracterul deformaţiilor proiecţiile azimutale pot fi:

- conforme (ω = 0)
- echivalente (φ_0= 1)
- arbitrare (echidistante pe anumite direcţii)

În funcţie de utilizarea legilor perspectivei liniare proiecţiile azimutale pot fi:

- perspective
- neperspective

După poziţia planului de proiecţie faţă de suprafaţa terestră:

- proiecţii azimutale pe plan tangent ;
- proiecţii azimutale pe plan secant.

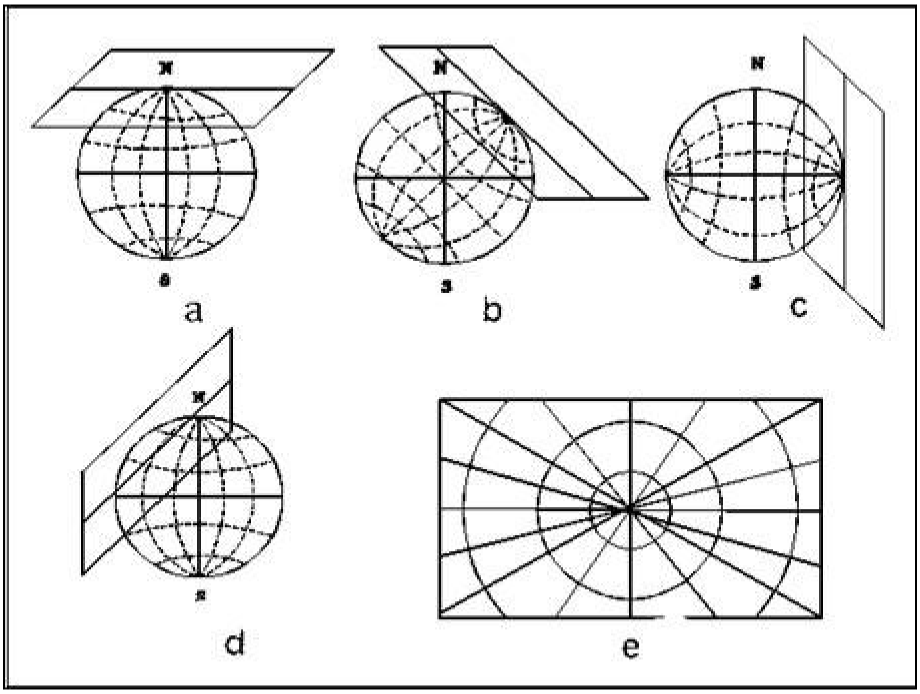


Fig. 4.3 - Proiecţia azimutală : a - dreaptă; b - oblică; c - transversală; d - secantă; e - aspectul reţelei cartografice.

4.2. PROIECŢII AZIMUTALE DREPTE

În **proiecţiile azimutale drepte** aspectul reţelei cartografice este următorul:

- meridianele se reprezintă în planul de proiecţie ca drepte concurente într-un punct, care este imaginea plană a polului geografic. Unghiurile dintre aceste drepte sunt egale cu diferenţele de longitudine dintre meridianele respective.
- paralelele se reprezintă ca cercuri concentrice cu centrul în punctul de intersecţie a imaginilor meridianelor. Razele p ale acestor cercuri variază în funcţie de tipul proiecţiei azimutale.

In proiecţiile azimutale, punctele din plan se determină prin coordonate plane polare (ρ,δ) sau prin coordonate rectangulare plane (x, y).

Sistemul de axe de coordonatele plane polare (ρ-raza vectoare şi δ-unghiul polar)

În cazul proiecţiilor azimutale drepte, ca axă polară se consideră una din dreptele prin care se reprezintă meridianele, de exemplu cea care reprezintă meridianul de origine sau cel opus lui.

Sistemul de axe de coordonate rectangulare plane (x,y) se alege astfel încât axa xx' să coincidă cu axa polară, iar originea sistemului să coincidă cu polul sistemului de coordonate plane polare.

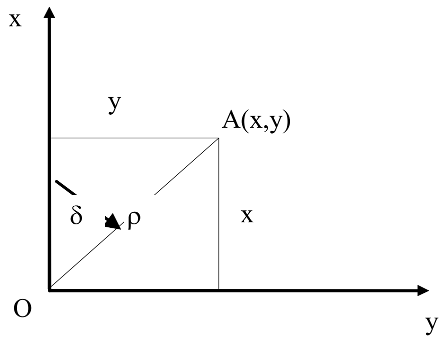


Fig. 4.4. Sistemul de axe de coordonate plane polare şi rectangulare utilizate in proiecţiile azimutale

***Formulele generale ale proiecţiilor azimutale drepte* pentru reprezentarea sferei terestre de rază R sunt**:

$\rho = \lambda$

$\delta = f(\varphi)$, (4.1)

Unde λ se va lua ca o diferenţă de longitudine masurată de la meridianul a cărui imagine se ia ca axă Ox.

Coordonatele plane rectangulare se pot calcula în funcţie de coordonatele plane polare cu formulele:

$x = \rho \cos\delta$

$y = \rho \sin\delta$ (4.2)

Formulele de calcul ale modulilor de deformare

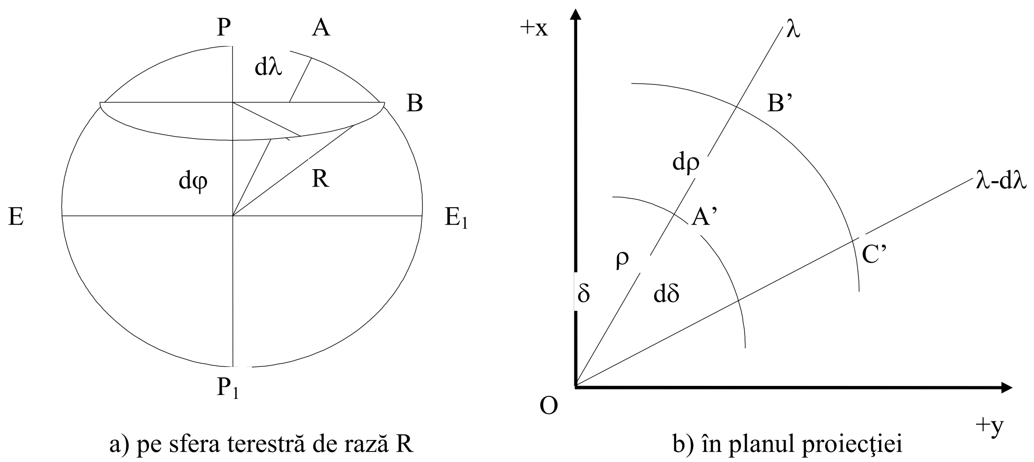


Fig. 4.5. Arce elementare de meridian şi de paralel pe sferă (a) şi în planul proiecţiei azimutale drepte (b)

Unde,

A(φ,λ) - punct oarecare de pe suprafaţa terestră, considerată sferă de rază R;

AB - element de arc de meridian pe sferă;
BC - element de arc de paralel pe sferă;
A', B', C' - imaginile plane ale punctelor A, B, C de pe sferă

Modulul de deformaţie liniară pe meridian (m):

$$m = \frac{ds_m'}{ds_m} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-d\rho}{Rd\varphi} = \frac{d\rho}{d\psi} \tag{4.3}$$

unde semnul minus de la numărător se datorează faptului că atunci când φ se măreşte, ρ se micşorează.
Dacă se consideră colatitudinea ψ =(90° - φ) relaţia (4.3) se scrie sub forma :

$$m = \frac{ds_m'}{ds_m} = \frac{d\rho}{Rd\psi} \tag{4.4}$$

Modulul de deformaţie liniară pe paralele (n):

$$n = \frac{ds_p'}{ds_p} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{\rho d\delta}{rd\lambda} = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{R\cos\varphi} \tag{4.5}$$

unde $\delta = \lambda$

Modulul de deformaţie areolară (p):

$$p = m \cdot n \cdot \sin i = m \cdot n \cdot \sin 90° \Rightarrow p = m \cdot n \tag{4.6}$$

Deformaţiile unghiulare maxime (w):

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{sau} \quad \mathrm{tg}(45^0 + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} \tag{4.7}$$

unde a,b sunt semiaxele elipsei de deformaţie.

Formulele generale ale proiecţiilor azimutale drepte pentru reprezentarea elipsoidului de rotaţie:

Pentru reprezentarea elipsoidului de rotaţie terestru în proiecţiile azimutale drepte, formulele generale diferă de cele ale sferei doar prin expresia modulilor de deformaţie liniară, şi anume:

$$m = \frac{-d\rho}{Md\varphi} = \frac{d\rho}{Md\psi} \tag{4.8}$$

$$n = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{N\cos\varphi} \tag{4.9}$$

4.3. PROIECŢII AZIMUTALE OBLICE ŞI TRANSVERSALE

În cazul proiecţiilor oblice, care reprezintă *cazul general al proiecţiilor azimutale*, succesiunea calculelor este următoarea:

1. suprafaţa elipsoidului de rotaţie se reprezintă pe suprafaţa unei sfere;
2. coordonatele geografice de pe sfera terestră se transformă în coordonate sferice polare (A, Z);
3. se determină coordonatele plane polare (δ, ρ) în funcţie de coordonatele sferice polare (A, Z) ;
4. se determină coordonatele plane rectangulare (x,y) în funcţie de coordonatele plane polare (δ, ρ) ;
5. se determină modulii de deformare şi deformaţia unghiulară maximă (w).

Formulele generale ale proiecţiilor azimutale oblice şi ale celor transversale în cazul reprezentării sferei terestre de rază R sunt:

$$\delta = A \qquad x = \rho\cos\delta$$
$$\rho = f(90^\circ - Z) = F(Z) \qquad y = \rho\sin\delta$$
$$\mu_1 = \frac{d\rho}{RdZ} \qquad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \qquad (4.10)$$
$$\mu_2 = \frac{\rho}{R\sin z} \qquad tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$p = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \sin 90^\circ = \mu_1 \cdot \mu_2$$

unde se fac următoarele înlocuiri :

- longitudinea λ cu azimutul (A);
- latitudinea φ cu diferenţa (90°-Z);
- colatitudinea ψ cu distanţa zenitală (Z);
- modulul de deformare liniară pe meridiane (m) cu cu modulul de deformare liniară pe verticaluri (μ_1);
- modulul de deformare liniară pe paralele (n) cu cu modulul de deformare liniară pe almucantarate (μ_2).

Din formule se observă că deformaţiile depind numai de latitudine şi respectiv numai de distanţa zenitală (Z), adică de depărtarea faţă de polul Q_0 al proiecţiei

4.4. PROIECŢII AZIMUTALE NEPERSPECTIVE

În proiecţiile azimutale neperspective pentru determinarea ecuaţiilor proiecţiilor şi a reţelei cartografice se ţine seama de condiţiile de conformitate, echivalenţă sau echidistanţă.
La *proiecţiile azimutale neperspective drepte sau polare* reţeaua de meridiane se reprezintă prin drepte convergente într-un punct ce reprezintă imaginea polului geografic şi care se intersectează sub unghiuri egale cu diferenţa longitudinilor meridianelor corespunzătoare. Reţeaua de paralele este reprezentată de cercuri concentrice cu centrul în punctul de convergenţă al meridianelor şi pot să fie echidistanţate sau nu în funcţie de condiţiile impuse proiecţiei.
În cazul acestor proiecţii neperspective reţeaua principală (reţeaua cartografică de meridiane şi paralele) coincide cu reţeaua normală.
Ecuaţiile generale ale proiecţiilor azimutale neperspective drepte sau polare în coordonate polare sunt :

$$\delta = \lambda \qquad (4.11)$$

ρ = f(φ)
unde
δ este unghiul polar
ρ este raza vectoare.
Polul sistemului de coordonate polare plane este considerat punctul de convergenţă al meridianelor, iar axa polară este chiar meridianul mediu al zonei de reprezentat de la care se măsoară longitudinea λ.
Unghiul polar δ este egal cu longitudinea λ pentru că prin proiecţie s-a stability că meridianele se intersectează sub unghiuri egale cu diferenţele de longitudine ale meridianelor corespunzătoare. De aici se trage concluzia că proiecţiile neperspective azimutale sunt cazuri particulare ale proiecţiilor conice în care α=1.
Funcţia ρ = f(φ) se determină pe baza condiţiilor de conformitate, echidistanţă sau echivalenţă care se impun.
Deoarece direcţiile principale coincid cu meridianele şi paralelele, modulii de deformare liniară m şi n de pe aceste direcţii au valori extreme, adică valoarea maximă este egală cu a iar valoarea minimă cu b (a şi b sunt semiaxele elipsei deformaţiilor) .
În aceste proiecţii se mai foloseşte şi sistemul de coordonate rectangulare în care axa abciselor coincide cu axa polară iar originea sistemului este considerat polul sistemului de coordonate sferice polare.

$$x = \rho \cos\delta$$
$$y = \rho \sin\delta \qquad (4.12)$$

Formulele generale ale proiecţiilor azimutale neperspective drepte în cazul reprezentării sferei terestre de rază R sunt:

$$\delta = \lambda$$
$$\rho = f(\varphi)$$
$$x = \rho\cos\delta \qquad p = m \cdot n$$
$$y = \rho\sin\delta \qquad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \qquad (4.13)$$
$$m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi} \qquad tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$n = -\frac{\rho}{R\cos\varphi}$$

Deformaţiile liniare, areolare şi unghiulare depind numai de latitudine.
La *proiecţiile azimutale oblice şi transversale* reţeaua normală conţine imaginea almucantaratelor şi verticalelor. Imaginea almucantaratelor este formată din cercuri rezultate din intersecţia sferei terestre cu plane paralele la planul orizontului locului, iar verticalele sunt cercuri mari obţinute prin intersecţia sferei terestre cu plane ce trec prin axa polară, respectiv axa ce trece prin punctul considerat centrul zonei de reprezentat şi centrul sferei.
În aceste proiecţii avem:

- verticale reprezentate prin linii convergente într-un punct (polul proiecţiei) şi se intersectează sub unghiri egale cu diferenţa azimutelor verticalelor corespunzătoare;
- almucantarate reprezentate prin cercuri concentrice cu centrul în punctul de convergenţă al verticalelor, respectiv polul sistemului oblic sau transversal.

Meridianul polului corespunzător sistemului oblic sau transversal este reprezentat printr-o linie dreaptă care este axa de simetrie pentru celelalte meridiane.
În concluzie în proiecţiile azimutale oblice sau transversale reţeaua normală nu coincide cu reţeaua principală şi în consecinţă meridianele şi paralelele se reprezintă prin curbe oarecare.
Formulele generale ale proiecţiilor azimutale oblice sau transversale sunt:

$$
\begin{aligned}
&\delta = A && x = \rho\cos\delta \\
&\rho = f(z) && y = \rho\sin\delta \\
&\mu_1 = \frac{d\rho}{Rdz} && \sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \\
&\mu_2 = \frac{\rho}{R\sin z} && tg\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \\
&p = \mu_1 \cdot \mu_2
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Cursul nr.6 si 7
PROIECŢII AZIMUTALE PERSPECTIVE

1. Caracteristici generale

Proprietăţile generale ale proiecţiilor azimutale sunt valabile şi în cazul proiecţiilor azimutale perspective.
Caracteristica de bază a acestor proiecţii este faptul că utilizează legile perspectivei liniare. În legătură cu acestea se fac următoarele precizări:

- Pământul se consideră în general sferă de rază R;
- planul de proiecţie, pe care se face reprezentarea, se mai numeşte şi *planul tabloului*;
- diametrul care trece prin polul Q_0 (λ_0,φ_0), pol ales aproximativ în mijlocul teritoriului de reprezentat, se numete *diametru principal*;
- pe diametrul principal sau pe prelungirea lui se alege un *punct de vedere* (V), a cărui distanţă faţă de centrul sferei se notează prin ***D***;
- planul de proiecţie (planul tabloului) este *perpendicular pe diametrul principal*, iar distanţa dintre punctul de vedere şi planul de poiecţie se notează prin ***K***;
- dreptele care pornesc din punctul de vedere şi trec prin punctele de pe suprafaţa sferei terestre, se numesc *drepte proiectante*;
- imaginea plană a unui punct oarecare B de pe suprafaţa terestră este un punct B' în care dreapta proiectantă care trece prin B înteapă planul tabloului.

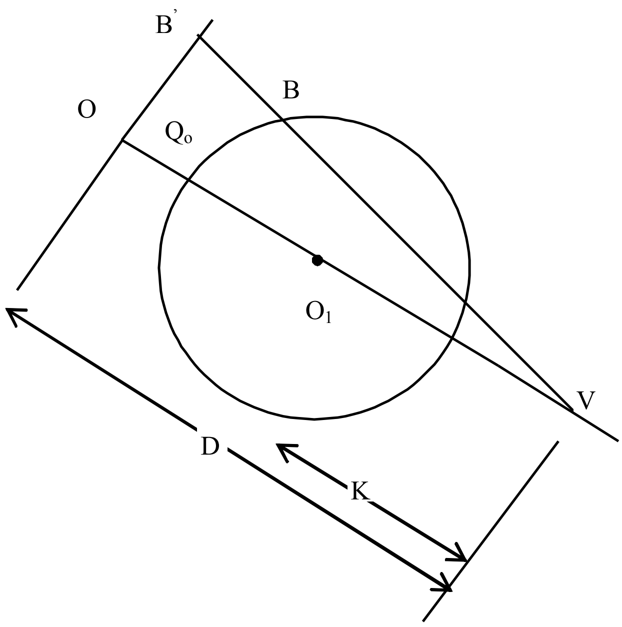


Fig.6.1 Semnificaţia parametrilor D si K

2. Clasificarea proiecţiilor azimutale perspective

1. După valoarea latitudinii φ_0 a polului Q_0:

- drepte;

- oblice;
- transversale.

2. După caracterul deformaţiilor:
- conforme;
- echivalente;
- echidistante.

3. După poziţia planului de proiecţie faţă de suprafaţa sferei terestre:

- pe plan tangent;
- pe plan secant.

4. După distanţa D, dintre punctul de vedere V şi centrul O_1 al sferei terestre:
- centrale (V_1), când $D = 0$;
- interioare (V_2), când $0 < D < R$;
- stereografice (V_3), când $D = R$;
- exterioare (V_4), când $R < D <$
- ortografice (V_5), când $D = \infty$

În figura de mai jos se arată poziţiile punctului de vedere V în aceste cinci categorii de proiectii azimutale perspective şi poziţiile imaginilor B_1', B_2' ... B_5' ale aceluiaş punct B de pe sfera terestră, utilizând legile perspectivei liniare şi luând planul de proiecţie tangent la sferă.

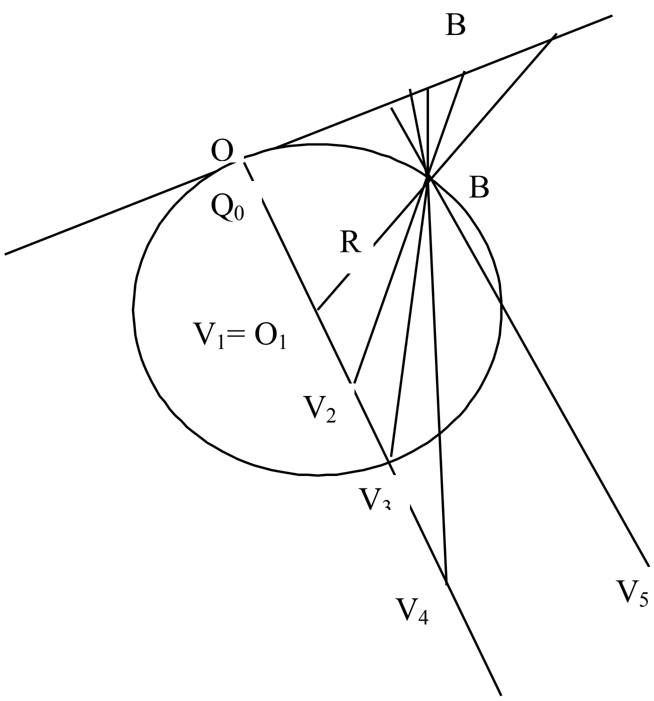


Fig. 6.2 Imaginile plane ale aceluiaşi punct de pe sferă, în diverse proiecţii azimutale perspective

În proiectiile azimutale perspective, poziţia reciprocă dintre punctul de vedere V, sfera terestră şi planul de proiecţie (planul tabloului) se defineşte prin:
- coordonatele geografice λ_0,φ_0 ale polului Q_0 prin care trece diametrul principal;

- distanţa D dintre punctul de vedere şi centrul O_1 al sferei terestre;

- distanţa K dintre punctul de vedere V şi planul de proiecţie (planul tabloului).

Aceşti parametrii odată stabiliţi, devin constantele proiecţiei şi deosebesc între ele diversele proiecţii azimutale perspective.

3. Formule generale pentru calculul coordonatelor plane polare şi al celor plane rectangulare în proiecţiile azimutale perspective

Se consideră cazul general al unei proiecţii azimutale oblice perspective.

Dacă se secţionează sfera terestră de raza R cu planul verticalului unui punct oarecare B de pe sferă, va rezulta situatia din figura de mai jos, în care:

- V este o poziţie oarecare pe care o are punctul de vedere pe dreapta care conţine diametrul principal Q_0Q;
- O şi $B^{'}$ sunt imaginile plane ale punctelor Q_0 şi respectiv B în planul de proiecţie;
- $OB^{'} = \rho$, reprezintă raza vectoare a punctului $B^{'}$ din plan;
- Pe sferă, punctul B are distanţa zenitala Z;
- MB = RsinZ, reprezintă raza almucantaratului care trece prin punctul B;
- $D = VO_1$, reprezintă distanţa dintre punctul de vedere şi centrul sferei;
- K = VO, reprezintă distanţa dintre punctul de vedere şi plan.

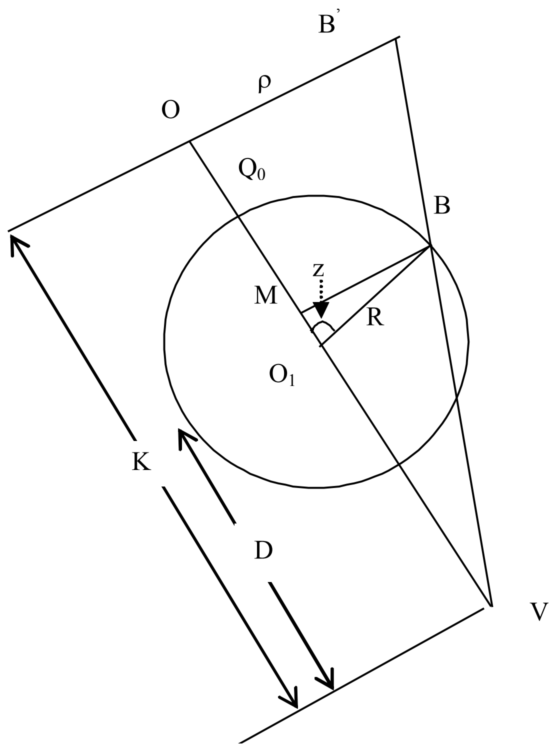


Fig. 6.3 Secţiune prin sfera cu planul verticalului unui punct oarecare

Din triunghiurile asemenea $OB^{'}V$ şi MBV rezultă:

$$\frac{OB^{'}}{MB} = \frac{OV}{MV} \qquad 5.10$$

Adică,

$$\frac{\rho}{R\sin Z} = \frac{K}{D + R\cos Z} \qquad 5.11$$

Şi în cazul proiecţiilor azimutale perspective se pastrează formulele generale pentru calculul coordonatelor plane şi a modulilor de deformaţie pentru proiecţiile azimutale. Ţinând cont de acestea, se obţin următoarele formule generale pentru calculul coordonatelor plane polare:

$\delta = A$

$\rho = \dfrac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}$

Ţinând cont de aceste formule de calcul precum şi de legătura dintre coordonatele plane polare şi coordonatele plane rectangulare, se obţin următoarele formule generale pentru calculul coordonatelor rectangulare plane în orice proiecţie azimutală perspectivă:

$$x = \rho\cos\delta = \frac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}\sin Z\cos A$$

$$y = \rho\sin\delta = \frac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}\sin Z\sin A$$

Unde, D şi K sunt constante care caracterizează natura proiecţiei perspective, iar A si Z sunt coordonate sferice polare care definesc pe sfera terestră poziţia punctului considerat, în raport cu polul $Q(\lambda_0,\varphi_0)$ al proiecţiei.

4. PROIECŢIA STEREOGRAFICĂ 1930 (1933) PE PLAN UNIC SECANT BRASOV

Caracteristici generale

În anul 1930 s-a hotărât adoptarea, pentru ţara noastră, a unei proiecţii stereografice pe plan unic secant denumită şi "pe planul secant Braşov", având ca pol Q_0 (punct central) un punct fictiv (nematerializat în teren), situat aproximativ la 30 km nord-vest de Braşov.
Coordonatele geografice ale punctului central au valorile:
$\varphi_0 = 51^G\ 00^c\ 00^{cc},000\ (45^0 54^{'} 00^{''},0000)$
$\lambda_0 = 28^G\ 21^c\ 00^{cc},510$ est Gr. $(25^0 23^{'} 32^{''},8722)$
Precizarea "plan unic secant Braşov" se face deoarece, înainte de data introducerii acestei proiecţii, în anumite zone ale ţării se lucra pe plan tangent Budapesta (în vestul ţării) sau în proiecţie stereografică Târgu Mureş.
Harta ţării, în această proiecţie stereografică, urma să se sprijine pe o triangulaţie nouă, motiv pentru care s-a adoptat elipsoidul de referinţă Hayford orientat pe Observatorul Astronomic

Militar din Bucureşti. În punctul astronomic fundamental s-au facut măurători astronomice pentru determinarea latitudinii, longitudinii şi azimutului care au fost transmise în reţeaua geodezică de stat.
Proiecţia fiind stereografică rezultă că, din punct de vedere al deformaţiilor, se înscrie în seria proiecţiilor conforme ceea ce permite ca măsurătorilegeodezice efectuate să poată fi prelucrate direct în planul de proiecţi, după aplicarea prealabilă a unor corecţii de reducere la paln
Sistemul de axe de coordonate plane stereografic a fost astfel ales încât originea să reprezinte imaginea plană a polului $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$, axa Oy să se gasească pe direcţia nord-sud, cu sensul pozitiv spre nord, iar axa Ox pe direcţia est-vest, cu sensul pozitiv spre est.

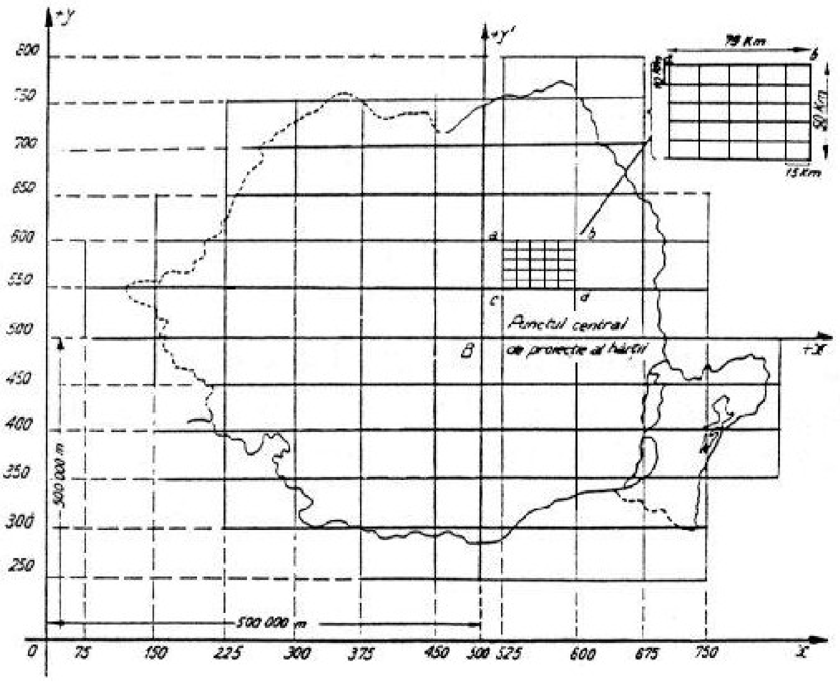


Fig.6.4 Sistemul de axe de coordonate în proiecţia Stereografică 1930 şi sistemul de împărţire pe foi

Pentru unele nevoi practice, în scopul de a nu se lucra cu coordonat negative, s-a adoptat o translaţie a sistemului de axe de coordonate cu 500 000 m spre vest şi respectiv cu 500 000 m spre sud, astfel că, pentru teritoriul întregii ţări coordonatele plane deveneau positive (fig.5.8).
De subliniat faptul că aceste coordonate care au suferit translaţii nu se puteau utiliza pentru orice calcul. De exemplu, nu se puteau utiliza pentru calculul corecţiei de reducere la coarda, calculul corecţiei de reducere a distanţelor la planul de proiecţie, calculul deformaţiilor etc.
Sunt folosite două plane de proiecţie: un plan secant şi unul tangent. Pentru un teritoriu reprezentat în cele doua plane se obţin imagini asemenea, imaginea din planul secant fiind mai mică decat cea din planul tangent.

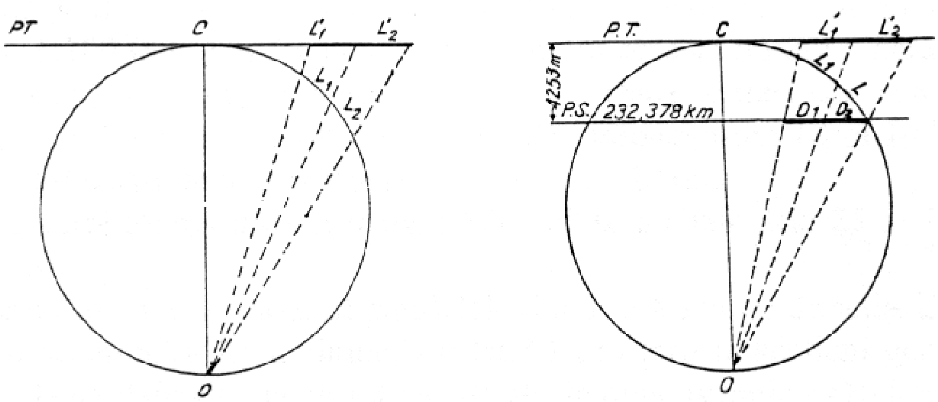


Fig. 6.5. Utilizarea celor două plane
în proiecţia Stereografică 1930

Transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în planul unic secant Braşov se realizează prin înmulţirea coordonatelor din planul tangent cu coeficientul c de reducere a scării, având valoarea:

c = 1 - 1/3000 = 0. 999 666 67

Transformarea coordonatelor stereografice din planul unic secant în planul tangent se face prin înmulţirea celor din planul secant cu coeficientul $c^{'}$ care are valoarea:

$c^{'}$ = 1/c = 1.000 333 44

Deformaţii în proiecţia Steraografică 1930

În planul tangent deformaţiile liniare şi areolare din polul Q_0 sunt nule, iar în toate celelalte puncte ale planului se produc deformaţii pozitive care cresc direct proporţional cu pătratul distanţei faţă de polul Q_0 (punctul central). De exemplu, la distanţa de 330km faţă de polul proiecţiei, deformaţia relativă este de 67 cm/km.În scopul micşorării deformaţiilor s-a adoptat atunci un plan secant în locul celui tangent. În acest caz apare un cerc de deformaţie nulă cu raza de 233 km. În planul secant al proiecţiei stereografice deformaţiile liniare şi cele areolare sunt negative pentru zonele situate deasupra planului secant (în interiorul cercului de deformaţie nulă) şi pozitive pentru zonele situate sub planul secant (în afara cercului de deformaţie nulă). Deformaţiile cresc în valoare absolută pe masură ce se măreşte distanţa faţă de cercul de secţionare.
Deformaţiile negative maxime sunt în polul Q_0 (în originea axelor) şi ating valoarea - 33,33 cm/km.
Spre zonele limitrofe ale ţării, de exemplul la distanţa de 330 km faţă de originea axelor (faţă de polul Q_0), deformaţiile din proiecţia stereografică pe planul secant Braşov au valoarea de +33,56cm/km, iar la distanţa de 380 km ele ating valori de +55,39cm/km.

Secţiuni geodezice şi secţiunile topografice (cadastrale) în proiecţia Stereografică 1930

O hartă a ţării la scara 1:20 000 realizată pe o foaie unică ar avea dimensiunile de aproximativ 40x30 m (Fig.5.8). Din această cauză, ar fi foarte greu de lucrat cu ea şi atunci s-a recurs la împărţirea întregii suprafeţe a ţării în secţiuni- prin ducerea de drepte paralele la cele două axe de coordonate *X* şi *Y*.
Trasându-se paralele la axele de coordonate pe direcţia abscisei din 75 în 75 km, iar pe direcţia ordonatei din 50 în 50 km, s-a obţinut scheletul hărţii ţării la scara 1:100 000. Un dreptunghi rezultat din această trasare a paralelelor reprezintă o hartă topografică la scara 1:100 000. Dacă se trasează paralele pe direcţia absciselor din 15 în 15 km, iar pe direcţia ordonatei din 10 în 10 km, se obţine scheletul hărţii de bază a României la scara 1:20 000.
În harta topografică la scara 1:100 000 se includ deci 25 de hărţi la scara
1:20 000.
În cazul în care se trasează paralelele din 8 în 8 km pe direcţia *X* şi din 10 în 10 km pe direcţia *Y* , se obţine scheletul hărţii ţării în secţiuni geodezice sau foile fundamentale ale planurilor cadastrale de dimensiunile 8x10 km.
Prin împărţirea secţiunii geodezice în 5 părţi egale pe orizontală şi 8 părţi pe verticală se obţin 40 de secţiuni cadastrale.

O secţiune geodezică = 8 km x 10 km = 80 km^2 = 8 000 ha
O secţiune geodezică = 10 secţiuni cadastrale
O secţiune cadastrală = 1 600 m x 1 250 m = 20 ha.

Formatul hărţilor în această proiecţie este dreptunghiular.

ELEMENTELE CARACTERISTICE PROIECŢIEI STEREO' 1970

1 Caracteristici generale

În septembrie 1970, prin decretul nr.305 "*cu privire la activitatea geodezică, topo-fotogrametricăşsi cartografică, precum şi la procurarea, deţinerea şi folosirea datelor şi documentelor rezultate din această activitate*" se prevedea ca:
"*Lucrările geodezice, topo-fotogrametrice şi cartografice necesare economiei naţionale se execută în proieţie stereografică 1970 şi sistem de cote de referiţă Marea Neagră".*
"Pentru nevoile de apărare şi securitate, precum şi pentru cele necesare activităţilor ştiiţifice, învăţământului, uzului public şi propagandei, aceste lucrări vor fi executate şi în alte sisteme de proiecţie".

Conform prevederilor decretului menţionat, obligaţia de a stabili parametrii care să caracterizeze noul "sistem de proiecţie stereografică 1970" i-a revenit Direcţiei de geodezie şi cadastru din Ministerul Agriculturii, Industriei Alimentare şi Apelor.
În 1972, au fot stabilite următoarele elemente care să caracterizeze proiecţia stereografică 1970:

- Se menţine elipsoidul de referinţă Krasovski (1940), orientat la Pulkovo ca şi în cazul proiecţiei Gauss-Kruger;

- 2) Polul Q_0 al proiecţiei, denumit şi "centrul proiecţiei" are coordonatele geografice:

$\varphi_0 = 46^o$ Lat. N
$\lambda_0 = 25^o$ est Greenwich

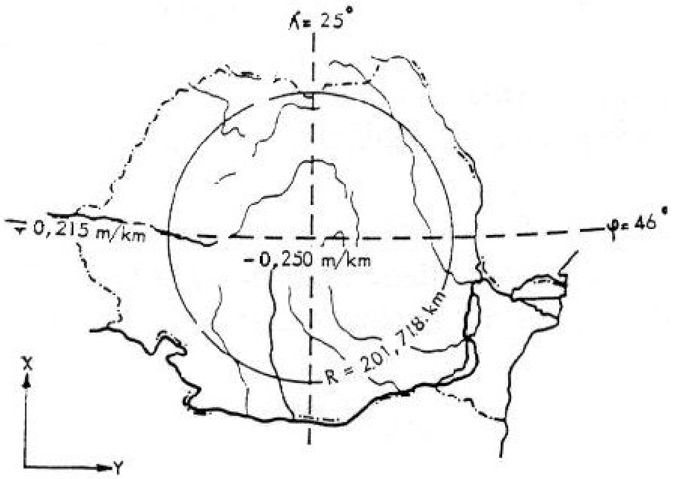


Fig. 6.6. Cercul de deformaţie nulă în proiecţia Stereografică 1970

Aceste coordonate diferă puţin de cele ale polului vechiului sistem de proiecţie stereografică (1933) utilizat în trecut în ţara noatră. Noul pol este deplasat spre nord-vest faţă de cel vechi.

- Întreaga ţară se reprezintă pe un singur plan de proiecţie, în care există un cerc de deformaţie nulă cu raza ρ_0 = 201,718 m ceea ce corespunde unui "sistem secant", în care există deformaţii pozitive şi negative, având cele mai mari deformaţii negative, de -25 cm/km, în punctul central.

- Sistemul de axe de coordonate rectangulare plane are ca origine imaginea plană a punctului central (fig. 5.10). Astfel:
  - Axa Ox este o dreaptă reprezentând imaginea meridianului λ_0, ea fiind şi axă de simetrie. Are sensul pozitiv spre nord.
  - Axa Oy este perpendiculară pe axa Ox şi are sensul pozitiv spre est.

  Sistemul de coordonate plane xOy folosit de proiecţia stereografică 1970 este inversat faţă de sistemul de axe din vechea proiecţie sterografică 1930-1933.

- Paralel cu planul secant se utilizează şi un plan tangent la ellipsoid, acesta constituind o suprafaţă auxiliară. Imaginile din cele doua plane
  sunt asemenea, cea din planul secant fiind mai mică (având scara micşorată). Pentru trecerea de la coordonatele din planul tangent la cele din planul secant se foloseşte un coeficient de reducere la scară:

  $$c = 1 - \frac{1}{4000} = 0{,}99975$$

  Relaţiile dintre coordonatele aceluiaşi punct din cele două plane de proiecţie se exprimă astfel:

  $x_{sec} = x_{tg}c$
  $y_{sec} = y_{tg}c$

➢ 6) Transformarea coordonatelor stereografice din planul secant în cel tangent se face înmulţind aceste coordonate cu coeficientul:

$$c' = \frac{1}{c} = 1,000\,250\,063$$

Sistemul de proiecţie stereografică 1970 a început să fie utilizat în lucrările de producţie curentă, din ţara noastră, din anul 1973.

Condiţii impuse reprezentării în proiecţia stereografică 1970:
Ecuaţiile hărţii au fost stabilite astfel încat reprezentarea să satisfacă următoarele condiţii de bază:

1. Să fie conformă;

2. Meridianul λ_o care trece prin punctul central se reprezintă printr-o dreaptă care este şi axă de simetrie şi axă Ox, iar originea O este imaginea plană a polului Q_0;

3. Orice punct situat pe meridianul central λ_o are abscisa:

$$x_m = sR_0 \, tg \frac{\beta}{2R_0}$$

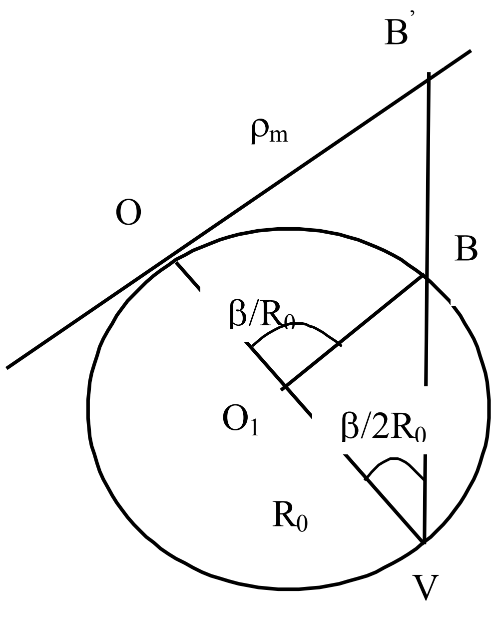


Fig.6.7. Secţiune meridiană prin sfera de rază R_0

În figura de mai sus este reprezentată secţiunea meridiană printr-o sferă de rază R_0 luată la latitudinea $\varphi_0 = 46^o$ N.
B - este un punct oarecare pe sferă;
R_0- raza sferei la latitudinea $\varphi_0 = 46^o$ N;

B' - imaginea lui B în planul tangent de proiecţie;
β - lungimea arcului de meridian măsurat pe elipsoid între paralelul de latitudine 46^0 şi paralelul de latitudine φ a punctului considerat.
Relaţia (5.15) împreună cu figura (5.11) amintesc de expresia razei vectoare ρ din proiecţia azimutală stereografică pe plan tangent.

- Coordonatele stereografice 1970 calculate în sistemul de axe de coordonate cu originea în centrul ţării sunt modificate cu + 500 000 m atât pe x cât şi pe y, ceea ce corespunde unei translaţii a axelor spre sud şi vest. Acest lucru se face pentru a avea coordonate pozitive.

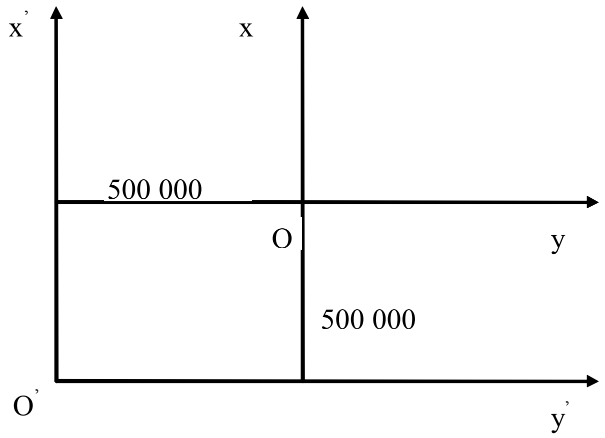


Fig. 6.8. Translaţia sistemului de axe de coordonate rectangulare plane în proiecţia Sterografică 1970

Coordonatele x',y' afectate de translaţii pot fi utilizate pentru o serie de calcule cum sunt:

- calculul distanţei funcţie de coordonate;
- calculul orientărilor funcţie de coordonate;
- calculul ariei unei parcele în funcţie de coordonatele plane ale colţurilor ei.

Este complet interzis să se folosească coordonatele x', y' care au translaţii pentru o serie de calcule cum sunt:

- transformarea coordonatelor plane stereografice în coordonate geografice;
- transcalcularea coordonatelor din proiecţie stereografică în proiecţie Gauss-Kruger sau în alte proiecţii;
- reducerea direcţiilor sau distanţelor la planul de proiecţie .

2 Transformări de coordonate în proiecţia Stereografică 1970

A. Transformarea coordonatelor geografice (φ,λ) de pe elipsoidul de referinţă în coordonate plane Stereografice 1970 (x, y):

Această transformare se face cu ajutorul unor formule cu coeficienţi constanţi, în funcţie de latitudinea $\Delta\varphi$ şi de longitudinea **l** dintre punctul considerat (φ,λ) şi punctul central al proiecţiei (polul Q_0 cu coordonatele geografice φ_0,λ_0).
În acest calcul se pot deosebi două etape:

- transformarea coordonatelor geografice în coordonate stereografice pe planul tangent în Q_0 (acest calcul este cel mai laborios);
- transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în planul secant, paralel cu planul tangent; această a doua etapă, extrem de simplă, se realizează prin înmulţirea coordonatelor din planul tangent cu un coeficient de reducere a scării, care este subunitar şi depinde de distanţa dintre planul tangent şi cel secant.

Formulele de calcul s-au stabilit după o metodă propusă de academicianul bulgar V.K.HRISTOV, metoda care, în esenţă, constă în dezvoltarea în serie Taylor, în jurul punctului central (φ_0, λ_0), a elementelor care depind de latitudine. Derivatele respective, calculate în punctul central (φ_0, λ_0) apar sub forma unor constante, care se grupează convenabil sub formă de coeficienţi constanţi.
Reprezentarea trebuie să satisfacă urmatoarele condiţii:

- să fie conformă;
- meridinul λ_0 care trece prin polul Q_0 (centrul proiecţiei) să se reprezinte printr-o dreaptî care se ia ca axă xx', cu sensul pozitiv spre nord, fiind şi axă de simetrie;
- originea O a sistemului de coordonate stereografice este imaginea plană a punctului central, iar un punct oarecare B (φ,λ) situat pe meridianul central λ_0 are coordonata x_m dată de relaţia:

$$x_m = 2R_0 tg\beta/2R_0$$

unde,
R_0 - este raza sferei Gauss la latitudinea φ_0;
β - este un arc de meridian, a cărui lungime este egală cu cea a arcului de meridian de pe elipsoid,cuprins între paralele φ_0 şi φ.
Prin urmare, pentru un elipsoid dat şi o latitudine φ_0 stabilită pentru centru de proiecţie, coeficienţii utilizaţi în formulele pentru calculul coordonatelor plane stereografice 1970, au valori constante. În cazul de faţă, pentru elipsoidul Krasovski şi latitudinea $\varphi_0 = 46^0$ s-au calculat urmatoarele valori numerice pentru coeficientii constanţi prezentate în foia de calcul, în coloanele 2, 3, 4, 5 din tabelul 1 şi în coloanele 2, 3, 4 din tabelul doi.
Pentru ţara noastră, $\Delta\varphi''$ şi mai ales $(\lambda - \lambda_0)''$ pot atinge valori mai mari decât 10 000''. Astfel de numere ridicate la puterile 5 şi 6 devin incomode, din cauza mărimii lor, în timp ce coeficienţii constanţi sunt foarte mici. În scopul evitării acestui inconvenient, în formule s-a considerat:

$$f = 10^{-4}\Delta\varphi''$$
$$l = 10^{-4}(\lambda - \lambda_0)''$$

Aceste valori ale coeficienţilor constanţi, pentru transformarea coordonatelor geografice (φ,λ) în coordonate plane stereografice pe un plan tangent, la latitudinea $\varphi_0 = 46^0$, au fost calculate la I.G.F.C.O.T. (Bucureşti).
Practic, procedeul de calcul pentru x este următorul:
Elementele coloanei 1 se înmulţesc cu elementele corespunzătoare (de pe aceeaşi linie) din coloana 2, se însumează algebric obţinându-se valoarea S_0, care se înmulţeşte cu primul element din coloana 6, obţinându-se primul rezultat parţţal r_0. Asemănător, din coloanele 1 şi

3, 1 şi 4, 1 şi 5, 1 şi 6 se obţin S_2, S_4, S_6 care se înmulţesc cu elementele coloanei 6 rezultând r_2, r_4, r_6.
Însumând algebric rezultatele din coloana 7, se obţine valoarea lui x_{tg}, din planul tangent de proiecţie stereografică apoi, prin înmulţirea acestuia cu coeficientul c = 0, 999 750 000, se obţine valoarea lui x în planul secant de proiecţie stereografică 1970.
Calculul lui y se face asemănător cu cel a lui x.
Procedeul asigură o precizie de ordinul a 1 cm pentru orice punct din ţara noastră.

B. Transformarea coordonatelor rectangulare plane Stereografice 1970 (x,y) în coordonate geografice (φ,λ), pe elipsoidul de referinţă:

Acest calcul presupune două etape:

- etapa întâi, de transformare a coordonatelor stereografice din planul secant în planul tangent, paralel cu cel secant, prin înmultirea cu un coeficient supraunitar:

$c' = 1,000\,250\,063$

- etapa a doua, mai laborioasă, constă în transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent, în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul de referinţă; această problemă se rezolvă cu ajutorul unor formule cu coeficienţi constanţi, stabilite într-un mod asemănător, în principiu, cu formulele pentru calculul coordonatelor plane stereografice.

Se calculează întâi diferenţa de coordonate Δφ şi l faţă de centrul proiecţiei (φ_0,λ_0), apoi coordonatele geografice:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$
$$\lambda = \lambda_0 + l \qquad 5.19$$

Pentru elipsoidul Krasovski şi $\varphi_0 = 46^0$, coeficienţii constanţi sunt prezentaţi în tabelele 2, 3, 4 din foaia de calcul de mai jos.
Valorile pentru coeficienţii constanţi au fost calculate la I.G.F.C.O.T. (Bucureşti).
Procedeul de calcul pentru φ şi λ este acelaşi ca în cazul calculului coordonatelor plane rectangulare.

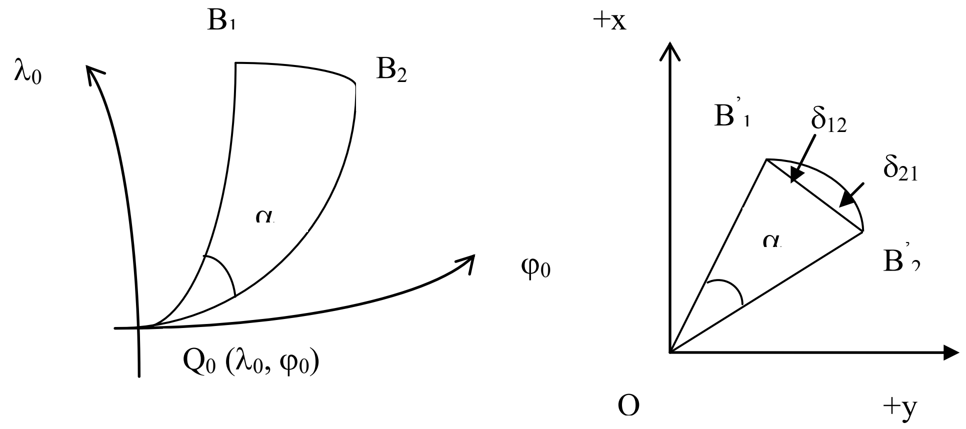
C. Transcalcularea coordonatelor plane Gauss în coordonate plane stereografice 1970 şi invers:

Transformarea coordonatelor plane Gauss în oordinate plane stereografice 1970 se face prin intermediul coordonatelor geografice.
Metoda presupune două etape:
a) În prima etapă, se transformă coordonatele plane Gauss în oordinate pe elipsoidul de referinţă;
b) În a doua etapă, coordonatele geografice de pe oordinat se transformă în oordinate plane stereografice 1970.
Pentru transcalcularea coordonatelor plane stereografice 1970 în oordinate plane Gauss se procedează în acelaşi fel ca şi în primul caz.
Calculul este oordi şi omogen pentru toată ţara deoarece ambele proiecţii folosesc acelaşi oordinat – Krasovski 1940 – cu aceeaşi orientare.
În producţie, pentru unele lucrări mai puţin pretenţioase sub aspectul preciziei, se aplică formulele de transcalculare din topografie, folosind drept puncte cu oordinate iî ambele

sisteme de proiecţie colţurile trapezelor, pentru care atât coordonatele plane Gauss, cât şi cele plane stereogarfice 1970 se extrag din tabele.
Această metodă este mai rapidă, însă cea mai riguroasă este metoda prin intermediul coordonatelor geografice.

3 Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie Stereografică 1970

Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie este operaţia de corectare a direcţiilor măsurate în reţeaua geodezică de stat prin aplicarea unor corecţii unghiulare δ numite "corecţii de reducere la coardă". Această operaţie este necesară deoarece, în planul de proiectţe, imaginile plane ale laturilor triunghiurilor geodezice nu sunt linii ci sunt curbe.
Pentru stabilirea formulei de calcul a acestei corecţii, se consideră pe sfera de rază medie R_0 triunghiul sferic $B_1B_2Q_0$, în care B_1 şi B_2 sunt extremităţile unei direcţii măsurate (capetele unei laturi de triangulaţie), iar $Q_0(\lambda_0,\varphi_0)$ este polul proiecţiei.



a) pe elipsoid (sferă) b) în planul de proiecţie

Fig. 6.9 Reprezentarea liniilor geodezice (pe elipsoid şi în planul de proiecţie)

Pentru reprezentarea în plan a acestui triunghi sferic se au în vedere urmatoarele proprietăţi ale proiecţiei stereografice:

- proiecţia este conformă;
- cercurile mari care trec prin Q_0 (verticaluri) se reprezintă prin segmente de dreaptă care trec prin originea O;
- un arc de cerc se va reprezenta tot printr-un arc de cerc (excepţie fac verticalurile).

Imaginile plane ale vârfurilor triunghiului sferic sunt punctele B_1', B_2' şi O. Arcele de cerc B_1Q_0 şi B_2Q_0, aparţinând unor verticaluri ale polului Q_0, se reprezintă prin dreptele $B_1'O$ şi $B_2'O$, care fac între ele un unghi α, egal cu cel corespunzător de pe sferă, iar linia geodezică

B_1B_2 de pe sfera, fiind un arc mare care nu trece prin polul Q_0, se reprezintă în plan prin arcul de cerc $B_1'B_2'$ cu concavitatea spre interiorul triunghiului.
În punctele B_1' şi B_2' el face cu coarda sa unghiurile:

$$|\delta_{1,2}| = |\delta_{2,1}|$$

egale în valoare absolută cu corecţiile de reducere la coarda ale directiilor B_1B_2 şi respectiv B_2B_1.

Suma unghiurilor triunghiului sferic $B_1B_2Q_0$ este egală cu $200^G + \varepsilon$, unde ε este excesul sferic. Proiectia fiind conformă, ungiurile imaginii plane a acestui triunghi sferic trebuie să fie nedeformate, adică :

$$200^G + |\delta_{1,2}| + |\delta_{2,1}| = 200^G + \varepsilon$$

$$|\delta_{1,2}| = |\delta_{2,1}| = \varepsilon/2$$

$$\varepsilon = \frac{S}{R_0^2}, \qquad \varepsilon'' = \rho'' \frac{S}{R_0^2}$$

în care, S este suprafaţa triunghiului sferic $B_1B_2Q_0$.
Corecţia de reducere la coardă având valori relativi mici, s-a înlocuit suprafaţa triunghiului sferic cu suprafaţa triunghiului plan $B_1'B_2'O$.

$$S \approx S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Având în vedere faptul că orientările şi gradaţiile cercurilor orizontale ale teodolitelor cresc în sensul mişcării acelor de ceasornic, rezultă că pentru direcţia B_1B_2 semnul corectţei trebuie să fie pozitiv în B_1' şi negativ în B_2':

$$\delta_{1,2}'' = -\delta_{2,1}'' = \frac{\rho''}{4R_0^2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Prin analiza unui caz concret, se vede că formula de calcul a corecţiei de reducere la coardă asigură şi semnul corecţiei.
O examinare a diverselor situaţii din ţara noatră indică folosirea razei R_0 la latitudinea de 46^0: $R_0(46^0) = 6\ 378\ 956$m.
Termenul din faţa parantezei fiind constant rezultă:

- pentru gradaţia centesimală:

$$\delta_{1,2}'' = -\delta_{2,1}'' = 10^{-10}\ 39{,}113(x_1y_2 - x_2y_1)$$

- pentru gradaţia sexagesimală:

$\delta_{1,2}'' = - \delta_{2,1}'' = 10^{-10}\ 12{,}673(x_1y_2 - x_2y_1)$

Calculul corecţiilor de reducere la coardă impune cunoaşterea unor coordonate aproximative (cu aproximaţia de ordinul metrilor) atât ale punctului de staţie, cât şi ale punctului vizat. În cazul punctelor noi, procesul este iterativ în sensul că: se calculează într-o primă etapă coordonatele provizorii cu ajutorul direţtiilor nereduse, cu ajutorul acestora se calculează corecţiile de reducere la coardă, direcţiile reduse vor folosi apoi la calculul unui nou set de coordonate.
Procedeul si formulele de calcul ale corectiei de reducere la coarda asigura o precizie de $0{,}01''$.
Corectitudinea corecţiilor δ se poate verifica pe triunghiuri, cu ajutorul triunghiului sferic.

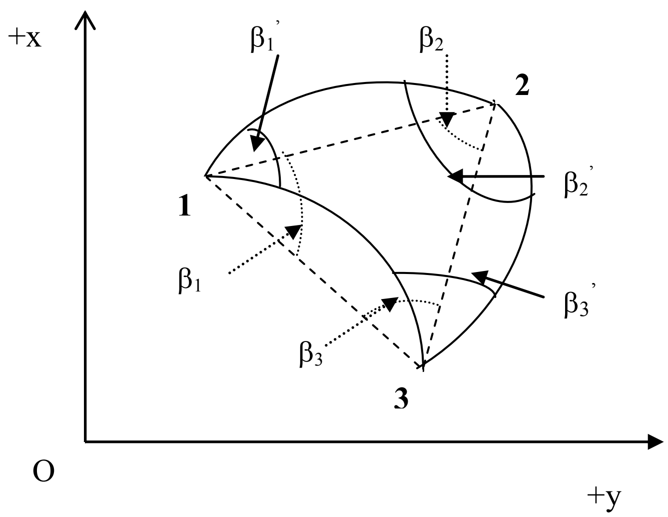


Fig.7.1 Verificarea corecţiilor de reducere la coardă

$(\alpha_{i,j})_r = (\alpha_{i,j})_m + \delta_{i,j}$

unde,

$(\alpha_{i,j})_r$ - este direcţia redusă la coardă;
$(\alpha_{i,j})_m$ - este direcţia măsurată, neredusă la coardă.

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^0 + \varepsilon$

$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' = 180^0$

unde,

β - este unghiul obţinut din direcţiile reduse la coardă;
$\beta^{'}$ - este unghiul obţinut din direcţiile măsurate.

Va rezulta relaţia:
$(\delta_{13} - \delta_{12}) + (\delta_{21} - \delta_{23}) + (\delta_{32} - \delta_{31}) = -\varepsilon$
Regulă practică de verificare: *În orice triunghi geodezic, suma corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie pentru cele trei unghiuri trebuie să fie egală cu excesul sferic al triunghiului respectiv luat cu semn schimbat.*

4. Reducerea distanţelor la planul de proiecţie Stereografică 1970

Calculul respectiv se poate separa în două etape:

1. reducerea unei distanţe de pe elipsoid (sfera terestră) la planul tangent în $Q_0(\varphi_0,\lambda_0)$;
2. reducerea distanţei din planul tangent în Q_0 la planul secant, paralel cu cel tangent.

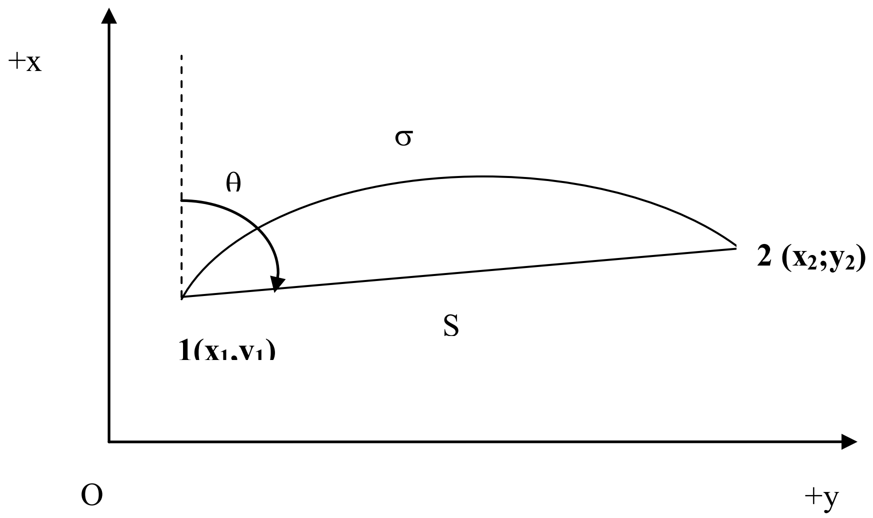


Fig. 7.2. Imaginea plană a linie geodezice de pe elipsoid

Curba 1-2 are lungimea τ şi reprezintă imaginea plană a liniei geodezice. Coarda 1-2 are lungimea S. Pe elipsoid (sfera terestră) linia geodezică are lungimea s.
In aproximaţia τ = S, se pune problema găsirii unei legături între s şi S.
Plecând de la expresia modulului de deformaţie liniară din proiecţia stereografică pe plan tangent se va ajunge la expresia:

$$\frac{s}{S} = \left[1 - \frac{1}{4R_0^2}(x_m^2 + y_m^2 + \frac{S^2}{12})\right]$$

Dezvoltând paranteza după binomul lui Newton la puterea -1 şi înlocuind $S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, distanţa S redusă la planul tangent se calculează cu formula:

$$\frac{s}{S} = \left[1 - \frac{x_m^{\ 2} + y_m^{\ 2}}{4R_0^{\ 2}} + \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{48R_0^{\ 2}}\right]$$

unde,
x_m, y_m sunt coordonatele medii ale unui punct situat la mijlocul segmentului 1-2
Δx, Δy sunt diferenţele de coordonate între punctele 1şi 2.

Distanţa S_0 redusă la planul secant se calculează cu relaţia:

$S_0 = Sc$

în care c este coeficientul subunitar utilizat pentru transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în cel secant (c = 0,999 750 000).
Coordonatele plane x_m, y_m şi diferenţele de coordonate
$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = y_2 - y_1$
este suficient să se cunoască cu o aproximaţie de ordinul metrilor.
Valoarea

$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

necesară pentru calculul ultimului termen corectiv poate fi înlocuită cu valoarea s^2 de pe elipsoid sau sferă.

5. Deformaţii în proiecţia Stereografică 1970

Proiecţia stereografică 1970, fiind o proiecţie conformă, nu deformează unghiurile. Se deformează, în schimb, lungimile şi ariile.

Deformaţiile distanţelor

Pornind de la formulele stabilite la prezentarea unei proiecţii stereografice a unei sfere pe un plan tangent va rezulta:

$\delta = A$

$\rho = 2R_0 tg\frac{L}{2R_0}$

$tg\, x = x + 1/3\, x^3 + 2/15\, x^5 + \ldots\ldots\ldots$

$$tg\frac{L}{2R_0} = \frac{L}{2R_0} + \frac{1}{3}\frac{L^3}{8R_0^{\ 3}} + \frac{2}{15}\frac{L^5}{216R_0^{\ 5}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$tg\frac{L}{2R_0} = \frac{1}{2R_0}\left(L + \frac{L^3}{12R_0^{\ 2}} + \frac{L^5}{120R_0^{\ 4}}\right)$$

$$\rho = 2R_0 \frac{1}{2R_0}(L + \frac{L^3}{12R_0^2} + \frac{L^5}{120R_0^4})$$

$$\rho = L + \frac{L^3}{12R_0^2} + \frac{L^5}{120R_0^4}$$

Deformaţia totală va fi:

$$\rho - L = \frac{L^3}{12R_0^2} + \frac{L^5}{120R_0^4}$$

Dacă notăm deformaţia liniară din planul tangent cu μ_T şi pe cea din planul secant cu μ_S se obţine:

$$\mu_T = \frac{d\rho}{dL} = \frac{dL + \frac{L^2}{4R_0^2}dL + \frac{L^4}{24R_0^2}dL}{dL}$$

$$\mu_T = 1 + \frac{L^2}{4R_0^2} + \frac{L^4}{24R_0^4},$$

ultimul termen din relatia de mai sus poate fi neglijat deoarece:

L = 400km
R_0 = 6 000km

Dacă pentru calculul termenului $L^2/4R_0^2$ se face aproximarea:

$L^2 \approx \rho^2 = x^2 + y^2$,

atunci se obţine :

$$\mu_T = 1 + \frac{\rho^2}{4R_0^2} + \frac{\rho^4}{24R_0^4} = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4R_0^2}$$

în care x şi y sunt coordonatele rectangulare plane stereografice ale punctului în care se calculează valoarea lui μ.
Calculul deformaţiei liniare în plan secant se face folosind coeficientul de reducere la scară c = 0,99975:

$\mu_S = \mu_T c$
$x_{tg} = x_{sec}/c$

$$\mu_S = c + \frac{(x^2 + y^2)_{sec}}{4cR_0^2}$$

$y_{tg} = y_{sec}/c$
Pentru latitudinea medie a ţării noastre, $\varphi_0 = 46^0$

$\mu_S = 0{,}99975 + 6{,}145\ 388\ 10^{-15}(x^2 + y^2)_{sec}$

Deformaţiile liniare relative se calculează cu formulele:

- în plan tangent:

$$D_t = \mu_T - 1 = +\frac{(x^2 + y^2)_{tg}}{4R_0^2} = \frac{\rho_{tg}^2}{4R_0^2}$$

- în plan secant

$$D_s = \mu_S - 1 = (c-1) + \frac{(x^2 + y^2)_{sec}}{4cR_0^2}$$

$D_s = -0{,}000\ 25 + 6{,}145\ 388\ 10^{-15}(x^2 + y^2)_{sec}$

Deformaţiile ariilor:

Deformaţiile areolare au acelaşi semn cu cele liniare, iar valoarea modulului de deformaţie areolară poate fi calculată cu ajutorul relaţiei:

$p = \mu^2$

Concluzii privind deformaţiile în proiecţia Stereografică 1970

În planul tangent, toate deformaţiile sunt oordina şi sunt direct proporţionale cu pătratul distanţei de la oordina considerat la originea axelor.
În planul secant, există atât deformaţii pozitive cât şi deformaţii negative. Fiind vorba de un plan secant, există un cerc de deformaţie nulă, cu raza de aproximativ 201,7km.
În oricare alt punct din interiorul cercului de deformaţie nulă deformaţiile liniare şi areolare sunt negative. Cele mai mari deformaţii negative sunt în polul Q_0 (originea axelor de oordinate plane) şi au valoarea de -25 cm/km.
În oricare alt punct oordin în afara cercului de deformaţie nulă deformaţiile sunt oordina şi cresc pe măsură ce se măreşte distanţa faţă de acest cerc. Pe o mare parte din regiunea de frontieră a ţării deformaţiile au valori în jurul a 20 cm/km. În extremitatea vestică a ţării, spre localitatea Beba Veche şi în estul Dobrogei (teritorii situate la circa 375 km faţăde oordina central) deformaţiile au valori de aproximativ 63,7 cm/km.
Izoliniile referitoare la deformaţii au aspectul unor cercuri concentrice cu centrul în originea axelor de oordinate plane.

6. Cadrul şi nomenclatura foilor planurilor şi hărţilor topografice în proiecţia Stereografică 1970

În vederea simplificării racordării între vechile foi de plan executate în proiecţia Gauss şi cele noi, care se execută în proiecţie stereografică, s-au pastrat cadrul geografic şi nomenclatura trapezelor la fel ca şi în proiecţia Gauss.

Hărţile şi planurile topografice au, în general, un cadru geografic format din imaginile plane ale unor arce de meridiane şi paralele, care. pe elipsoidul de rotaţie, delimitează trapeze curbilinii, denumite în mod curent “trapeze’.

Fiecare trapez are o anumită nomenclatură şi se reprezintă pe o foaie de hartă separată.

Cunoscând regulile după care se face nomenclatura trapezelor, dacă se dă nomenclatura unui trapez se pot deduce, fara dificultăţi:

- scara hărţii (planului)
- coordonatele geografice ale colţurilor
- nomenclatura trapezelor vecine

Pentru că dimensiunile şi nomenclatura trapezelor sunt strâns legate de scară, a fost necesar să se standardizeze valorile scărilor asfel că, se folosesc urmatoarele scări standard:

1:1 000 000, 1:500 000, 1:200 000, 1;100 000, 1:50 000, 1;25 000, 1:10 000, 1:5 000, 1:2 000, ultimele trei sunt scările planurlor topografice de bază ale ţării.

Cursul nr.6 si 7
PROIECŢII AZIMUTALE PERSPECTIVE

1. Caracteristici generale

Proprietăţile generale ale proiecţiilor azimutale sunt valabile şi în cazul proiecţiilor azimutale perspective.

Caracteristica de bază a acestor proiecţii este faptul că utilizează legile perspectivei liniare. În legătură cu acestea se fac următoarele precizări:

- Pământul se consideră în general sferă de rază R;
- planul de proiecţie, pe care se face reprezentarea, se mai numeşte şi *planul tabloului*;
- diametrul care trece prin polul Q_0 (λ_0,φ_0), pol ales aproximativ în mijlocul teritoriului de reprezentat, se numete *diametru principal*;
- pe diametrul principal sau pe prelungirea lui se alege un *punct de vedere* (V), a cărui distanţă faţă de centrul sferei se notează prin ***D***;
- planul de proiecţie (planul tabloului) este *perpendicular pe diametrul principal*, iar distanţa dintre punctul de vedere şi planul de poiecţie se notează prin ***K***;
- dreptele care pornesc din punctul de vedere şi trec prin punctele de pe suprafaţa sferei terestre, se numesc *drepte proiectante*;
- imaginea plană a unui punct oarecare B de pe suprafaţa terestră este un punct B' în care dreapta proiectantă care trece prin B înteapă planul tabloului.

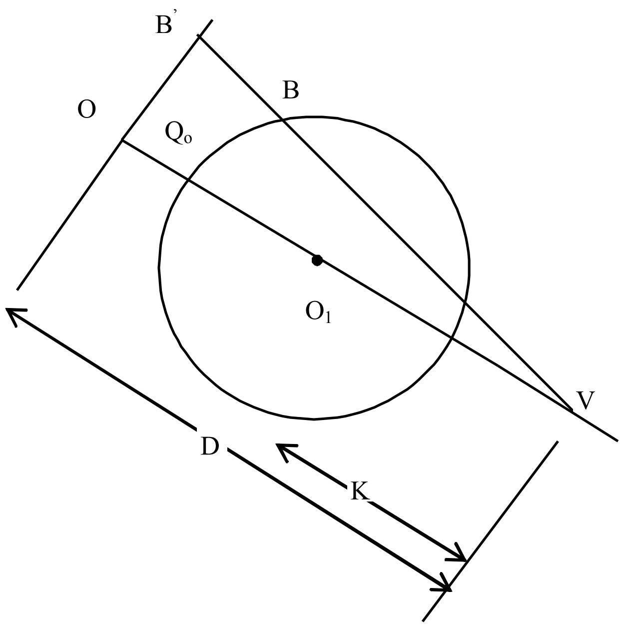


Fig.6.1 Semnificaţia parametrilor D si K

2. Clasificarea proiecţiilor azimutale perspective

1. După valoarea latitudinii φ_0 a polului Q_0:

- drepte;

- oblice;
- transversale.

2. După caracterul deformaţiilor:

- conforme;
- echivalente;
- echidistante.

3. După poziţia planului de proiecţie faţă de suprafaţa sferei terestre:

- pe plan tangent;
- pe plan secant.

4. După distanţa D, dintre punctul de vedere V şi centrul O_1 al sferei terestre:

- centrale (V_1), când $D = 0$;
- interioare (V_2), când $0 < D < R$;
- stereografice (V_3), când $D = R$;
- exterioare (V_4), când $R < D <$
- ortografice (V_5), când $D = \infty$

În figura de mai jos se arată poziţiile punctului de vedere V în aceste cinci categorii de proiectii azimutale perspective şi poziţiile imaginilor $B_1^{'}$, $B_2^{'}$... $B_5^{'}$ ale aceluiaş punct B de pe sfera terestră, utilizând legile perspectivei liniare şi luând planul de proiecţie tangent la sferă.

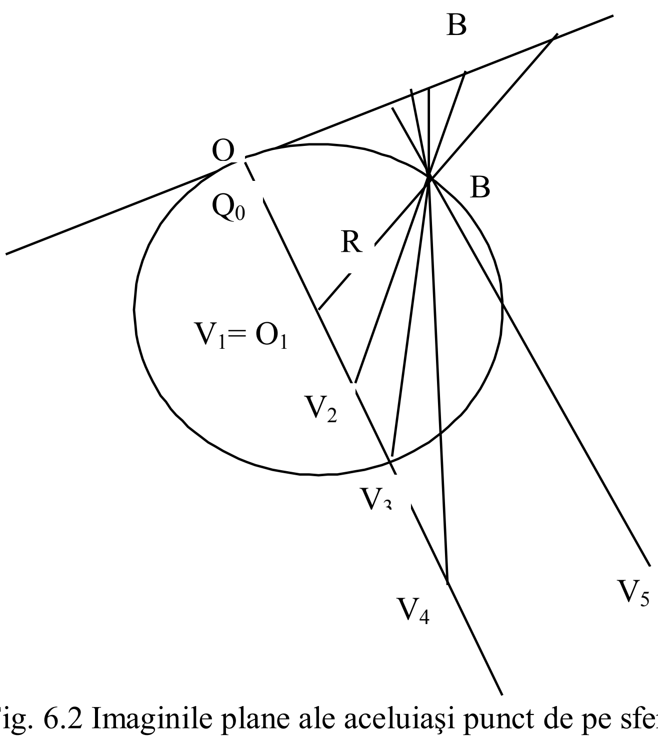


Fig. 6.2 Imaginile plane ale aceluiaşi punct de pe sferă,
în diverse proiecţii azimutale perspective

În proiectiile azimutale perspective, poziţia reciprocă dintre punctul de vedere V, sfera terestră şi planul de proiecţie (planul tabloului) se defineşte prin:

- coordonatele geografice λ_0,φ_0 ale polului Q_0 prin care trece diametrul principal;

- distanţa D dintre punctul de vedere şi centrul O_1 al sferei terestre;

- distanţa K dintre punctul de vedere V şi planul de proiecţie (planul tabloului).

Aceşti parametrii odată stabiliţi, devin constantele proiecţiei şi deosebesc între ele diversele proiecţii azimutale perspective.

3. Formule generale pentru calculul coordonatelor plane polare şi al celor plane rectangulare în proiecţiile azimutale perspective

Se consideră cazul general al unei proiecţii azimutale oblice perspective.

Dacă se secţionează sfera terestră de raza R cu planul verticalului unui punct oarecare B de pe sferă, va rezulta situatia din figura de mai jos, în care:

- V este o poziţie oarecare pe care o are punctul de vedere pe dreapta care conţine diametrul principal Q_0Q;
- O şi B' sunt imaginile plane ale punctelor Q_0 şi respectiv B în planul de proiecţie;
- $OB' = \rho$, reprezintă raza vectoare a punctului B' din plan;
- Pe sferă, punctul B are distanţa zenitala Z;
- MB = RsinZ, reprezintă raza almucantaratului care trece prin punctul B;
- $D = VO_1$, reprezintă distanţa dintre punctul de vedere şi centrul sferei;
- K = VO, reprezintă distanţa dintre punctul de vedere şi plan.

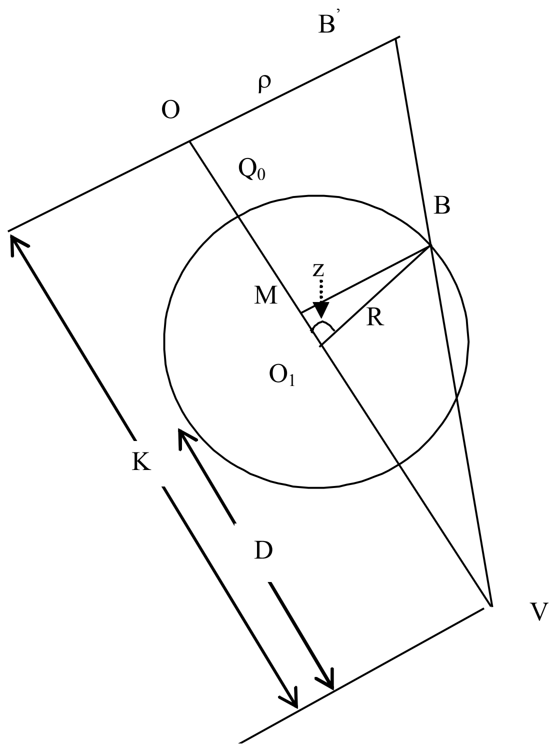


Fig. 6.3 Secţiune prin sfera cu planul verticalului unui punct oarecare

Din triunghiurile asemenea $OB'V$ şi MBV rezultă:

$$\frac{OB'}{MB} = \frac{OV}{MV} \qquad 5.10$$

Adică,

$$\frac{\rho}{R\sin Z} = \frac{K}{D + R\cos Z} \qquad 5.11$$

Şi în cazul proiecţiilor azimutale perspective se pastrează formulele generale pentru calculul coordonatelor plane şi a modulilor de deformaţie pentru proiecţiile azimutale. Ţinând cont de acestea, se obţin următoarele formule generale pentru calculul coordonatelor plane polare:

$\delta = A$

$$\rho = \frac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}$$

Ţinând cont de aceste formule de calcul precum şi de legătura dintre coordonatele plane polare şi coordonatele plane rectangulare, se obţin următoarele formule generale pentru calculul coordonatelor rectangulare plane în orice proiecţie azimutală perspectivă:

$$x = \rho\cos\delta = \frac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}\sin Z\cos A$$

$$y = \rho\sin\delta = \frac{KR\sin Z}{D + R\cos Z}\sin Z\sin A$$

Unde, D şi K sunt constante care caracterizează natura proiecţiei perspective, iar A si Z sunt coordonate sferice polare care definesc pe sfera terestră poziţia punctului considerat, în raport cu polul $Q(\lambda_0,\varphi_0)$ al proiecţiei.

4. PROIECŢIA STEREOGRAFICĂ 1930 (1933) PE PLAN UNIC SECANT BRASOV

Caracteristici generale

În anul 1930 s-a hotărât adoptarea, pentru ţara noastră, a unei proiecţii stereografice pe plan unic secant denumită şi "pe planul secant Braşov", având ca pol Q_0 (punct central) un punct fictiv (nematerializat în teren), situat aproximativ la 30 km nord-vest de Braşov.
Coordonatele geografice ale punctului central au valorile:
$\varphi_0 = 51^G\ 00^c\ 00^{cc},000$ ($45^0 54' 00'',0000$)
$\lambda_0 = 28^G\ 21^c\ 00^{cc},510$ est Gr. ($25^0 23' 32'',8722$)
Precizarea "plan unic secant Braşov" se face deoarece, înainte de data introducerii acestei proiecţii, în anumite zone ale ţării se lucra pe plan tangent Budapesta (în vestul ţării) sau în proiecţie stereografică Târgu Mureş.
Harta ţării, în această proiecţie stereografică, urma să se sprijine pe o triangulaţie nouă, motiv pentru care s-a adoptat elipsoidul de referinţă Hayford orientat pe Observatorul Astronomic

Militar din Bucureşti. În punctul astronomic fundamental s-au facut măurători astronomice pentru determinarea latitudinii, longitudinii şi azimutului care au fost transmise în reţeaua geodezică de stat.
Proiecţia fiind stereografică rezultă că, din punct de vedere al deformaţiilor, se înscrie în seria proiecţiilor conforme ceea ce permite ca măsurătorilegeodezice efectuate să poată fi prelucrate direct în planul de proiecţi, după aplicarea prealabilă a unor corecţii de reducere la paln
Sistemul de axe de coordonate plane stereografic a fost astfel ales încât originea să reprezinte imaginea plană a polului $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$, axa Oy să se gasească pe direcţia nord-sud, cu sensul pozitiv spre nord, iar axa Ox pe direcţia est-vest, cu sensul pozitiv spre est.

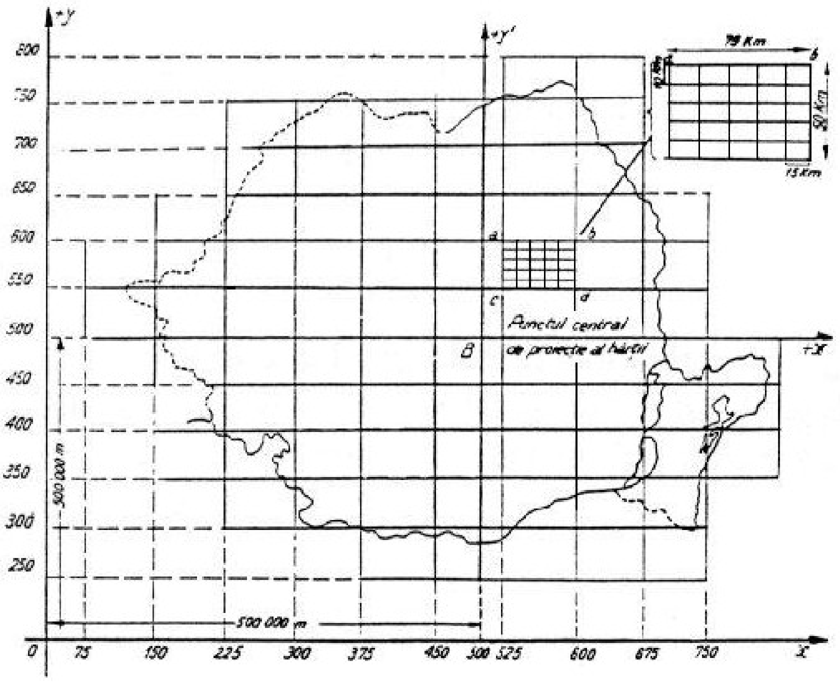


Fig.6.4 Sistemul de axe de coordonate în proiecţia Stereografică 1930 şi sistemul de împărţire pe foi

Pentru unele nevoi practice, în scopul de a nu se lucra cu coordonat negative, s-a adoptat o translaţie a sistemului de axe de coordonate cu 500 000 m spre vest şi respectiv cu 500 000 m spre sud, astfel că, pentru teritoriul întregii ţări coordonatele plane deveneau positive (fig.5.8).
De subliniat faptul că aceste coordonate care au suferit translaţii nu se puteau utiliza pentru orice calcul. De exemplu, nu se puteau utiliza pentru calculul corecţiei de reducere la coarda, calculul corecţiei de reducere a distanţelor la planul de proiecţie, calculul deformaţiilor etc.
Sunt folosite două plane de proiecţie: un plan secant şi unul tangent. Pentru un teritoriu reprezentat în cele doua plane se obţin imagini asemenea, imaginea din planul secant fiind mai mică decat cea din planul tangent.

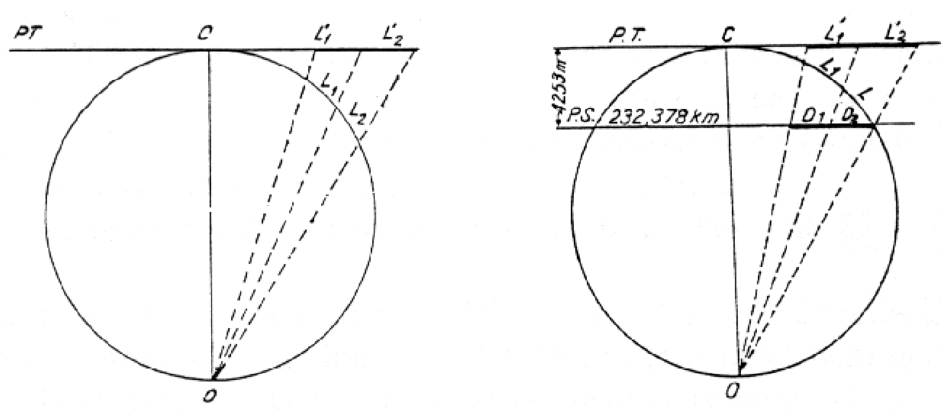


Fig. 6.5. Utilizarea celor două plane
în proiecţia Stereografică 1930

Transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în planul unic secant Braşov se realizează prin înmulţirea coordonatelor din planul tangent cu coeficientul c de reducere a scării, având valoarea:

c = 1 - 1/3000 = 0. 999 666 67

Transformarea coordonatelor stereografice din planul unic secant în planul tangent se face prin înmulţirea celor din planul secant cu coeficientul c' care are valoarea:

c' = 1/c = 1.000 333 44

Deformaţii în proiecţia Steraografică 1930

În planul tangent deformaţiile liniare şi areolare din polul Q_0 sunt nule, iar în toate celelalte puncte ale planului se produc deformaţii pozitive care cresc direct proporţional cu pătratul distanţei faţă de polul Q_0 (punctul central). De exemplu, la distanţa de 330km faţă de polul proiecţiei, deformaţia relativă este de 67 cm/km.În scopul micşorării deformaţiilor s-a adoptat atunci un plan secant în locul celui tangent. În acest caz apare un cerc de deformaţie nulă cu raza de 233 km. În planul secant al proiecţiei stereografice deformaţiile liniare şi cele areolare sunt negative pentru zonele situate deasupra planului secant (în interiorul cercului de deformaţie nulă) şi pozitive pentru zonele situate sub planul secant (în afara cercului de deformaţie nulă). Deformaţiile cresc în valoare absolută pe masură ce se măreşte distanţa faţă de cercul de secţionare.
Deformaţiile negative maxime sunt în polul Q_0 (în originea axelor) şi ating valoarea - 33,33 cm/km.
Spre zonele limitrofe ale ţării, de exemplul la distanţa de 330 km faţă de originea axelor (faţă de polul Q_0), deformaţiile din proiecţia stereografică pe planul secant Braşov au valoarea de +33,56cm/km, iar la distanţa de 380 km ele ating valori de +55,39cm/km.

Secţiuni geodezice şi secţiunile topografice (cadastrale) în proiecţia Stereografică 1930

O hartă a ţării la scara 1:20 000 realizată pe o foaie unică ar avea dimensiunile de aproximativ 40x30 m (Fig.5.8). Din această cauză, ar fi foarte greu de lucrat cu ea şi atunci s-a recurs la împărţirea întregii suprafeţe a ţării în secţiuni- prin ducerea de drepte paralele la cele două axe de coordonate *X* şi *Y*.
Trasându-se paralele la axele de coordonate pe direcţia abscisei din 75 în 75 km, iar pe direcţia ordonatei din 50 în 50 km, s-a obţinut scheletul hărţii ţării la scara 1:100 000. Un dreptunghi rezultat din această trasare a paralelelor reprezintă o hartă topografică la scara 1:100 000. Dacă se trasează paralele pe direcţia absciselor din 15 în 15 km, iar pe direcţia ordonatei din 10 în 10 km, se obţine scheletul hărţii de bază a României la scara 1:20 000.
În harta topografică la scara 1:100 000 se includ deci 25 de hărţi la scara
1:20 000.
În cazul în care se trasează paralelele din 8 în 8 km pe direcţia *X* şi din 10 în 10 km pe direcţia *Y* , se obţine scheletul hărţii ţării în secţiuni geodezice sau foile fundamentale ale planurilor cadastrale de dimensiunile 8x10 km.
Prin împărţirea secţiunii geodezice în 5 părţi egale pe orizontală şi 8 părţi pe verticală se obţin 40 de secţiuni cadastrale.

O secţiune geodezică = 8 km x 10 km = 80 km^2 = 8 000 ha
O secţiune geodezică = 10 secţiuni cadastrale
O secţiune cadastrală = 1 600 m x 1 250 m = 20 ha.

Formatul hărţilor în această proiecţie este dreptunghiular.

ELEMENTELE CARACTERISTICE PROIECŢIEI STEREO' 1970

1 Caracteristici generale

În septembrie 1970, prin decretul nr.305 "*cu privire la activitatea geodezică, topo-fotogrametricăşsi cartografică, precum şi la procurarea, deţinerea şi folosirea datelor şi documentelor rezultate din această activitate*" se prevedea ca:
"*Lucrările geodezice, topo-fotogrametrice şi cartografice necesare economiei naţionale se execută în proieţie stereografică 1970 şi sistem de cote de referiţă Marea Neagră".*
"Pentru nevoile de apărare şi securitate, precum şi pentru cele necesare activităţilor ştiiţifice, învăţământului, uzului public şi propagandei, aceste lucrări vor fi executate şi în alte sisteme de proiecţie".

Conform prevederilor decretului menţionat, obligaţia de a stabili parametrii care să caracterizeze noul "sistem de proiecţie stereografică 1970" i-a revenit Direcţiei de geodezie şi cadastru din Ministerul Agriculturii, Industriei Alimentare şi Apelor.
În 1972, au fot stabilite următoarele elemente care să caracterizeze proiecţia stereografică 1970:

- Se menţine elipsoidul de referinţă Krasovski (1940), orientat la Pulkovo ca şi în cazul proiecţiei Gauss-Kruger;
- 2) Polul Q_0 al proiecţiei, denumit şi "centrul proiecţiei" are coordonatele geografice:

$\varphi_0 = 46^o$ Lat. N
$\lambda_0 = 25^o$ est Greenwich

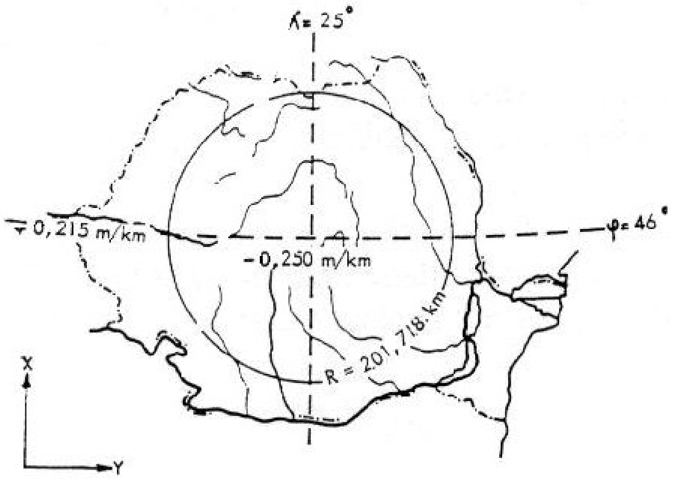


Fig. 6.6. Cercul de deformaţie nulă în proiecţia Stereografică 1970

Aceste coordonate diferă puţin de cele ale polului vechiului sistem de proiecţie stereografică (1933) utilizat în trecut în ţara noatră. Noul pol este deplasat spre nord-vest faţă de cel vechi.

➢ Întreaga ţară se reprezintă pe un singur plan de proiecţie, în care există un cerc de deformaţie nulă cu raza ρ_0 = 201,718 m ceea ce corespunde unui "sistem secant", în care există deformaţii pozitive şi negative, având cele mai mari deformaţii negative, de -25 cm/km, în punctul central.

➢ Sistemul de axe de coordonate rectangulare plane are ca origine imaginea plană a punctului central (fig. 5.10). Astfel:

- Axa Ox este o dreaptă reprezentând imaginea meridianului λ_0, ea fiind şi axă de simetrie. Are sensul pozitiv spre nord.
- Axa Oy este perpendiculară pe axa Ox şi are sensul pozitiv spre est.

Sistemul de coordonate plane xOy folosit de proiecţia stereografică 1970 este inversat faţă de sistemul de axe din vechea proiecţie sterografică 1930-1933.

➢ Paralel cu planul secant se utilizează şi un plan tangent la ellipsoid, acesta constituind o suprafaţă auxiliară. Imaginile din cele doua plane
sunt asemenea, cea din planul secant fiind mai mică (având scara micşorată). Pentru trecerea de la coordonatele din planul tangent la cele din planul secant se foloseşte un coeficient de reducere la scară:

$$c = 1 - \frac{1}{4000} = 0{,}99975$$

Relaţiile dintre coordonatele aceluiaşi punct din cele două plane de proiecţie se exprimă astfel:

$x_{sec} = x_{tg}c$
$y_{sec} = y_{tg}c$

➢ 6) Transformarea coordonatelor stereografice din planul secant în cel tangent se face înmulţind aceste coordonate cu coeficientul:

$$c' = \frac{1}{c} = 1,000\ 250\ 063$$

Sistemul de proiecţie stereografică 1970 a început să fie utilizat în lucrările de producţie curentă, din ţara noastră, din anul 1973.

Condiţii impuse reprezentării în proiecţia stereografică 1970:
Ecuaţiile hărţii au fost stabilite astfel încat reprezentarea să satisfacă următoarele condiţii de bază:

1. Să fie conformă;

2. Meridianul λ_o care trece prin punctul central se reprezintă printr-o dreaptă care este şi axă de simetrie şi axă Ox, iar originea O este imaginea plană a polului Q_0;

3. Orice punct situat pe meridianul central λ_o are abscisa:

$$x_m = sR_0\ tg\frac{\beta}{2R_0}$$

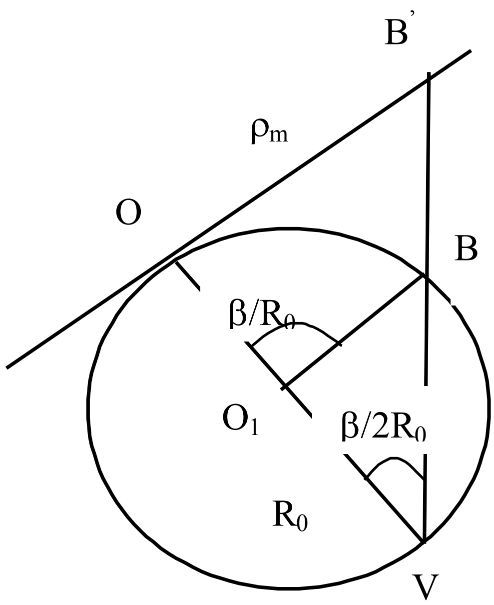


Fig.6.7. Secţiune meridiană prin sfera de rază R_0

În figura de mai sus este reprezentată secţiunea meridiană printr-o sferă de rază R_0 luată la latitudinea $\varphi_0 = 46^o$N.
B - este un punct oarecare pe sferă;
R_0- raza sferei la latitudinea $\varphi_0 = 46^o$N;

B' - imaginea lui B în planul tangent de proiecţie;
β - lungimea arcului de meridian măsurat pe elipsoid între paralelul de latitudine 46^0 şi paralelul de latitudine φ a punctului considerat.
Relaţia (5.15) împreună cu figura (5.11) amintesc de expresia razei vectoare ρ din proiecţia azimutală stereografică pe plan tangent.

- Coordonatele stereografice 1970 calculate în sistemul de axe de coordonate cu originea în centrul ţării sunt modificate cu + 500 000 m atât pe x cât şi pe y, ceea ce corespunde unei translaţii a axelor spre sud şi vest. Acest lucru se face pentru a avea coordonate pozitive.

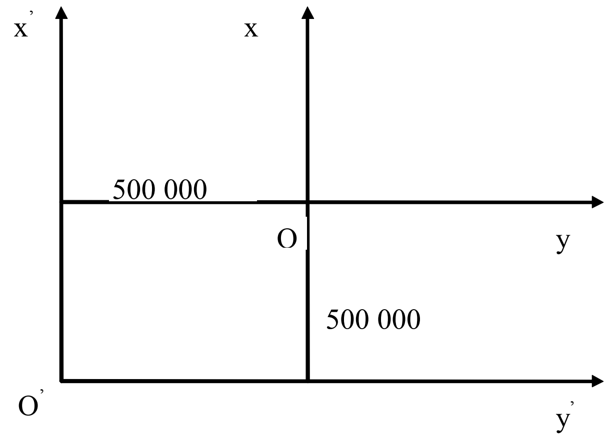


Fig. 6.8. Translaţia sistemului de axe de coordonate rectangulare plane în proiecţia Sterografică 1970

Coordonatele x',y' afectate de translaţii pot fi utilizate pentru o serie de calcule cum sunt:
- calculul distanţei funcţie de coordonate;
- calculul orientărilor funcţie de coordonate;
- calculul ariei unei parcele în funcţie de coordonatele plane ale colţurilor ei.

Este complet interzis să se folosească coordonatele x', y' care au translaţii pentru o serie de calcule cum sunt:
- transformarea coordonatelor plane stereografice în coordonate geografice;
- transcalcularea coordonatelor din proiecţie stereografică în proiecţie Gauss-Kruger sau în alte proiecţii;
- reducerea direcţiilor sau distanţelor la planul de proiecţie .

2 Transformări de coordonate în proiecţia Stereografică 1970

A. Transformarea coordonatelor geografice (φ,λ) de pe elipsoidul de referinţă în coordonate plane Stereografice 1970 (x, y):

Această transformare se face cu ajutorul unor formule cu coeficienţi constanţi, în funcţie de latitudinea $\Delta\varphi$ şi de longitudinea **l** dintre punctul considerat (φ,λ) şi punctul central al proiecţiei (polul Q_0 cu coordonatele geografice φ_0,λ_0).
În acest calcul se pot deosebi două etape:

- transformarea coordonatelor geografice în coordonate stereografice pe planul tangent în Q_0 (acest calcul este cel mai laborios);
- transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în planul secant, paralel cu planul tangent; această a doua etapă, extrem de simplă, se realizează prin înmulţirea coordonatelor din planul tangent cu un coeficient de reducere a scării, care este subunitar şi depinde de distanţa dintre planul tangent şi cel secant.

Formulele de calcul s-au stabilit după o metodă propusă de academicianul bulgar V.K.HRISTOV, metoda care, în esenţă, constă în dezvoltarea în serie Taylor, în jurul punctului central (φ_0, λ_0), a elementelor care depind de latitudine. Derivatele respective, calculate în punctul central (φ_0, λ_0) apar sub forma unor constante, care se grupează convenabil sub formă de coeficienţi constanţi.
Reprezentarea trebuie să satisfacă urmatoarele condiţii:

- să fie conformă;
- meridinul λ_0 care trece prin polul Q_0 (centrul proiecţiei) să se reprezinte printr-o dreaptî care se ia ca axă xx', cu sensul pozitiv spre nord, fiind şi axă de simetrie;
- originea O a sistemului de coordonate stereografice este imaginea plană a punctului central, iar un punct oarecare B (φ,λ) situat pe meridianul central λ_0 are coordonata x_m dată de relaţia:

$$x_m = 2R_0 tg\beta/2R_0$$

unde,
R_0 - este raza sferei Gauss la latitudinea φ_0;
β - este un arc de meridian, a cărui lungime este egală cu cea a arcului de meridian de pe elipsoid,cuprins între paralele φ_0 şi φ.
Prin urmare, pentru un elipsoid dat şi o latitudine φ_0 stabilită pentru centru de proiecţie, coeficienţii utilizaţi în formulele pentru calculul coordonatelor plane stereografice 1970, au valori constante. În cazul de faţă, pentru elipsoidul Krasovski şi latitudinea $\varphi_0 = 46^0$ s-au calculat urmatoarele valori numerice pentru coeficientii constanţi prezentate în foia de calcul, în coloanele 2, 3, 4, 5 din tabelul 1 şi în coloanele 2, 3, 4 din tabelul doi.
Pentru ţara noastră, $\Delta\varphi''$ şi mai ales $(\lambda - \lambda_0)''$ pot atinge valori mai mari decât 10 000''. Astfel de numere ridicate la puterile 5 şi 6 devin incomode, din cauza mărimii lor, în timp ce coeficienţii constanţi sunt foarte mici. În scopul evitării acestui inconvenient, în formule s-a considerat:

$$f = 10^{-4}\Delta\varphi''$$
$$l = 10^{-4}(\lambda - \lambda_0)''$$

Aceste valori ale coeficienţilor constanţi, pentru transformarea coordonatelor geografice (φ,λ) în coordonate plane stereografice pe un plan tangent, la latitudinea $\varphi_0 = 46^0$, au fost calculate la I.G.F.C.O.T. (Bucureşti).
Practic, procedeul de calcul pentru x este următorul:
Elementele coloanei 1 se înmulţesc cu elementele corespunzătoare (de pe aceeaşi linie) din coloana 2, se însumează algebric obţinându-se valoarea S_0, care se înmulţeşte cu primul element din coloana 6, obţinându-se primul rezultat parţial r_0. Asemănător, din coloanele 1 şi

3, 1 şi 4, 1 şi 5, 1 şi 6 se obţin S_2, S_4, S_6 care se înmulţesc cu elementele coloanei 6 rezultând r_2, r_4, r_6.
Însumând algebric rezultatele din coloana 7, se obţine valoarea lui x_{tg}, din planul tangent de proiecţie stereografică apoi, prin înmulţirea acestuia cu coeficientul c = 0, 999 750 000, se obţine valoarea lui x în planul secant de proiecţie stereografică 1970.
Calculul lui y se face asemănător cu cel a lui x.
Procedeul asigură o precizie de ordinul a 1 cm pentru orice punct din ţara noastră.

B. Transformarea coordonatelor rectangulare plane Stereografice 1970 (x,y) în coordonate geografice (φ,λ), pe elipsoidul de referinţă:

Acest calcul presupune două etape:

- etapa întâi, de transformare a coordonatelor stereografice din planul secant în planul tangent, paralel cu cel secant, prin înmultirea cu un coeficient supraunitar:

$c' = 1,\ 000\ 250\ 063$

- etapa a doua, mai laborioasă, constă în transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent, în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul de referinţă; această problemă se rezolvă cu ajutorul unor formule cu coeficienţi constanţi, stabilite într-un mod asemănător, în principiu, cu formulele pentru calculul coordonatelor plane stereografice.

Se calculează întâi diferenţa de coordonate Δφ şi 1 faţă de centrul proiecţiei (φ_0,λ_0), apoi coordonatele geografice:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$
$$\lambda = \lambda_0 + 1 \qquad 5.19$$

Pentru elipsoidul Krasovski şi $\varphi_0 = 46^0$, coeficienţii constanţi sunt prezentaţi în tabelele 2, 3, 4 din foaia de calcul de mai jos.
Valorile pentru coeficienţii constanţi au fost calculate la I.G.F.C.O.T. (Bucureşti).
Procedeul de calcul pentru φ şi λ este acelaşi ca în cazul calcului coordonatelor plane rectangulare.

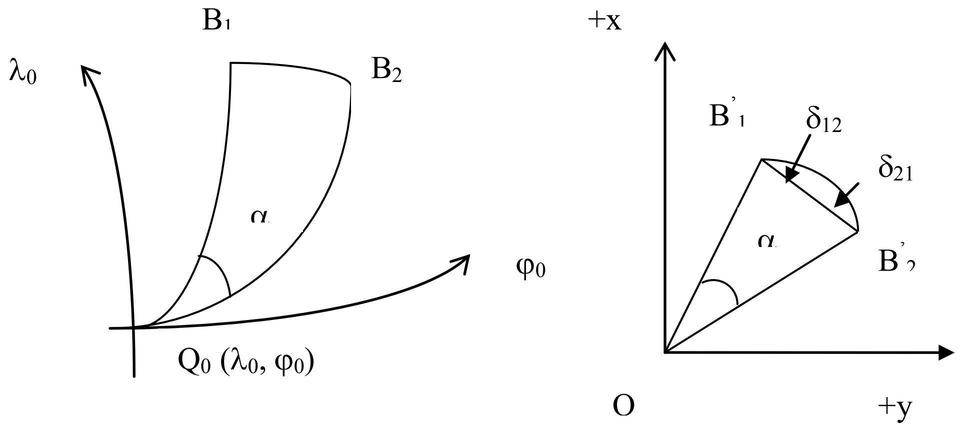
C. Transcalcularea coordonatelor plane Gauss în coordonate plane stereografice 1970 şi invers:

Transformarea coordonatelor plane Gauss în oordinate plane stereografice 1970 se face prin intermediul coordonatelor geografice.
Metoda presupune două etape:
a) În prima etapă, se transformă coordonatele plane Gauss în oordinate pe elipsoidul de referinţă;
b) În a doua etapă, coordonatele geografice de pe oordinat se transformă în oordinate plane stereografice 1970.
Pentru transcalcularea coordonatelor plane stereografice 1970 în oordinate plane Gauss se procedează în acelaşi fel ca şi în primul caz.
Calculul este oordi şi omogen pentru toată ţara deoarece ambele proiecţii folosesc acelaşi oordinat – Krasovski 1940 – cu aceeaşi orientare.
În producţie, pentru unele lucrări mai puţin pretenţioase sub aspectul preciziei, se aplică formulele de transcalculare din topografie, folosind drept puncte cu oordinate iî ambele

sisteme de proiecţie colţurile trapezelor, pentru care atât coordonatele plane Gauss, cât şi cele plane stereogarfice 1970 se extrag din tabele.
Această metodă este mai rapidă, însă cea mai riguroasă este metoda prin intermediul coordonatelor geografice.

3 Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie Stereografică 1970

Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie este operaţia de corectare a direcţiilor măsurate în reţeaua geodezică de stat prin aplicarea unor corecţii unghiulare δ numite “corecţii de reducere la coardă”. Această operaţie este necesară deoarece, în planul de proiectţe, imaginile plane ale laturilor triunghiurilor geodezice nu sunt linii ci sunt curbe.
Pentru stabilirea formulei de calcul a acestei corecţii, se consideră pe sfera de rază medie R_0 triunghiul sferic $B_1B_2Q_0$, în care B_1 şi B_2 sunt extremităţile unei direcţii măsurate (capetele unei laturi de triangulaţie), iar $Q_0(\lambda_0,\varphi_0)$ este polul proiecţiei.



a) pe elipsoid (sferă)   b) în planul de proiecţie

Fig. 6.9 Reprezentarea liniilor geodezice (pe elipsoid şi în planul de proiecţie)

Pentru reprezentarea în plan a acestui triunghi sferic se au în vedere urmatoarele proprietăţi ale proiecţiei stereografice:
- proiecţia este conformă;
- cercurile mari care trec prin Q_0 (verticaluri) se reprezintă prin segmente de dreaptă care trec prin originea O;
- un arc de cerc se va reprezenta tot printr-un arc de cerc (excepţie fac verticalurile).

Imaginile plane ale vârfurilor triunghiului sferic sunt punctele B_1', B_2' şi O. Arcele de cerc B_1Q_0 şi B_2Q_0, aparţinând unor verticaluri ale polului Q_0, se reprezintă prin dreptele $B_1'O$ şi $B_2'O$, care fac între ele un unghi α, egal cu cel corespunzător de pe sferă, iar linia geodezică

B_1B_2 de pe sfera, fiind un arc mare care nu trece prin polul Q_0, se reprezintă în plan prin arcul de cerc $B_1{}'B_2{}'$ cu concavitatea spre interiorul triunghiului.
În punctele $B_1{}'$ şi $B_2{}'$ el face cu coarda sa unghiurile:

$$|\delta_{1,2}| = |\delta_{2,1}|$$

egale în valoare absolută cu corecţiile de reducere la coarda ale directiilor B_1B_2 şi respectiv B_2B_1.

Suma unghiurilor triunghiului sferic $B_1B_2Q_0$ este egală cu $200^G + \varepsilon$, unde ε este excesul sferic. Proiectia fiind conformă, ungiurile imaginii plane a acestui triunghi sferic trebuie să fie nedeformate, adică :

$$200^G + |\delta_{1,2}| + |\delta_{2,1}| = 200^G + \varepsilon$$

$$|\delta_{1,2}| = |\delta_{2,1}| = \varepsilon/2$$

$$\varepsilon = \frac{S}{R_0^2}, \qquad \varepsilon'' = \rho'' \frac{S}{R_0^2}$$

în care, S este suprafaţa triunghiului sferic $B_1B_2Q_0$.
Corecţia de reducere la coardă având valori relativi mici, s-a înlocuit suprafaţa triunghiului sferic cu suprafaţa triunghiului plan $B_1{}'B_2{}'O$.

$$S \approx S_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Având în vedere faptul că orientările şi gradaţiile cercurilor orizontale ale teodolitelor cresc în sensul mişcării acelor de ceasornic, rezultă că pentru direcţia B_1B_2 semnul corectţei trebuie să fie pozitiv în $B_1{}'$ şi negativ în $B_2{}'$:

$$\delta_{1,2}'' = -\delta_{2,1}'' = \frac{\rho''}{4R_0^2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Prin analiza unui caz concret, se vede că formula de calcul a corecţiei de reducere la coardă asigură şi semnul corecţiei.
O examinare a diverselor situaţii din ţara noatră indică folosirea razei R_0 la latitudinea de 46^0: $R_0(46^0) = 6\ 378\ 956$m.
Termenul din faţa parantezei fiind constant rezultă:

- pentru gradaţia centesimală:

$$\delta_{1,2}'' = -\delta_{2,1}'' = 10^{-10}\ 39{,}113(x_1y_2 - x_2y_1)$$

- pentru gradaţia sexagesimală:

$\delta_{1,2}'' = - \delta_{2,1}'' = 10^{-10}\ 12{,}673(x_1y_2 - x_2y_1)$

Calculul corecţiilor de reducere la coardă impune cunoaşterea unor coordonate aproximative (cu aproximaţia de ordinul metrilor) atât ale punctului de staţie, cât şi ale punctului vizat. În cazul punctelor noi, procesul este iterativ în sensul că: se calculează într-o primă etapă coordonatele provizorii cu ajutorul direţtiilor nereduse, cu ajutorul acestora se calculează corecţiile de reducere la coardă, direcţiile reduse vor folosi apoi la calculul unui nou set de coordonate.
Procedeul si formulele de calcul ale corectiei de reducere la coarda asigura o precizie de $0{,}01''$.
Corectitudinea corecţiilor δ se poate verifica pe triunghiuri, cu ajutorul triunghiului sferic.

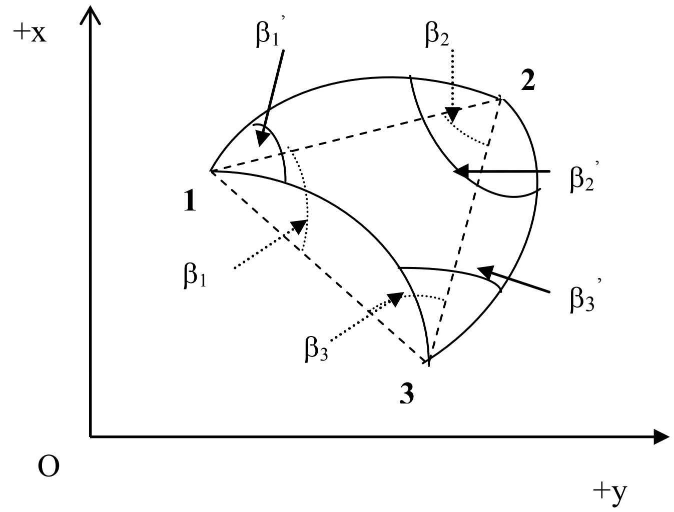


Fig.7.1 Verificarea corecţiilor de reducere la coardă

$(\alpha_{i,j})_r = (\alpha_{i,j})_m + \delta_{i,j}$

unde,

$(\alpha_{i,j})_r$ - este direcţia redusă la coardă;
$(\alpha_{i,j})_m$ - este direcţia măsurată, neredusă la coardă.

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^0 + \varepsilon$

$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' = 180^0$

unde,

β - este unghiul obţinut din direcţiile reduse la coardă;
$\beta^{'}$ - este unghiul obţinut din direcţiile măsurate.

Va rezulta relaţia:
$(\delta_{13} - \delta_{12}) + (\delta_{21} - \delta_{23}) + (\delta_{32} - \delta_{31}) = -\varepsilon$
Regulă practică de verificare: *În orice triunghi geodezic, suma corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie pentru cele trei unghiuri trebuie să fie egală cu excesul sferic al triunghiului respectiv luat cu semn schimbat.*

4. Reducerea distanţelor la planul de proiecţie Stereografică 1970

Calculul respectiv se poate separa în două etape:

3. reducerea unei distanţe de pe elipsoid (sfera terestră) la planul tangent în $Q_0(\varphi_0,\lambda_0)$;
4. reducerea distanţei din planul tangent în Q_0 la planul secant, paralel cu cel tangent.

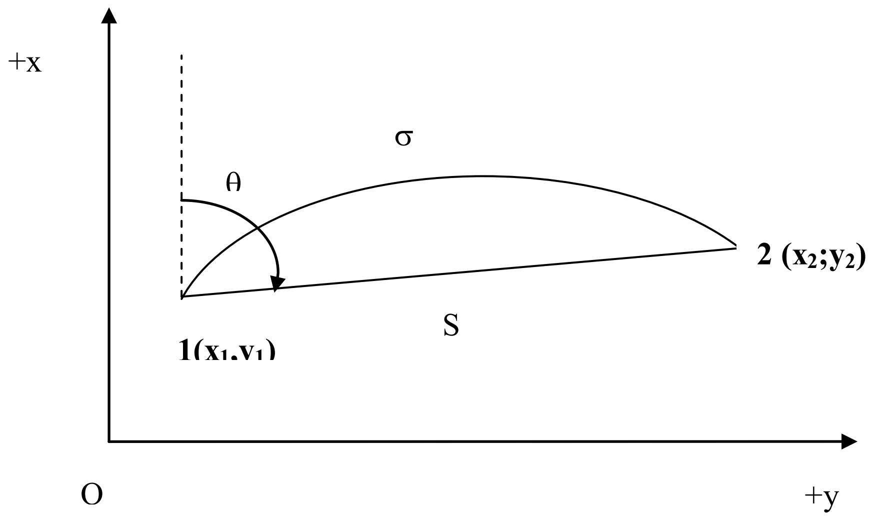


Fig. 7.2. Imaginea plană a linie geodezice de pe elipsoid

Curba 1-2 are lungimea τ şi reprezintă imaginea plană a liniei geodezice. Coarda 1-2 are lungimea S. Pe elipsoid (sfera terestră) linia geodezică are lungimea s.
In aproximaţia τ = S, se pune problema găsirii unei legături între s şi S.
Plecând de la expresia modulului de deformaţie liniară din proiecţia stereografică pe plan tangent se va ajunge la expresia:

$$\frac{s}{S} = \left[1 - \frac{1}{4R_0^{\,2}}\left(x_m^{\,2} + y_m^{\,2} + \frac{S^2}{12}\right)\right]$$

Dezvoltând paranteza după binomul lui Newton la puterea -1 şi înlocuind $S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, distanţa S redusă la planul tangent se calculează cu formula:

$$\frac{s}{S} = \left[1 - \frac{x_m{}^2 + y_m{}^2}{4R_0{}^2} + \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{48R_0{}^2} \right]$$

unde,
x_m, y_m sunt coordonatele medii ale unui punct situat la mijlocul segmentului 1-2
Δx, Δy sunt diferenţele de coordonate între punctele 1şi 2.

Distanţa S_0 redusă la planul secant se calculează cu relaţia:

$S_0 = Sc$

în care c este coeficientul subunitar utilizat pentru transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în cel secant (c = 0,999 750 000).
Coordonatele plane x_m, y_m şi diferenţele de coordonate
$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta y = y_2 - y_1$
este suficient să se cunoască cu o aproximaţie de ordinul metrilor.
Valoarea

$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

necesară pentru calculul ultimului termen corectiv poate fi înlocuită cu valoarea s^2 de pe elipsoid sau sferă.

5. Deformaţii în proiecţia Stereografică 1970

Proiecţia stereografică 1970, fiind o proiecţie conformă, nu deformează unghiurile. Se deformează, în schimb, lungimile şi ariile.

Deformaţiile distanţelor

Pornind de la formulele stabilite la prezentarea unei proiecţii stereografice a unei sfere pe un plan tangent va rezulta:

$\delta = A$

$\rho = 2R_0 \mathrm{tg} \frac{L}{2R_0}$

$\mathrm{tg}\, x = x + 1/3\, x^3 + 2/15\, x^5 + \ldots\ldots\ldots$

$$tg\frac{L}{2R_0} = \frac{L}{2R_0} + \frac{1}{3}\frac{L^3}{8R_0{}^3} + \frac{2}{15}\frac{L^5}{216R_0{}^5} + \ldots\ldots\ldots$$

$$tg\frac{L}{2R_0} = \frac{1}{2R_0}\left(L + \frac{L^3}{12R_0{}^2} + \frac{L^5}{120R_0{}^4}\right)$$

$$\rho = 2R_0\ \frac{1}{2R_0}(L+\frac{L^3}{12R_0^{\ 2}}+\frac{L^5}{120R_0^{\ 4}})$$

$$\rho = L+\frac{L^3}{12R_0^{\ 2}}+\frac{L^5}{120R_0^{\ 4}}$$

Deformaţia totală va fi:

$$\rho - L=\frac{L^3}{12R_0^{\ 2}}+\frac{L^5}{120R_0^{\ 4}}$$

Dacă notăm deformaţia liniară din planul tangent cu μ_T şi pe cea din planul secant cu μ_S se obţine:

$$\mu_T = \frac{d\rho}{dL}=\frac{dL+\frac{L^2}{4R_0^{\ 2}}dL+\frac{L^4}{24R_0^{\ 2}}dL}{dL}$$

$$\mu_T = 1+\frac{L^2}{4R_0^{\ 2}}+\frac{L^4}{24R_0^{\ 4}},$$

ultimul termen din relatia de mai sus poate fi neglijat deoarece:

L = 400km
R_0 = 6 000km

Dacă pentru calculul termenului $L^2/4R_0^2$ se face aproximarea:

$L^2 \approx \rho^2 = x^2 + y^2$,

atunci se obţine :

$$\mu_T = 1+\frac{\rho^2}{4R_0^{\ 2}}+\frac{\rho^4}{24R_0^{\ 4}}=1+\frac{x^2+y^2}{4R_0^{\ 2}}$$

în care x şi y sunt coordonatele rectangulare plane stereografice ale punctului în care se calculează valoarea lui μ.
Calculul deformaţiei liniare în plan secant se face folosind coeficientul de reducere la scară c = 0,99975:

$\mu_S = \mu_T\, c$
$x_{tg} = x_{sec}/c$

$$\mu_S = c+\frac{(x^2+y^2)_{sec}}{4cR_0^{\ 2}}$$

$y_{tg} = y_{sec}/c$

Pentru latitudinea medie a ţării noastre, $\varphi_0 = 46^0$

$\mu_S = 0{,}99975 + 6{,}145\ 388\ 10^{-15}(x^2 + y^2)_{sec}$

Deformaţiile liniare relative se calculează cu formulele:

- în plan tangent:

$$D_t = \mu_T - 1 = +\frac{(x^2+y^2)_{tg}}{4R_0^2} = \frac{\rho_{tg}^2}{4R_0^2}$$

- în plan secant

$$D_s = \mu_S - 1 = (c-1) + \frac{(x^2+y^2)_{sec}}{4cR_0^2}$$

$D_s = -0{,}000\ 25 + 6{,}145\ 388\ 10^{-15}(x^2 + y^2)_{sec}$

Deformaţiile ariilor:

Deformaţiile areolare au acelaşi semn cu cele liniare, iar valoarea modulului de deformaţie areolară poate fi calculată cu ajutorul relaţiei:

$p = \mu^2$

Concluzii privind deformaţiile în proiecţia Stereografică 1970

În planul tangent, toate deformaţiile sunt oordina şi sunt direct proporţionale cu pătratul distanţei de la oordina considerat la originea axelor.
În planul secant, există atât deformaţii pozitive cât şi deformaţii negative. Fiind vorba de un plan secant, există un cerc de deformaţie nulă, cu raza de aproximativ 201,7km.
În oricare alt punct din interiorul cercului de deformaţie nulă deformaţiile liniare şi areolare sunt negative. Cele mai mari deformaţii negative sunt în polul Q_0 (originea axelor de oordinate plane) şi au valoarea de -25 cm/km.
În oricare alt punct oordin în afara cercului de deformaţie nulă deformaţiile sunt oordina şi cresc pe măsură ce se măreşte distanţa faţă de acest cerc. Pe o mare parte din regiunea de frontieră a ţării deformaţiile au valori în jurul a 20 cm/km. În extremitatea vestică a ţării, spre localitatea Beba Veche şi în estul Dobrogei (teritorii situate la circa 375 km faţăde oordina central) deformaţiile au valori de aproximativ 63,7 cm/km.
Izoliniile referitoare la deformaţii au aspectul unor cercuri concentrice cu centrul în originea axelor de oordinate plane.

6. Cadrul şi nomenclatura foilor planurilor şi hărţilor topografice în proiecţia Stereografică 1970

În vederea simplificării racordării între vechile foi de plan executate în proiecţia Gauss şi cele noi, care se execută în proiecţie stereografică, s-au pastrat cadrul geografic şi nomenclatura trapezelor la fel ca şi în proiecţia Gauss.

Hărţile şi planurile topografice au, în general, un cadru geografic format din imaginile plane ale unor arce de meridiane şi paralele, care. pe elipsoidul de rotaţie, delimitează trapeze curbilinii, denumite în mod curent “trapeze’.

Fiecare trapez are o anumită nomenclatură şi se reprezintă pe o foaie de hartă separată.

Cunoscând regulile după care se face nomenclatura trapezelor, dacă se dă nomenclatura unui trapez se pot deduce, fara dificultăţi:

- scara hărţii (planului)
- coordonatele geografice ale colţurilor
- nomenclatura trapezelor vecine

Pentru că dimensiunile şi nomenclatura trapezelor sunt strâns legate de scară, a fost necesar să se standardizeze valorile scărilor asfel că, se folosesc urmatoarele scări standard:

1:1 000 000, 1:500 000, 1:200 000, 1;100 000, 1:50 000, 1;25 000, 1:10 000, 1:5 000, 1:2 000, ultimele trei sunt scările planurlor topografice de bază ale ţării.

Cursul nr. 8 și 9
6. PROIECŢIILE CILINDRICE

Proiectiile cilindrice se obţin prin proiectarea elipsoidului de referinţă pe suprafaţa laterală a unui cilindru care apoi se taie după una din generatoarele sale şi se desfăşoară în plan.

6.1. Principii fundamentale

Suprafaţa elipsoidului de rotaţie sau a sferei se reprezintă pe suprafaţa laterală a unui cilindru tangent sau secant care apoi se desfăşoară în plan, obţinându-se o reprezentare cilindrică.
Orientarea cilindrului faţă de elipsoid sau sferă este dată de coordonatele geografice (φo, λo) ale polului proiecţiei Q_0.
Operaţiile de calcul ale proiecţiei cilindrice se desfăşoară în următoarea succesiune:

1. *Suprafaţa elipsoidului* de rotaţie se reprezintă mai întâi, în cazul proiecţiilor oblice şi transversale, pe suprafaţa unei sfere de rază R, în condiţiile reperezentărilor conforme, echivalente şi echidistante, iar în cazul proiecţiilor drepte acest calcul se efectuează numai pentru unele rezolvări particulare.
2. *Coordonatele geografice (φ, λ)* de pe sfera terestră de rază R se transformă în coordonate sferice polare (A, Z), în cazul proiecţiilor oblice şi transversale.
3. Se calculează *coordonatele rectangulare plane (x, y).*
4. Se efectuează *construcţia grafică a reţelei* cartografice de meridiane şi paralele, precum şi a imaginilor plane ale unor detalii ce trebuie să fie reprezentate, pe baza coorodnatelor rectangulare plane.
5. Se calculează *modulii de deformare liniară, areolară*, precum şi *deformaţiile maxime ale unghiurilor*, în funcţie de condiţiile de bază ale reprezentărilor cartografice.

Din punct de vedere practic, proiecţiile cilindrice se folosesc atât pentru reprezentări la scări mici, în cazul întocmirii hărţilor universale, cât şi pentru reprezentări la scări mari. Cele mai studiate sunt proiecţiile drepte şi transversale şi anume:
- proiecţii cilindrice drepte, echidistante cu reţeeau în pătrate şi în dreptunghiuri;
- proiecţia cilindrică dreaptă conformă, Mercator;
- proiecţia cilindrică transversală conformă Gauss-Kruger;
- proiecţia UTM (Universal Transversală Mercator)

6.2. Clasificarea proiecţiilor cilindrice

1. în funcţie de latitudinea φ_0 a polului proiecţiei:
   - proiecţii drepte: $\varphi_0 = 90°$
   - proiecţii oblice: $0° < \varphi_0 < 90°$
   - proiecţii transversale: $\varphi_0 = 0°$
2. în funcţie de natura elementelor care nu se deformează:
   - proiecţii conforme (ω=0)
   - proiecţii echivalente (ρ=l)
   - proiecţii arbitrare (echidistante pe meridiane: m=l sau pe verticaluri μ_i=l)
3. în funcţie de poziţia cilindrului:
   - proiecţii cilindrice tangente
   - proiecţii cilindrice secante
4. după aspectul reţelei cartografice normale se disting:
   - proiecţii cilindrice cu reţeaua normală în pătrate;

- proiecţii cilindrice cu reţeaua normală în dreptunghiuri egale;
- proiecţii cilindrice cu reţeaua normală în dreptunghiuri neegale.

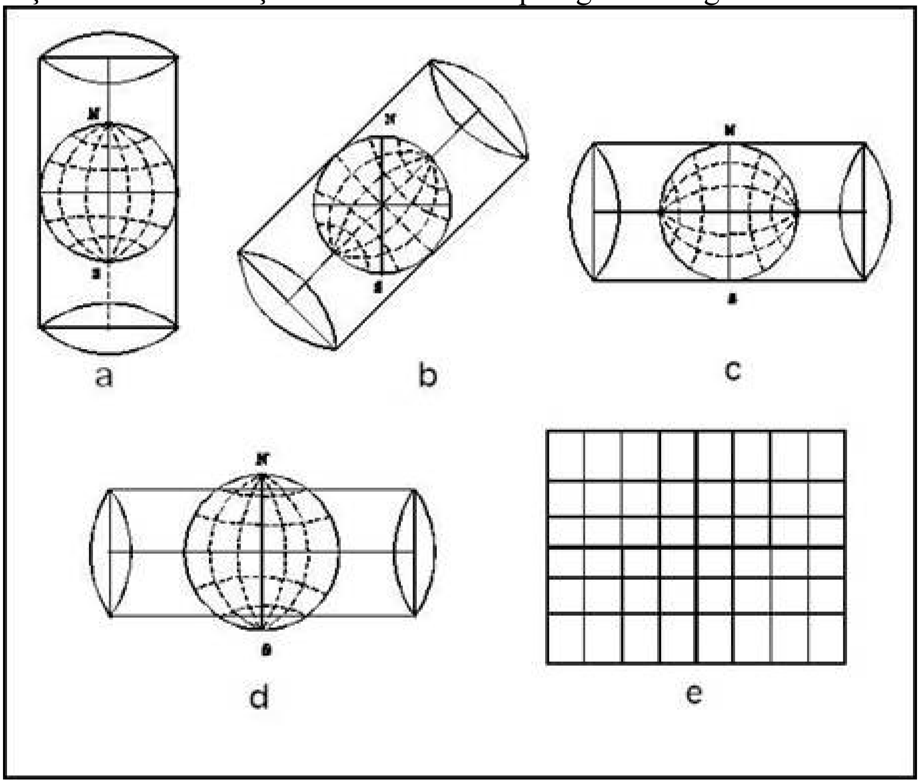
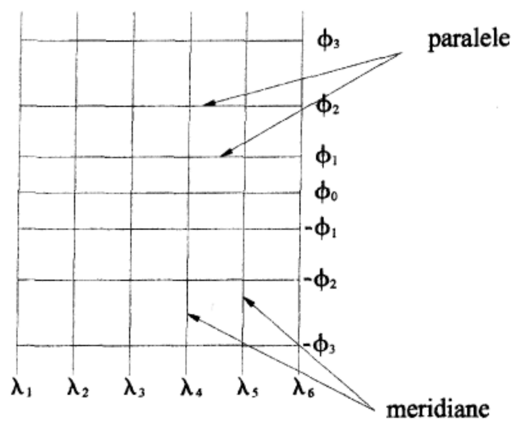


Fig. 6.1 - Proiecţia cilindrică
a - dreaptă; b - oblică; c - transversală; d - secantă;
e - aspectul reţelei cartografice

6.3. Proiecţii cilindrice drepte

Proiecţiile cilindrice drepte sau normale sunt proiecţiile în care axa cilindrului tangent sau secant la elipsoid sau sfera terestră coincide cu axa polilor.

6.3.1. Aspectul reţelei normale în proiecţiile cilindrice drepte



în proiecţiile cilindrice drepte reţeaua normală este formată din imaginile meridianelor şi paralelelor. Meridianele se reprezintă printr-o familie de drepte paralele aflate la distanţe proporţionale cu diferenţele de longitudine, iar paralelele se reprezintă printr-o familie de drepte perpendiculare pe imaginile meridianelor. Distanţele dintre paralele diferă în funcţie de tipul proiecţiei.

Fig. 6.2. Aspectul general al reţelei normale intr-o proiecţie cilindrică dreaptă

6.3.2. Alegerea sistemului de axe de coordonate rectangulare plane

Sistemul de axe de coordonate rectangulare plane se alege cu originea în punctul de intersecţie dintre imaginea plană a meridianului origine sau a meridianului mediu al zonei considerate de longitudine λ_0 şi respectiv, al ecuatorului de latitudine $\varphi_0= 0°$ sau a unui paralel oarecare.

Axa Ox se alege o dreaptă care reprezintă unul dintre meridiane, de obicei meridianul mediul al zonei de reprezentat şi este orientată pe direcţia Nord-Sud. Ca axă Oy se alege imaginea ecuatorului sau a paralelului ce trece prin zona cea mai de la sud faţă de zona reprezentată, de latitudine minimă sau una dintre paralele şin este orientată pe direcţia Est-Vest.

6.3.3. Ecuaţiile hărţii

În proiecţiile cilindrice drepte ecuaţiile hărţii au forma generală:

$$x = f(\varphi)$$
$$y = \alpha \cdot \lambda$$

în care:

- funcţia f se determină din condiţia de bază pusă ca reprezentarea să fie conformă, echivalentă sau echidistantă.
- α este o constantă care se determină punând condiţia suplimentară ca cilindrul să fie tangent sau secant la elipsoid sau la sfera terestră.
- $\lambda=\Delta\lambda$ reprezintă diferenţa de longitudine.

Formulele generale ale proiecţiilor cilindrice drepte pentru cazul în care Pământul se consideră elipsoid de rotaţie:

- coordonate rectangulare plane:

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) \\ y &= \alpha \cdot \lambda \end{aligned}, \ \alpha=\text{const.}$$

- modulul de deformaţie liniară în lungul meridianelor:

$$m = \frac{dx}{Md\varphi}$$

- modulul de deformaţie liniară în lungul paralelelor:

$$n = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{N \cdot \cos\varphi}$$

- modulul de deformaţie areolară:

$$p = m \cdot n$$

- deformaţia unghiulară maximă:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$tg(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Formulele generale ale proiecţiilor cilindrice drepte pentru cazul în care Pământul se consideră sferă:

- coordonate rectangulare plane:

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) \\ y &= \alpha \cdot \lambda \end{aligned}, \ \alpha\text{=const.}$$

- modulul de deformaţie liniară în lungul meridianelor:

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi}$$

- modulul de deformaţie liniară în lungul paralelelor:

$$n = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{R \cdot \cos\varphi}$$

- modulul de deformaţie areolară:

$$p = m \cdot n$$

- deformaţia unghiulară maximă:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$tg(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

În cazul proiecţiilor cilindrice drepte direcţiile principale coincid cu direcţiile meridianelor şi paralelelor şi astfel semiaxele elipselor de deformaţie se determină cu ajutorul relaţiilor:

$$a = \max(m, n)$$

$$b = \min(m, n)$$

Din formulele de mai sus se observă că deformaţiile depind numai de latitudine, deci izoliniile deformaţiilor se confundă cu imaginile plane ale paralelelor.

6.4. Proiecţia cilindrică dreaptă cu reţeaua pătratică

Această reţea a fost realizată prima dată în anul 1438 de către prinţul Henri Navigatorul.
Cilindrul se consideră tangent la ecuator, iar reţeaua cartografică are aspectul unei reţele de pătrate. Laturile unui pătrat reprezintă arcele de meridiane şi paralele considerate întinse. Proiecţia cilindrică dreaptă echidistantă pe meridiane (m=1), cu reţeaua pătratică, în cazul cilindrului tangent la ecuatorul sferei terestre (φ_k= 0°), se calculează şi se construieşte grafic, pe baza următoarelor formule :

$$x_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \frac{\Delta\varphi^\circ}{\rho^\circ}$$

$$y_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho^\circ}$$

În care:

- x şi y e vor exprima în centimetri;
- $S_0 = \frac{1}{N}$, scara reprezentării, unde N= 1.000.000; 5.000.000 sau 10.000.000;
- R= 6.371.116 m, este raza sferei terestre cu o suprafaţă egală cu cea a elipsoidului de referinţă Krasovski 1940;
- $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10°;15°;20°$; diferenţa de latitudine şi longitudine dintre două paralele respectiv, dintre două meridiane alăturate;
- $\rho^g = 57^g,57793131$

Deformaţiile proiecţiei se determină cu ajutorul relaţiilor :

$$m = 1; n = \frac{1}{\cos\varphi} \geq 1; p = m \cdot n = \frac{1}{\cos\varphi} \geq 1$$

$$a = n \geq 1 \text{ şi } b = m = 1; \sin\frac{\omega}{2} = tg^2\frac{\varphi}{2} \geq 0$$

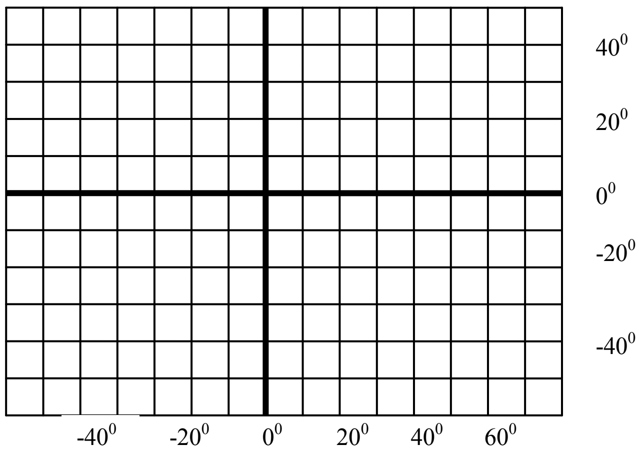


Fig. 6.3 Aspectul reţelei de meridiane şi paralele într-o proiecţie cilindrică dreaptă patratică (echidistantă pe meridiane, cilindru tangent la sfera terestră)

6.5. Proiecţia cilindrică dreaptă cu reţeaua dreptunghiulară

Proiecţia cilindrică normală dreptunghiulară constă în a reprezenta o porţiune de pe glob pe suprafaţa desfăşurabilă a unui cilindru secant la globul terestru, în scopul micşorării deformărilor.

În proiecţia cilindrică dreaptă echidistantă cu reţeaua în dreptunghiuri egale unde în afară de meridiane se mai reprezintă nedeformate ca lungime şi două paralele de latitudine φ_k, după care cilindrul intersectează sfera terestră, se consideră următoarele condiţii ale reprezentării:

- ecuatorul de latitudine φ_k=0 se reprezintă printr-o linie dreaptă;
- proiecţiile meridianelor de longitudine λ_1, λ_2, λ_3....... se reprezintă prin linii drepte echidistante, iar distanţele Y dintre imaginile plane ale meridianelor sunt egale cu lungimea metrică a arcului paralelei de secanţă cu latitudinea (φ_k), corespunzătoare cu diferenţa de longitudine ($\Delta\lambda°$):
- proiecţiile paralelelor de latitudine φ_1, φ_2, φ_3,........... se reprezintă prin linii drepte echidistante, unde distanţele dintre acestea sunt egale cu lungimea metrică a arcului meridian corespunzător cu diferenţa de latitudine ($\Delta\varphi°$) .

Se menţionează că echidistanţa metrică corespunzătoare unghiului $\Delta\varphi°$ a arcului de meridian este mai mare decât lungimea metrică a unui arc al paralelului de secţionare corespunzător unghiului $\Delta\lambda°$ de aceeaşi mărime.

Ecuaţiile proiecţiei cilindrice dreaptă cu reţeaua în dreptunghiuri

Deoarece reprezentarea meridianelor şi paralelelor este similară cu cea de la proiecţia cilindrică dreaptă cu reţeaua de pătrate, rezultă pentru abcisa x relaţia:

$$x_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \frac{\Delta\varphi°}{\rho°}$$

Punând condiţia ca pe paralelul de secţionare de latitudine φ_k, modulul de deformare liniară n_k să fie egal cu unitatea, se poate determina în final relaţia pentru ordonata y.

$$y = \alpha \cdot \lambda$$

$$n = \frac{\alpha}{R \cdot \cos\varphi}$$

Atunci dacă $n = \dfrac{\alpha_k}{R \cdot \cos\varphi_k} = 1$

Rezultă $\alpha = R \cdot \cos\varphi_k = r_k \Rightarrow y = \alpha \cdot \lambda = R \cdot \cos\varphi_k \cdot \Delta\lambda$

Deci $y_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \cos\varphi_k \cdot \dfrac{\Delta\lambda°}{\rho°}$

Deformările în proiecţia cilindrică dreaptă cu reţeaua în dreptunghiuri

- Pentru modulul de deformare liniară m, conform condiţiei impuse, rezultă m=1;

  Deci lungimile situate pe direcţia meridianelor nu suferă nici un fel de deformare.
- Pentru modulul de deformare liniară n, conform condiţiei impuse pe direcţia paralelelor de secţionare n_k=1, iar pentru celelalte latitudini avem :

$$n = \frac{\alpha}{r}$$

$$\alpha = R\cos\varphi_k ; r = R\cos\varphi$$

$$\Rightarrow n = \frac{R\cos\varphi_k}{R\cos} = \cos\varphi_k \cdot \sec\varphi$$

Întâlnim următoarele cazuri:

- $\varphi<\varphi_k$ deci $\cos\varphi>\cos\varphi_k$ şi n<1 – deci lungimile situate pe direcţia acestor paralele suferă deformări de forma unor contractări;

- $\varphi > \varphi_k$ deci $\cos\varphi < \cos\varphi_k$ şi $n>1$ – deci lungimile situate pe direcţia acestor paralele suferă deformări sub formă de alingiri.

  Lungimile situate pe direcţia paralelelor de secţionare nu suferă nici o deformare, deoarece $n_k=1$.

- Pentru modulul de deformare areolară avem relaţia

$$p = m \cdot n = n = \frac{\cos\varphi_k}{\cos\varphi} = \cos\varphi_k \cdot \sec\varphi$$

şi surafeţele vor suferi deformări în sensul unor contractări dacă $\varphi<\varphi_k$ şi a unor dilatări dacă $\varphi>\varphi_k$. Suprafeţele situate la nivelul paralelelor de secţionare, nu suferă deformări deoarece $p_k=1$.

- Pentru modulu de deformare unghiulară se ţine cont de faptul că proiecţiile meridianelor şi paralelelor sunt perpendiculare între ele, deci constituie direcţii principale:

$$\sin\frac{\omega}{2} = tg\frac{\varphi_k + \varphi}{2} \cdot tg\frac{\varphi_k - \varphi}{2}.$$

6.6. Proiecţia cilindrică dreaptă echivalentă Lambert cu latitudini descrescânde

Proiecţia cilindrică dreaptă echivalentă Lambert ($p=1$) cu latitudini descrescânde, în cazul cilindrului tangent la ecuatorul sferei tarestre ($\varphi_k=0°$) , denumită şi izocilindrică se calculează cu ecuaţiile:

$$x_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \sin\varphi$$

$$y_{cm} = 100 \cdot S_0 \cdot R \cdot \frac{\Delta\lambda°}{\rho°}$$

Deformaţiile proiecţiei se exprimă cu relaţiile:

$$p = m \cdot n = 1 \qquad a = n$$

$$m = \cos\varphi \qquad b = m$$

$$n = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad tg\left(45° + \frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{\cos\varphi}$$

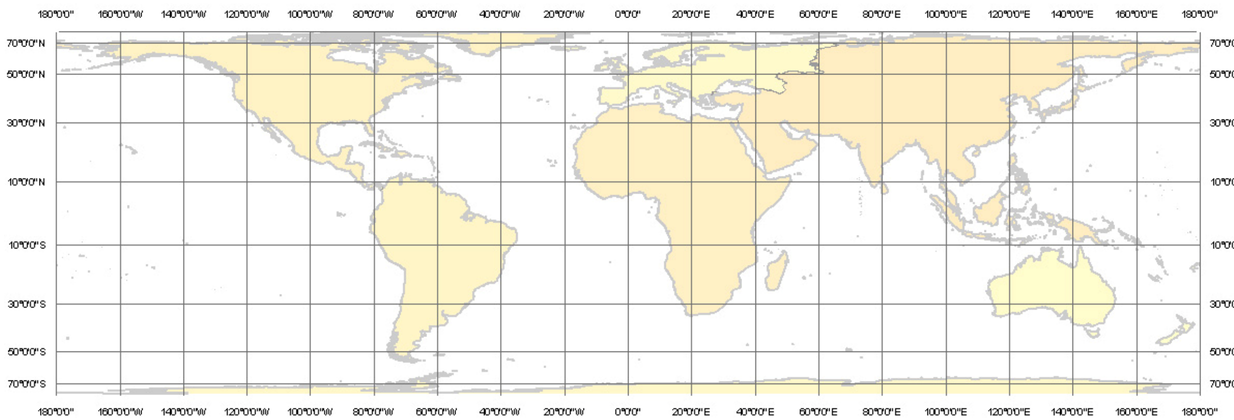


Fig. 6.4 Harta lumii în proiecţia Lambert

6.7. Proiecţia cilindrică dreaptă conformă Mercator cu latitudini crescânde

A fost construită pentru prima data în 1569 de către cartograful olandez Gerhard Kremer (Mercator).

În această proiecţie, suprafaţa desfăşurabilă este cilindrul, care poate fi considerat tangent la Ecuator sau secant la două paralele oarecare. Deci, este o proiecţie cilindrică dreaptă.. Atât meridianele, cât şi paralelele se reprezintă prin linii drepte paralele şi perpendiculare unele pe

altele; meridianele se menţin echidistante, iar paralelele se depărtează între ele pe măsura creşterii latitudinii .
Astfel, reţeaua are aspectul unor dreptunghiuri alungite din ce în ce mai mult în sensul meridianelor, pe măsura creşterii latitudinii, din care cauză proiecţia se mai numeşte şi cu latitudini crescânde.
Construcţia reţelei cartografice se realizează calculându-se mai întâi distanţa dintre paralele şi apoi distanţa dintre meridiane.

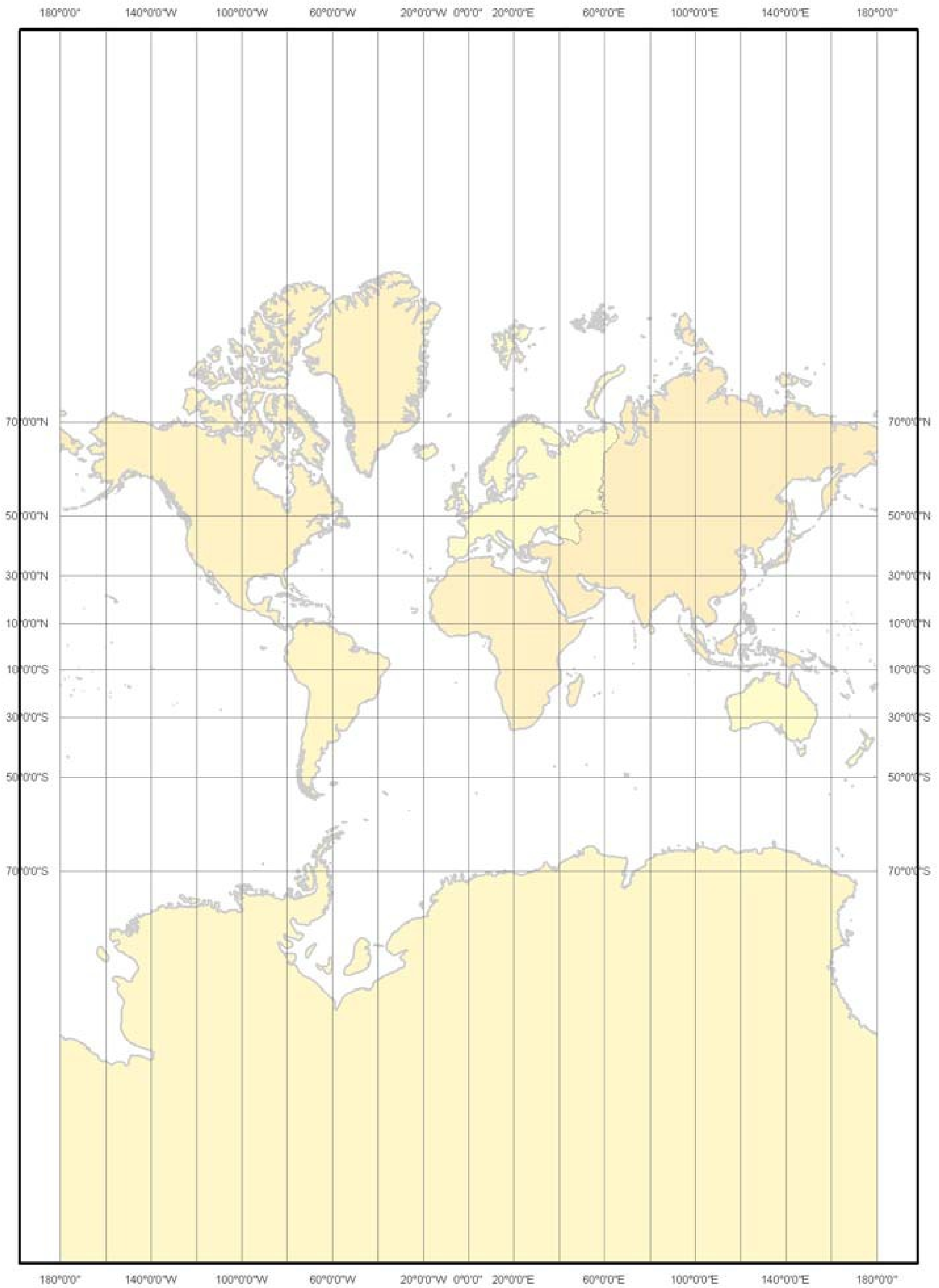


Fig. 6.5 Harta lumii în proiecţia Mercator

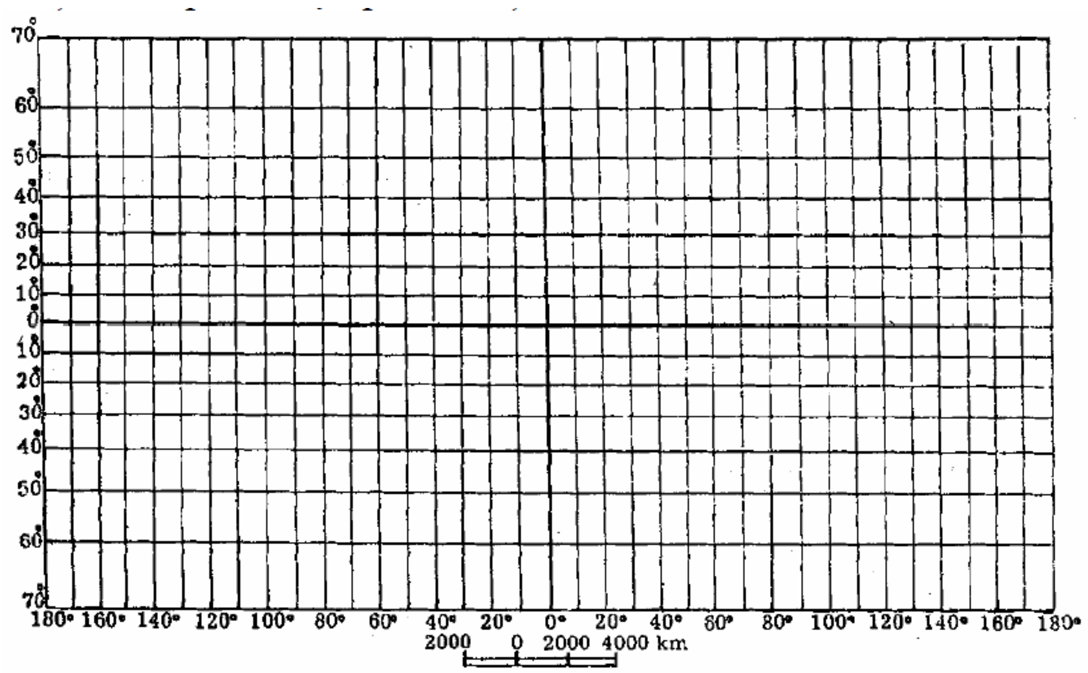


Fig. 6.6 Reţeaua cartografică în proiecţia Mercator

Distanţa dintre Ecuator şi oricare paralelă se poate determina cu ajutorul relaţiei:

$$y = \frac{C}{0,43429} \log tg\,(45^0 + \frac{\varphi}{2})$$

în care: *C* – este raza globului redusă la scară (în cazul când cilindrul este tangent la sferă; dacă cilindrul este secant, atunci *C = R cos φo*); *φo* – este latitudinea paralelei de secanţă; *φ* – este latitudinea paralelei care se proiectează.
Când *φ = 90o*, rezultă:

$$y = \frac{C}{0,43429} \log tg\,90^0 = \infty$$

adică polii nu se pot reprezenta în această proiecţie, deoarece se găsesc la infinit faţă de ecuator.
Distanţa dintre meridiane rămâne constantă pentru întreaga reţea şi se obţine din relaţia:

$$X = R\lambda \rightarrow \frac{2\pi\,R\lambda}{360^0} = \frac{\pi\,R\,10^0}{180^0} = \frac{\pi R}{18^0} = 0,1745$$

în care: *R* – este raza globului redusă la scara, iar *λ* – este diferenţa de longitudine între două meridiane consecutive.
În această proiecţie reţeaua cartografică se construieşte practic până la paralelele de ± 80°, deoarece la 90°, y = ∞.
Din punctul de vedere al deformărilor, proiecţia Mercator este o proiecţie conformă, păstrând deci nedeformate unghiurile, deformând însă foarte mult suprafeţele. Astfel, la latitudinea de ± 60°, suprafeţele sunt mărite de patru ori, iar la latitudinea de ± 80°, de peste 33 ori.
Modul repartiţiei deformărilor în cadrul reţelei cartografice în proiecţia Mercator este prezentat şi în figura 6.7. cu ajutorul profilului omenesc.

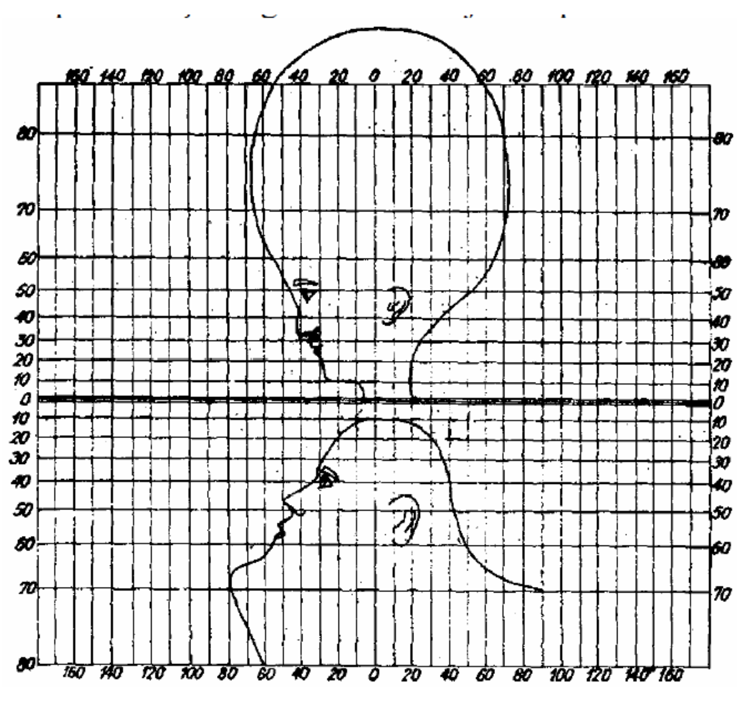


Fig. 6.7. Repartiţia deformărilor în proiecţia Mercator cu ajutorul profilului omenesc

Datorită deformării foarte mult a suprafeţelor, această proiecţie nu este indicată a se folosi în construcţia hărţilor didactice pentru că dă o imagine neverosimilă asupra repartiţiei uscatului pe de o parte, iar pe de alta, asupra regiunilor uscatului situate la latitudini mari. Aşa, de exemplu Groenlanda apare ca fiind aproximativ egală cu Africa, deşi în realitate Africa este de circa 15 ori mai mare decât Groenlanda. De asemenea, Peninsula Scandinavă apare mai mare decât cele trei peninsule sudice ale Europei considerate
împreună: Iberică, Italică şi Balcanică, fapt iarăşi inexact. Importanţa practică a proiecţiei Mercator constă în aceea că ea întruneşte toate calităţile unei hărţi ce se foloseşte în navigaţia maritimă.

6.8. Utilizarea proiecţiilor cilindrice

Proiecţiile cilindrice echidistante drepte şi echivalente drepte se utilizează pentru întocmirea hărţilor la scări mici pentru reprezentarea regiunilor ecuatoriale care se întind mai mult pe longitudine, în cazul cilindrului tangent, sau a regiunilor care se întind în lungul paralelelor de secţionare în cazul cilindrului secant.

Proiecţiile cilindrice conforme drepte sunt avantajoase pentru reprezentarea zonei ecuatoriale care se întinde mai mult pe longitudine. De asemenea, aceste proiecţii se utilizează pentru reprezentarea unor porţiuni mari ale suprafeţei terestre care se întind în direcţia paralelelor, precum şi pentru întreaga suprafaţă terestră, dar pentru hărţi la scări mici şi cu caracter de ansamblu, cum ar fi de exemplu hărţi care redau cursurile apelor, vânturilor, precipitaţiilor şi altele.

Una dintre proiecţiile cilindrice drepte utilizate frecvent pentru întocmirea hărţilor de navigaţie maritimă şi aeriană este proiecţia cilindrică dreaptă conformă Mercator, deoarece curba care pe suprafaţa elipsoidului taie meridianele sub unghiuri (azimute) constante, numită loxodromă se reprezintă în această proiecţie printr-o dreaptă.

Curs nr. 10-11
6.9. PROIECŢIA GAUSS-KRUGER

Proiecţia cilindrică transversală Gauss - Krüger s-a introdus în anul 1951. În cadrul acestei proiectii, elipsoidul de referinţă se proiectează pe suprafaţa interioară a unui cilindru, a cărui axă coincide cu axa ecuatorială şi este perpendiculară pe planul meridianului (deci, se află în poziţie transversală). Este o proiecţie conformă deoarece pastrează nedeformate unghiurile.
Tăind cilindrul după una din generatoarele sale şi desfăşurându-l în plan, meridianul central şi ecuatorul se proiectează prin linii drepte, toate celelalte meridiane şi paralele proiectându-se prin linii curbe.

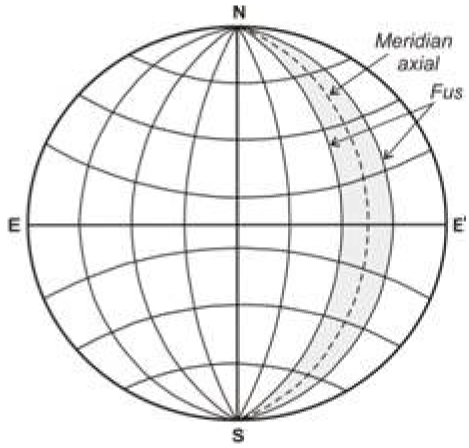


Fig. 6.8 - Aspectul retelei cartografice în Proiectia Gauss – Krüger

Din studiul acestei proiecţii s-a constatat că deformările lungimilor sunt admisibile pe zone de câte 6^o longitudine. Din acest motiv, în proiectia Gauss - Krüger, întreaga suprafaţă a globului a fost împărţită în zone mărginite din 6^o în 6^o. O astfel de zonă delimitată de două meridiane poartă numele de *fus*, pe întreaga suprafaţă a globului existând 60 de fuse (60 fuse x 6^o = 360^o).
Fiecare fus are câte un meridian central, cunoscut sub numele de *meridian axial,* situat la câte 3^o depărtare faţă de cele două meridiane marginale. Rezultă că proiectarea celor 60 de fuse de câte 6^o se face pe suprafaţa laterală a 60 de cilindri care se succed unul după altul, cu axele perpendiculare pe axa polilor şi cu tangenta la glob pe liniile meridianelor axiale ale fuselor. Tăind fiecare cilindru de-a lungul unei generatoare şi desfăşurându-l pe plan se obţine zona respectivă în planul orizontal.
Pe harta lumii la sc. 1:1000000, teritoriul tarii noastre este acoperit de fusul 34 la vest de meridianul de 24^o longitudine estică şi fusul 35 la est de acelaşi meridian. Meridianele axiale ale celor 2 fuse au longitudine estică de 21^o şi respectiv 27^o şi reprezintă meridianele de deformare zero. Rezultă că cele mai mari deformări vor apare între meridianele de 23^o - 25^o şi 29^o - 30^o longitudine estică.
Totuşi, aceste deformări sunt foarte reduse, având în vedere că ţară noastră se află la o distanţă apreciabilă faţă de ecuator, unde deformările au valori mai mari, fiind determinate de depărtarea maximă a meridianelor marginale faţă de cel axial.

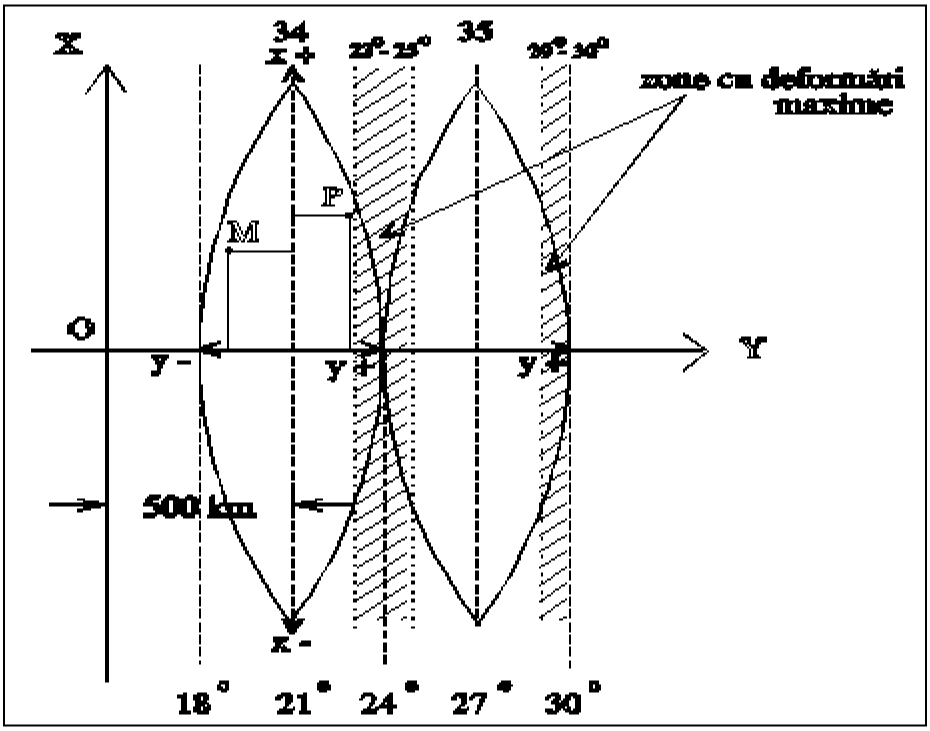


Fig. 6.9 - Sistemul de coordonate în proiectia Gauss – Krüger

Pentru fiecare fus există un sistem de coordonate rectangulare, în total existând 60 de sisteme de coordonate rectangulare.
În cadrul acestei proiecţii, axa Ox se consideră paralelă cu proiectia meridianului axial, iar axa Oy se considera proiectia ecuatorului, ceea ce înseamna ca sistemul de axe este inversat. Originea sistemului de axe se gaseste la intersectia meridianului axial cu ecuatorul.
Pentru ca toate punctele de pe harta sa aiba coordonate pozitive, meridianul axial se considera la o departare de 500 km fata de axa ox. Deoarece s-ar putea sa existe aceleasi coordonate pentru puncte situate în fuse diferite s-a convenit ca în fata ordonatei y sa se scrie numarul fusului, numaratoarea începand de la Greenwich.
De exemplu, în fig. 6.6, punctele M şi N au coordonatele:
- X_M = 5 250 100 m şi X_N = 5 210 100 m;
- Y_M = 4 650 200 m şi Y_N = 5 650 200 m..
X reprezinta departarea punctelor M şi N fata de ecuator, iar Y se interpreteaza astfel:
- 4 şi 5 arata ca punctele respective se afla în fuse diferite, adica M în fusul 34 şi N în fusul 35
- 650.200 m arata ca ambele puncte se gasesc la est de meridianul axial, la o departare de 150.200 m (650.200 - 500.000 = 150.200 m).
Un alt punct P, a carui ordonata y are valoarea de 4.450.000 se va gasi în fusul 4 (indicat de prima cifra), dar la vest de meridianul axial, la o departare de 50.000 m (500.000 - 450.000 = 50.000 m).
În concluzie, coordonatele rectangulare (x şi y), ca şi cele geografice (λ şi φ) dau indicatii asupra pozitiei unui punct pe globul terestru.

6.9.1 Prezentare generală
Proiecţia Gauss-Kruger, cunoscută şi sub denumirile "proiecţia Gauss", "reprezentarea conformă Gauss", sau "proiecţia cilindrică transversală Gauss" a fost adoptată în România în anul 1951, odată cu adoptarea " sistemului de coordonate 1942".
Caracteristicile proiecţiei Gauss-Kruger
Este o proiecţie conformă (unghiurile se reprezintă în planul de proiecţie fără deformaţii)
Pentru reprezentarea elipsoidului în proiecţia Gauss, acesta se împarte în fuse de la nord la sud, delimitate de două meridiane marginale. Orice fus are un meridian axial şi longitudinea acestuia, λ0 trebuie precizată faţă de meridianul origine.

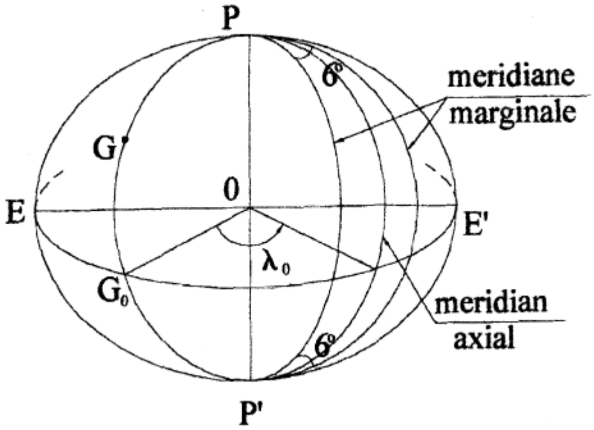


Fig. 7.0. Fus de 6° in proiecţia Gauss

Fiecare fus are propriul său sistem de axe de coordonate şi se reprezintă separat în planul de proiecţie Gauss, respectând următoarele condiţii de bază:

- reprezentarea plană este conformă;
- meridianul axial al fusului se reprezintă în plan printr-o linie dreaptă care se ia ca axă Ox, fiind în acelaşi timp şi axă de simetrie;
- în orice punct de pe dreapta prin care se reprezintă meridianul axial deformaţitte liniare sunt nule.

Aspectul reţelei cartografice in proiecţia Gauss:

Meridianele se reprezintă prin curbe oarecare cu concavitatea spre meridianul axial, care se reprezintă printr-o dreaptă. Aceste curbe sunt simetrice faţă de meridianul axial al fusului.

Paralelele se reprezintă prin curbe oarecare cu concavităţile îndreptate spre polii respectivi. Ele sunt simetrice faţă de segmentul de dreaptă prin care se reprezintă ecuatorul.

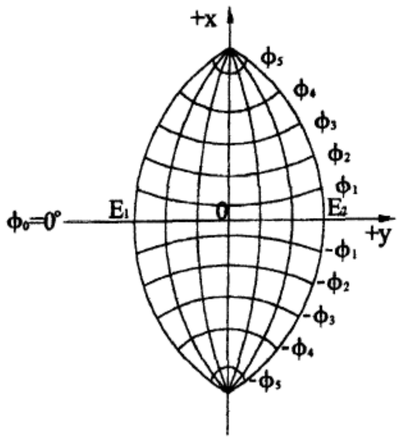


Fig. 7.1. Aspectul reţelei de meridiane şi paralele dintr-unfus in proiecţia Gauss

Pentru reprezentarea întregului glob sunt necesare 60 de fuse a câte 6° fiecare, numerotate conform unei înţelegeri internaţionale, cu cifre arabe de la 1 la 60. Numerotarea începe cu 1 meridianul de longitudine 180° şi continuă spre est, aşa cum se vede în figura de mai jos. Meridianul Greenwich separă fusele 30 şi 31.

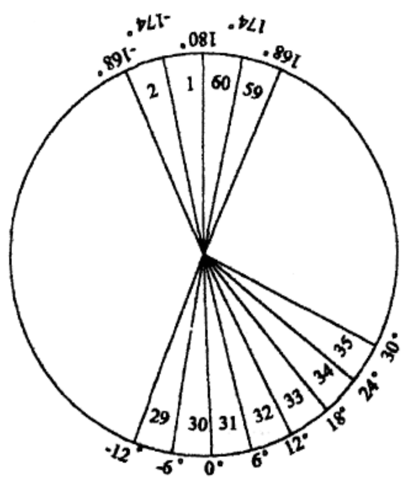


Fig. 7.2. Numerotarea fuselor de 6° in proiecţia Gauss

Teritoriul României este situat în rusele 34 şi 35, ale căror meridiane axiale sunt: λ_0 = 21° şi λ_0 = 27°.

În proiecţia Gauss, în anumite situaţii se utilizează şi *coordonate false,* şi anume coordonata y se modifică cu +500000 m, pentru ca toate punctele unui rus să aibă coordonate pozitive.

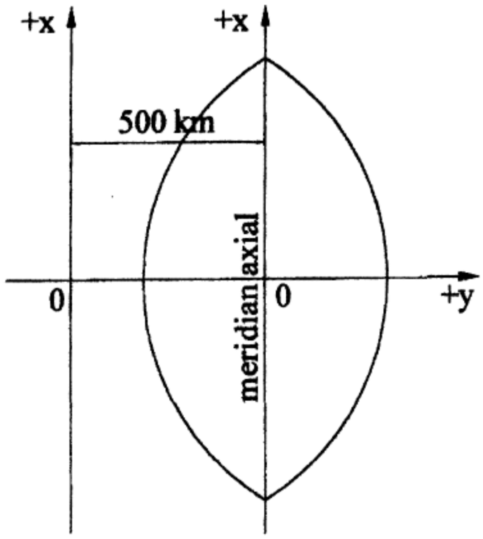


Fig. 7.3. Coordonate false in proiecţia Gauss

6.9.2 Transformări de coordonate în proiecţia Gauss-Kriiger

6.9.2.1. Calculul coordonatelor rectangulare plane (x,y) în funcţie de coordonatele geografice (φ,λ)

Formulele de calcul pe baza cărora se face transformarea coordonatelor geografice (φ,λ) în coordonate rectangulare plane (x,y) sunt următoarele:

$$x = \beta + \frac{N}{2\rho''^2} l^2 \sin\varphi\cos\varphi + \frac{N}{24\rho''^4} l^4 \sin\varphi\cos^3\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$

$$+ \frac{N}{720\rho''^6} l^6 \sin\varphi\cos^5\varphi(61 - 58t^2 + t^4)$$

$$y = \frac{N}{\rho''} l \cos\varphi + \frac{N}{6\rho''^3} l^3 \cos^3\varphi (1 - t^2 + \eta^2) +$$
$$+ \frac{N}{120\rho''^5} l^5 \cos^5\varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)$$

unde:

β = lungimea arcului de meridian măsurat de la ecuator până la paralelul de latitudine 9;
l = diferenţa de longitudine între meridianul punctului considerat şi meridianul axial al fusului (exprimată în secunde);
N = marea normală;

$$\rho'' = 206265$$
$$t = tg\varphi$$
$$\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$$

Formulele de mai sus asigură o precizie de ordinul 0.001 m pentru calculul coordonatelor rectengulare plane x şi y.

6.9.2.2. *Transformarea coordonatelor rectangulare plane (x,y) în coordonate geografice (φ,λ)*

Fie un punct D în planul proiecţiei Gauss de coordonate x, y cunoscute, pentru care se vor calcula coordonatele (φ,λ.) de pe elipsoid.

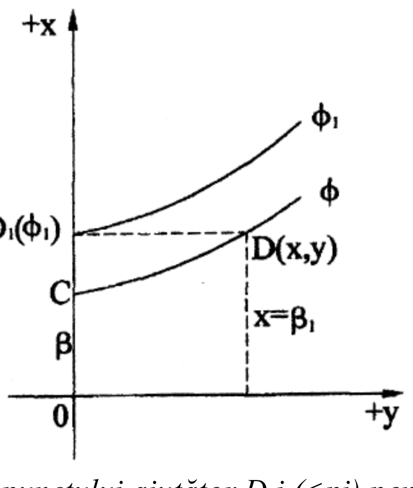


Fig. 7.4. Utilizarea punctului ajutător D i (<pi) pentru calcul latitudinii

Paralelul de latitudine φ al punctului D intersectează axa Ox (meridianul axial) în punctul C, iar dreapta dusă prin D, paralelă cu Oy, în punctul ajutător D1(x,o) de latitudine φι. Lungimea segmentului OD1 este egală cu lungimea arcului de meridian măsurat de la ecuator până la paralelul de latitudine (φi: OD1=βl=x. în funcţie de β1 se poate calcula prin interpolare valoarea latitudinii β1.

$$\varphi" = \varphi_1" + y^2[-\frac{t_1\rho"}{2N_1^2}(1+\eta_1^2) +$$

$$+y^4\frac{t_1\rho"}{24N_1^4}(5+3t_1^2+6\eta_1^2-6t_1^2\eta_1^2-3\eta_1^4-9t_1^2\eta_1^4)+$$

$$+y^6\frac{t_1\rho"}{720N_1^6}(-61-90t^2-45t^4)$$

$$l" = \frac{\rho"}{N_1\cos\varphi_1}y - \frac{\rho"}{6N_1^3\cos\varphi_1}(1+2t_1^2+\eta_1^2)y^3 +$$

$$+\frac{\rho"}{120N_1^5\cos\varphi_1}(5+28t_1^2+24t_1^4+6\eta_1^2+8\eta_1^2t_1^2)y^5$$

$$\lambda = \lambda_0 + l",$$

unde:
N_1, t_1, $\eta_1$se calculează pentru latitudinea φ1.
Formulele de mai sus asigură o aproximaţie de ordinul (10^4-10^5)" pentru calculul coordonatelor (φ,λ), ceea ce corespunde abaterilor de maxim l cm în planul de proiecţie.
Transformările de coordonate din proiecţia Gauss se pot realiza şi prin procedee cu coeficienţi constanţi. Valorile coeficienţilor constanţi au fost calculate pentru latitudini cuprinse în intervalul 42°-50° de Falie şi Struţu în anul 1957.

6.9.3. Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie Gauss-Kruger

Reducerea direcţiilor la planul de proiecşie se mai numeşte şi *reducerea direcţiilor la coardă* şi constă în a calcula corecţiile şi a le aplica direcţiilor măsurate. Liniile geodezice de pe elipsoid se reprezintă în proiecţia Gauss prin curbe cu concavitatea spre meridianul axial.

Formulele de calcul pentru reducerea direcţiilor măsurate la planul de proiecţie Gauss diferă de la un ordin de triangulaţie la altul.

În exeplul prezentat se vor folosi formulele de calcul pentru ordinele de triangulaţie III şi IV.

Formule utilizate:

$$\delta_{ij} = -\frac{f_m}{3}(x_j - x_i)(2y_i + y_j)$$

$$\delta_{ji} = +\frac{f_m}{3}(x_j - x_i)(2y_j + y_i)$$

$$f = \frac{\rho"}{2R^2},$$

$$x_m = \frac{x_i + x_j}{2}$$

unde:

(x_i, y_i) şi (x_j, y_j)- sunt coordonatele plane Gauss ale punctelor ce determină direcţiile;

f- este factorul excesului sferic.

δ_{ij}, δ_{ji} -sunt corecţiile de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie Gauss-Kruger.

Pentru a evita orice greşeală se trece la verificarea corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie, pe triunghiuri.

Regulă de verificare:

"În orice triunghi dintr-o reţea geodezică, suma corecţiilor de reducere la planul de proiecţie ale celor trei unghiuri ale triunghiului, trebuie să fie egală cu excesul sferic ε al triunghiului respectiv, luat cu semn schimbat".

Corecţia de reducere la plan a unui unghi se obţine ca diferenţă între corecţiile de reducere la plan a celor 2 direcţii ce determină unghiul.

Formula generală a excesului sferic este $\varepsilon = \rho^{cc} \cdot \frac{S}{R^2}$, unde S este suprafaţa triunghiului, iar R este raza medie Gauss..

6.9.4. Deformaţiile în proiecţia Gauss

Proiecţia Gauss este o proiecţie conformă, deci unghiurile se reprezintă în planul de proiecţie fără deformaţii, dar în general se deformează lungimile şi ariile.
Lungimile de pe meridianul axial nu se deformează, în orice punct care nu este situat pe meridianul axial se produc deformaţii pozitive, în lungul unui paralel oarecare de latitudine φ , deformaţiile liniare cresc aproximativ proporţional cu distanţa faţă de meridianul axial, astfel încât pe meridianele marginale se ating deformaţiile maxime (de exemplu pentru latitudinea medie a României, φ =46°, deformaţia liniară relativă este D=+66.4 cm/km). De asemenea, pe orice meridian, deformaţia maximă a lungimilor se produce la intersecţia cu ecuatorul.
în ceea ce priveşte deformaţiile areolare, şi acestea sunt nule pe meridianul axial al fusului, sunt pozitive în toate celelalte puncte şi cresc în valoare pe măsură ce creşte depărtarea faţă de acest meridian.

6.9.5. Reducerea distanţelor de pe elipsoid la planul de proiecţie Gauss

Reducerea unei distanţe s de pe elipsoid la planul de proiecţie Gauss înseamnă de fapt reprezentarea acesteia în planul de proiecţie, proces prin care distanţa de pe elipsoid se deformează neuniform pe toată lungimea ei.
Formulele folosite la rezolvarea acestei probleme sunt :

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{(\Delta y)^2}{24R^2}$$

unde s este distanţa pe elipsoid,
S-dinstanţa redusă la planul de proiecţie
y_m este coordonatele punctului P aflat la mijlocul segementului P-i.

$$y_m = \frac{y_P + y_i}{2}$$

$$\Delta y = y_i - y_P$$

R_m este raza medie de curbură Gauss
Pentru a putea vedea ce influenţî are reducerea distanţelor de pe elipsoid la planul de proiecţie Gauss, asupra coordonatelor plane trebuiesc calculate coordonatele provizorii ale punctelor geodezice odată folosind distanţa neredusă, apoi folosind distanţa redusă.

Prin diferenţele dintre coordonate obţinem influenţa reducerii distanţelor.

$$x = x_N + s \cdot \cos\theta$$

$$y = y_N + s \cdot \sin\theta$$

$$x_r = x_N + S \cdot \cos\theta$$
$$y_r = y_N + S \cdot \sin\theta$$

6.9.6. Nomenclatura trapezelor în proiecţia Gauss

Hărţile şi planurile topografice în proiecţia Gauss au în general un *cadru geografic,* format din imaginile plane ale unor arce de meridiane şi paralele, care delimitează pe elipsoidul de rotaţie nişte *trapeze curbilinii,* denumite în mod curent *trapeze.* Fiecare trapez are o anumită *nomenclatură* şi se reprezintă pe o foaie de hartă separată. In legătură cu nomenclatura trapezelor se folosesc următoarele scări standard: 1:1.000.000, 1:500.000, 1:200.000, 1:100.000, 1:50.000, 1:25.000, 1:10.000, 1:5.000, 1:2.000.
Pentru împărţirea elipsoidului în trapeze la scara 1:1000000 se procedează astfel:
se trasează meridiane din 6° în 6°, care delimitează fuse, numerotate de la l la 60 şi paralele din 4° în 4° pornind de la ecuator spre poli, care delimitează zone
notate A, B, C, ...V. teritoriul României este situat în rusele 34 şi 35 şi în
zonele K, L, M. Nomenclatura unui trapez la scara l:1000000va fi formată din litera corespunzătoare zonei şi numărul fusului, de exemplu: L-35.
Nomenclaturile trapezelor la scări mai mari se stabilesc pornind de la trapezul 1:1000000. Dimensiunile graduale ale laturilor trapezelor şi nomenclaturile acestora sunt prezentate în tabelul şi figurile de mai jos:

Scara	Δφ	Δλ	Exemple de nomenclaturi
1:1.000.000	4°	6°	L-35
1:500.000	2°	3°	L-35-D
1:200.000	40'	1°	L-35-XXXVI
1:100.000	20'	30'	1-35-144
1:50.000	10'	15'	L-35-144-D
1:25.000	5'	7'30"	L-35-144-D-d
1:10.000	2'30"	3 '45"	L-35-144-D-d-4
1:5.000	1'15"	1'52",5	L-35-144-D-d-lV
1:2.000	37",5	56",25	L-35-144-D-d-4-IV-4

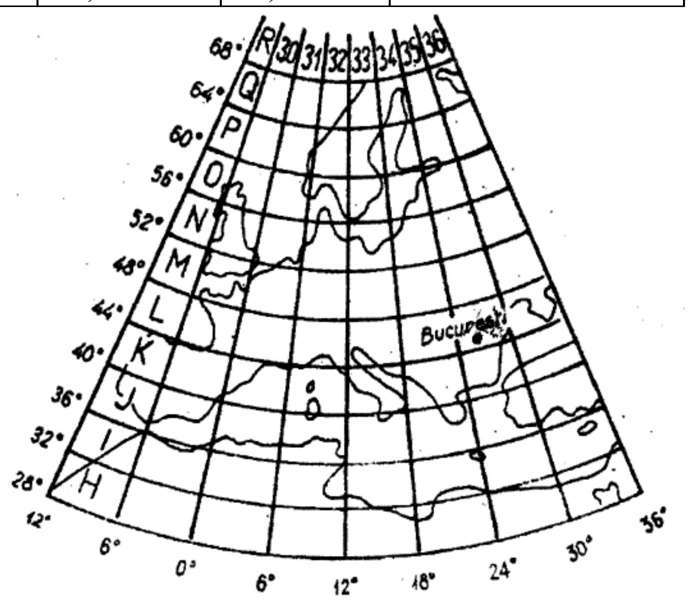


Fig. 7.5. Trapez la scara l: 1.000.000

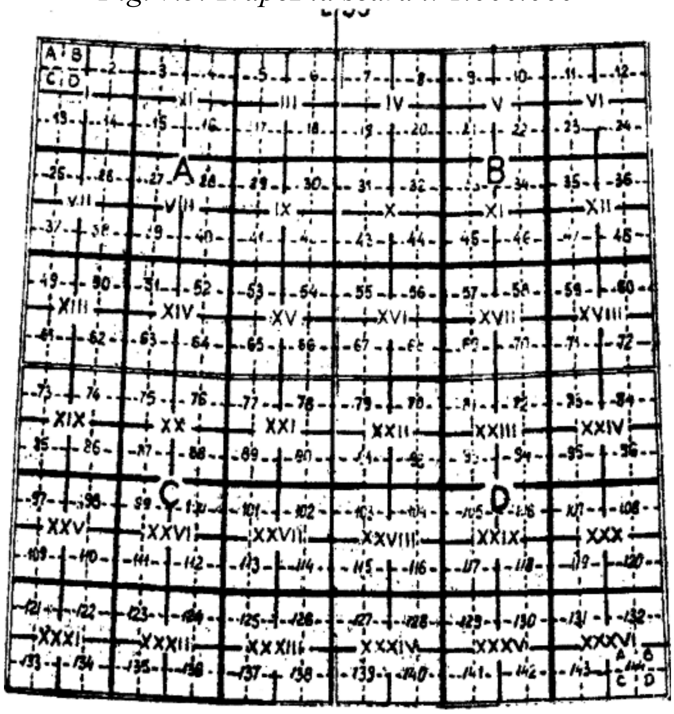


Fig. 7.6. Trapeze la scările 1:500.000, 1:200.000, 1:100.000, 1:50.000

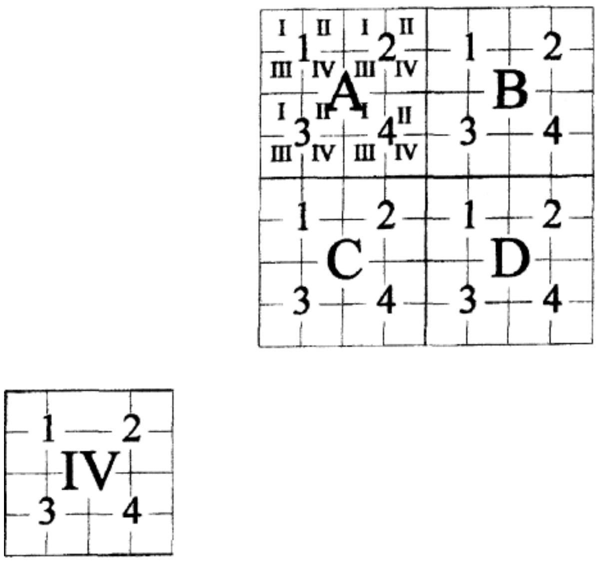


Fig.7.7. Trapeze la scările 50.000, 1:25.000, 1:10.000, 1:5.000, 1:2.000

Curs nr.12
PROIECŢIA UTM

1. Date generale

Proiectia MERCATOR a fost descoperita in anul 1569 de catre matematicianul olandez GERHARD KREMER alias MERCATOR (1512-1594). Proiectia ii poarta numele si are doua aspecte principale: unul direct sau normal, când cilindrul este tangent cu ecuatorul elipsoidului si altul transversal, când acesta este tangent cu un meridian dat.

Aspectul normal a fost intrebuintat prima data de MERCATOR si descris de WRIGHT (1599).

Aspectul transversal a fost descris de Lambert in anul 1772, studiat de GAUSS (1825-1830) si modelat pentru a fi intrebuintat in scopuri cartografice de KRÜGER in anul 1912. Datorita acestui fapt, aspectul transversal poarta numele de proiectie conforma GAUSS- KRÜGER.

Deoarece exista o mare varietate de executie a hartilor s-a ajuns totusi, in anul 1950 la elaborarea unui sistem de referinta universal, al intregii lumi, introdus pentru hartile topografice utilizate de tarile membre N.A.T.O. si numindu-se U.T.M. (Universal Transversal Mercator).

Prin sistemul de proiectie U.T.M. este reprezentat intreg globul, pentru toate cele 60 de fuse terestre.

Sistemul U.T.M. se intinde intre paralelul de 80° latitudine sudica si paralelul de 84° latitudine sudica. Datorita acestui fapt fusele terestre de 6° in longitudine (definite si in proiectia GAUSS-KRÜGER) cuprinse intre aceste paraleluri poarta denumirea *de zone*.

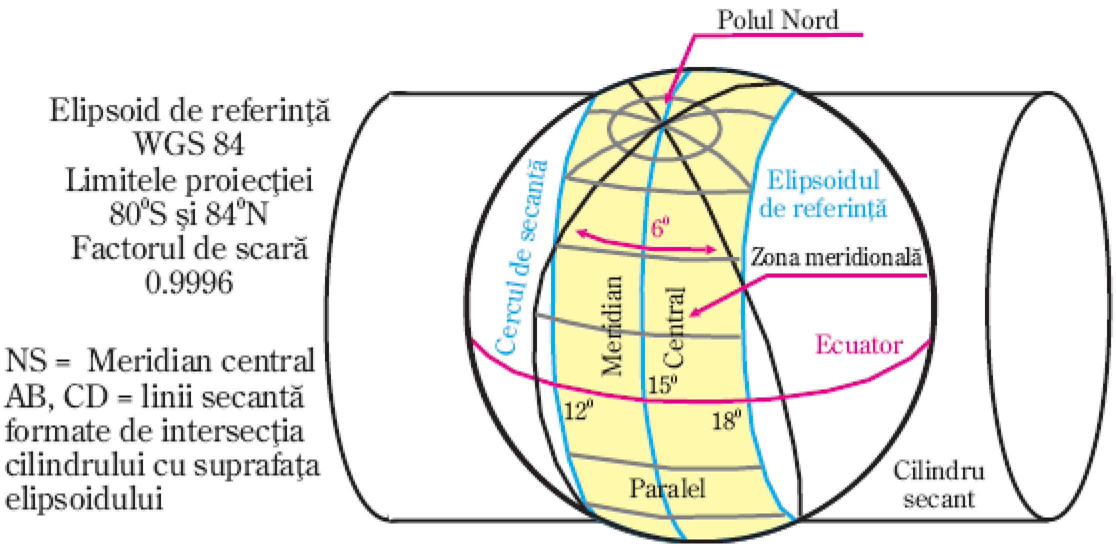
Peste limita de 84° latitudine nordica pâna la pol, respectiv peste limita de 80° latitudine sudica pâna la pol se aplica un alt sistem numit U.P.S. (Universal Polar Stereografie).

Deosebirea fundamentala intre sistemul U.T.M. si alte sisteme nationale (Gauss-Krüger) consta in faptul ca proiectia U.T.M. nu se exercita numai asupra unui singur elipsoid ci la 5 elipsoide de referinta in scopul de a ajunge la o unificare mondiala.

Acesti elipsoizi sunt CLARKE 1886 (pentru America de Nord), CLARKE 1880 (pentru Africa), BESSEL 1841 (pentru fostele tari sovietice, Japonia si partea de sud-est a Asiei), EVEREST 1830 (pentru India si partile adiacente ale sud-estului Asiei) si HAYFORD 1909 (pentru celelalte parti ale lumii).

In urma cuceririi de catre om a spatiului cosmic si datorita dezvoltarii fara precedent a tehnologiei in anul 1984 tarile occidentale si S.U.A. au introdus proiectia U.T.M. pe elipsoid asociat sistemului W.G.S.-84, determinat cu ajutorul satelitilor artificiali ai Pamântului prin metode de pozitionare globala.

Elipsoidul de rotatie utilizat este cel asociat sistemului de referinta international W.G.S.-84 (WORLD GEODETIC SYSTEM 1984) introdus prin utilizarea in scopuri civile si militare a sistemului de pozitionare prin sateliti G.P.S. (Global Positioning System).



2. PROIECTIA U.T.M. (UNIVERSAL TRANSVERSAL MERCATOR)

Proiectia U.T.M. este o proiectie cu ajutorul careia se poate reprezenta intreg globul terestru având avantajul ca *se reduc deformatiile liniare* datorita faptului ca se introduce un factor de scara de-a lungul meridianului axial (central) al fusului (zonei).

In proiectia Gauss-Krüger stim ca deformatiile liniare de-a lungul meridianului axial (central) al fluxului sunt nule (sau modulul de deformatie liniar este egal cu 1), acestea crescând pe masura ce ne indepartam de meridianul axial, ajungând la o valoare maxima in apropierea meridianelor marginale ale fusului, la latitudinea medie a tarii noastre la aproximativ 75-77 cm/km.

In proiectia U.T.M. aceste deformatii maxime, in vecinatatea meridianelor marginale se injumatatesc datorita introducerii acestui factor de scara de-a lungul meridianelor axiale ale fuselor (zonelor).

Altfel spus, acest factor de scara care apare de-a lungul meridianelor axiale ale zonelor se datoreaza faptului ca, meridianul axial (central) al zonei nu mai este ca si la proiectia Gauss-Krüger, *ci secant* (vezi fig. 1).

Intersectia dintre suprafata terestra si suprafata cilindrului se face dupa doua meridiane numite *meridiane de secanta*.

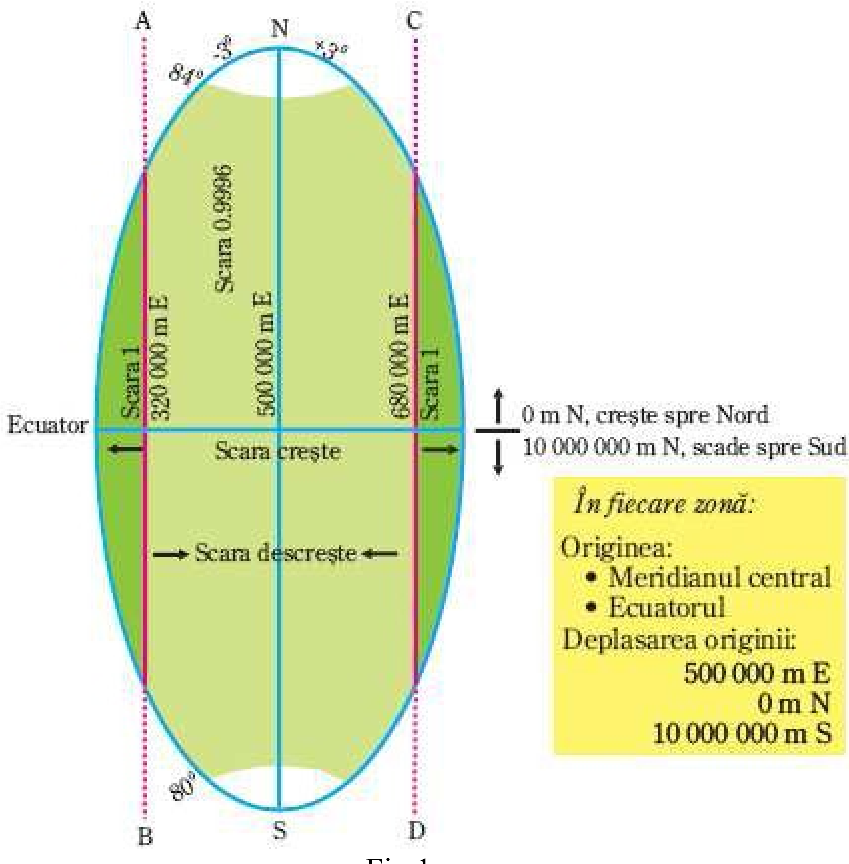


Fig.1

Deci proiectia U.T.M. face parte din grupa proiectiilor cilindrice transversale conforme, care dau o reprezentare a elipsoidului de referinta direct pe planul cilindrului.

Reprezentarea suprafetei terestre se face pe zone de 6° diferenta de longitudine, proiectia U.T.M. fiind tot o proiectie *conforma*, aceasta nedeformând unghiurile (modulul de deformatie unghiular este egal cu 1).

Deci, datorita faptului ca deformatiile liniare sunt mici, iar deformarile unghiulare sunt nule, reprezentarea terenului este precisa pe o harta topografica executata in proiectia U.T.M..

Zonele in proiectia U.T.M. (vezi fig. 2) se numeroteaza incepând de la meridianul de longitudine 180° (meridianul opus meridianului ce trece prin punctul Greenwich), cu cifre arabe de la 1 la 60, in sens antiorar.

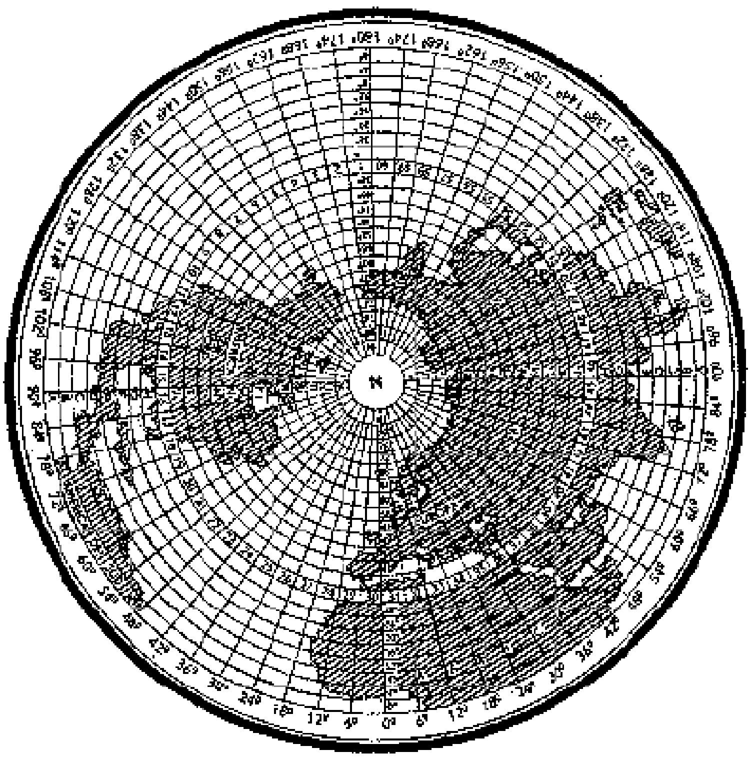


Fig.2

Proiectia U.T.M. este raportata la un elipsoid asociat sistemului W.G.S.-84 determinat cu ajutorul satelitilor artificiali ai Pamântului, prin metode de pozitionare globala, aceasta ducând la o precizie ridicata atât la pozitionarea elipsoidului cât si la determinarea parametrilor elipsoidului.

Suprafata elipsoidului pe plan *se proiecteaza* astfel:

a) reprezentarea sa fie conforma (modulul de deformatie unghiulara este nul);
b) reprezentarea meridianului axial (central) al unei zone este o dreapta fata de care proiectia este simetrica;
c) scara pe directia meridianului axial este $k_0 = 0,9996$, deci cilindrul care este circumscris elipsoidului nu mai este tangent la meridianul axial (ca in cazul proiectiei Gauss-Krüger), ci secant, dupa doua meridiane simetrice fata de meridianul axial, numite meridiane de secanta;
d) sistemul de coordonate propriu fiecarui fus.

Intr-o zona de 6° exista linii de secanta (deformatii liniare nule) situate la aproximativ 180.000 metri E si V fata de meridianul axial (central) al zonei respective.

Ca si in cazul proiectiei Gauss-Krüger, pentru evitarea coordonatelor negative, meridianului axial (central) i se atribuie o valoare falsa a estului de 500.000 metri (500 km E) (vezi fig. 3).

Sau, altfel spus, meridianul axial al zonei de 6° este translatat spre stânga cu 500.000 m pentru a evita coordonate negative in interiorul zonei respective.

In fig. 3 se poate observa sistemul de axe rectangulare intr-o zona de 6°.

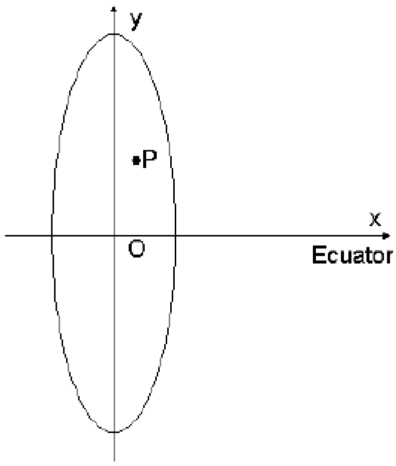


Fig.3

Deci meridianele de secanta se afla la 320.000 m E si respectiv 680.000 m E fata de meridianul axial translatat spre stânga cu 500.000 m E.

Axele sistemului rectangular al unei zone de 6° in proiectia U.T:M. sunt inversate ca in cazul proiectiei Gauss-Krüger.

a) *axa Ox* (abscisa) este pe orizontala si este data de proiectia ecuatorului in planul hartii topografice.

b) *axa Oy* (ordonata) este pe verticala si este data de proiectia meridianului central (axial) al zonei respective.

Pentru anumite *operatiuni speciale* de geodezie si artilerie in care sunt implicate distante lungi si precizii ridicate, sunt necesare anumite corectii pentru distantele masurate pe harta.

Acestea se pot determina prin folosirea factorului de scara, formulele exacte de determinare a acestor corectii se gasesc in cartile de specialitate si in cartile de *cartografie matematica*.

In proiectia U.T.M. factorul de scara este 1,000 de-a lungul liniilor (meridianelor) de secanta, descreste pâna la 0,9996 de-a lungul meridianului axial si creste pâna la 1,0010 in zonele limitrofe ale zonei.

Meridianele si paralele se reprezinta in proiectia U.T.M. prin curbe oarecare, meridianele fiind simetrice fata de meridianul axial al zonei care conform conditiei puse se reprezinta printr-o linie dreapta.

Paralele sunt simetrice fata de Ecuator , care se reprezinta printr-o linie dreapta.

Pozitia unui punct oarecare in planul proiectiei (in planul hartii) se determina intr-o retea de coordonate rectangulare X, Y. Aceasta retea de coordonate rectangulare, sau *reteaua rectangulara* ia nastere ducând linii paralele la axele de coordonate ale fiecarei zone.

Despre aceasta retea rectangulara in proiectia U.T.M. vom vorbi putin mai departe.

Pentru a evita coordonate X (abscise) negative ale punctelor situate la stânga (la vest) de meridianul central al zonei se adopta prin conventie meridianul de abscisa X = 500.000 m. Cu alte cuvinte *toate coordonatele X* in proiectia U.T.M. contin aceasta translatie de 500.000 m.

Daca dorim sa aflam pozitia exacta a unui punct oarecare fata de meridianul central al zonei respective, vom scadea 500.000 m.

In *emisfera sudica* apare particularitatea referitoare la coordonate Y (ordonate) negative, proiectia U.T.M. este o proiectie care se preteaza la reprezentarea intregii suprafete terestre.

Pentru a evita ordonate negative in emisfera sudica se adopta ca *Ecuatorul* sa aiba ordonata de 10.000.000 m, *dar numai pentru coordonatele din emisfera sudica*. Apare intrebarea fireasca. De ce 10.000.000 m?

De la Ecuator la Polul Sud sunt 90° latitudine. Distanta la teren acoperita de 1° de latitudine este de cca. 111 km deci:

90×111 km=9.900.000 m$\approx$10.000.000 m

Coordonatele geografice sunt exprimate in masuri unghiulare, mai precis in grade sexazecimale incepând cu valoarea de 0° la Ecuator, paralelele fiind numerotate pâna la valoarea de 84° N si 80° S , latitudinea poate avea aceeasi valoare numerica de la N la S de Ecuator, astfel incât *se indica* mereu directia N sau S.

Longitudinea se masoara atât spre Est cât si spre Vest incepând de la meridianul de origine (meridianul ce trece prin punctul Greenwich). Meridianele la Est de meridianul origine merg pâna la valoarea de 180° si sunt identificate ca longitudine estica. Similar se procedeaza si cu longitudinile vestice.

Concluzii la proiectia U.T.M.

- proiectia U.T.M. se refera la intreaga suprafata terestra;
- sistemul de coordonate rectangular este propriu fiecarui fus;
- pentru ca erorile de deformare liniare sa fie minime si obtinerea astfel unei precizii ridicate pe harta, proiectia se aplica pe zone delimitate pe meridiane numite fuse;
- România se afla pe fusele 34 si 35, marginea de jonctiune dintre cele doua zone este meridianul de longitudine de 24°, aproximativ jumatatea tarii;
- proiectie conforma, deformatiile unghiulare in orice pozitie pe harta sunt nule;
- existenta mai multor zone in proiectia U.T.M. (ca si in cazul proiectiei Gauss-Krüger) face necesara posibilitatea transformarii coordonatelor dintr-un fus in celalalt. Aceasta operatiune este impusa de anumite operatiuni ce se executa pe suprafete a doua zone invecinate (adiacente);
- in proiectia U.T.M. meridianul axial al zonei este secant la suprafata cilindrului (factorul de scara pe meridianul axial este k_o=0,9996), iar suprafata terestra se intersecteaza cu suprafata cilindrului dupa doua meridiane de secanta (factorul de scara pe aceste meridiane de secanta fiind k_S=1,000).

Problema transformarii coordonatelor dintr-o zona in alta va fi tratata intr-un capitol ulterior.

3. NOMENCLATURA SI IMPARTIREA PE FOI

Nomenclatura reprezinta un sistem de pozitionare a foilor pe harta pe suprafata globului terestru.

Dupa cum stim proiectia U.T.M. se preteaza pentru reprezentarea in plan a intregului glob terestru, mai bine zis, suprafata terestra cuprinsa intre paralelul de 80° latitudine sudica si paralelul de 84° latitudine nordica.

Nomenclatura foilor de harta executate in proiectia U.T.M. este diferita de cea pentru foile de harta executate in proiectia Gauss-Krüger.

Daca in proiectia Gauss-Krüger, ca scara de baza este 1:25.000, in proiectia U.T.M. sunt doua scari de baza si anume: 1:50.000 si 1:250.000.

A) Nomenclatura foilor de harta la scara 1:250.000

Nomenclatura unei foi de harta la scara 1:250.000 este formata din doua grupuri de caractere alfanumerice despartite prin linioara astfel:

a) *Primul grup* este alcatuit din doua litere si doua cifre cu urmatoarea semnificatie:

- prima litera reprezinta emisfera nordica (N) sau emisfera sudica (S);
- a doua litera reprezinta intervalul de 4° pe latitudine in care se afla foaia.

Numerotarea incepe cu litera „A" de la Ecuator spre nord si sud. Ordinea literelor este cea din alfabetul latin (de la A la V).

- grupul de doua cifre reprezinta numarul zonei (fusului in proiectia Gauss-Krüger).

Dupa cum stim, România se afla pe zonele (fusele) 34 si 35 (vezi fig. 4).

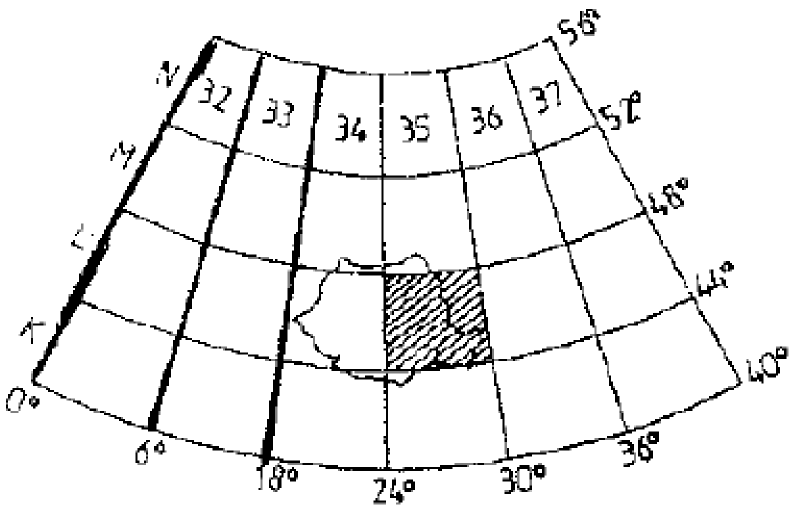


Fig. 4

b) *Al doilea grup* de caractere este format dintr-un numar ce reprezinta pozitia foii intr-un cadru de 4° pe latitudine si 6° pe longitudine.

Exemplu: NL 34-06

- N = emisfera nordica;
- 34 = zona 34 (a patra de la Greenwich spre est) care este cuprinsa intre meridianul de longitudine 18° si cel de longitudine 24°).
- 06 = a sasea foaie de harta din zona de 4° latitudine si 6° longitudine)

Ca si in proiectia Gauss-Krüger, harta la scara 1:1.000.000 a fost luata ca baza pentru hartile la scara 1:250.000. Deci, pentru obtinerea unei foi de harta la scara 1:250.000 s-a impartit foaia de harta la scara 1:1.000.000 in 16 foi de harta la scara 1:250.000 daca suprafata reprezentata este cuprinsa intre ecuator si paralelul de 40° latitudine nordica respectiv intre ecuator si paralelul de 40° latitudine sudica.

Dimensiunea unei astfel de foi de harta la scara 1:250.000 este de 1° pe latitudine si 1°30' pe longitudine.

Foaia de harta la scara 1:1.000.000 se imparte in 12 foi de harta la scara 1:250.000 daca suprafata reprezentata este cuprinsa intre paralelul de 40° latitudine nordica si paralelul de 84° latitudine nordica respectiv intre paralelul de 40° latitudine sudica si paralelul de 80° latitudine sudica.

Dimensiunea unei astfel de foi de harta la scara de 1:250.000 este de 1° pe latitudine respectiv de 2° pe longitudine.

Deci, in concluzie, nomenclatura unei foi de harta la scara 1:250.000 se compune din nomenclatura foii de harta la scara 1:1.000.000 si numarul foii de harta rezultat din impartire (vezi fig. 5).

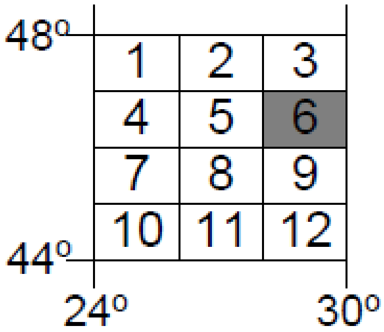


Fig. 5

B) Nomenclatura foilor de harta la scara 1:50.000

Nomenclatura foii de harta la scara 1:50.000 are ca baza tot harta la scara 1:1.000.000, dar denumirile pornesc de la zonele si subzonele delimitate de interesul N.A.T.O.

Dimensiunea unei foi de harta la scara 1:50.000 in zona României este de 15' pe latitudine si 18' pe longitudine. (In proiectia Gauss-Krüger, foile de harta la scara 1:50.000 au dimensiunile de 10' pe latitudine si 15' pe longitudine).

Suprafata reprezentata la scara 1:50.000 in proiectia U.T.M. este mai mare decât suprafata reprezentata la aceasta scara in proiectia Gauss-Krüger.

Scara hartii de 1:100.000, având dimensiunile de 30' pe latitudine si 36' pe longitudine, rezulta prin impartirea unei foi de harta la scara 1:1.000.000 in 80 de planse (vezi fig. 6).

Dimensiunile cadrului foii de harta la scara 1:50.000 rezulta din impartirea foii de harta la scara 1:100.000 in patru.

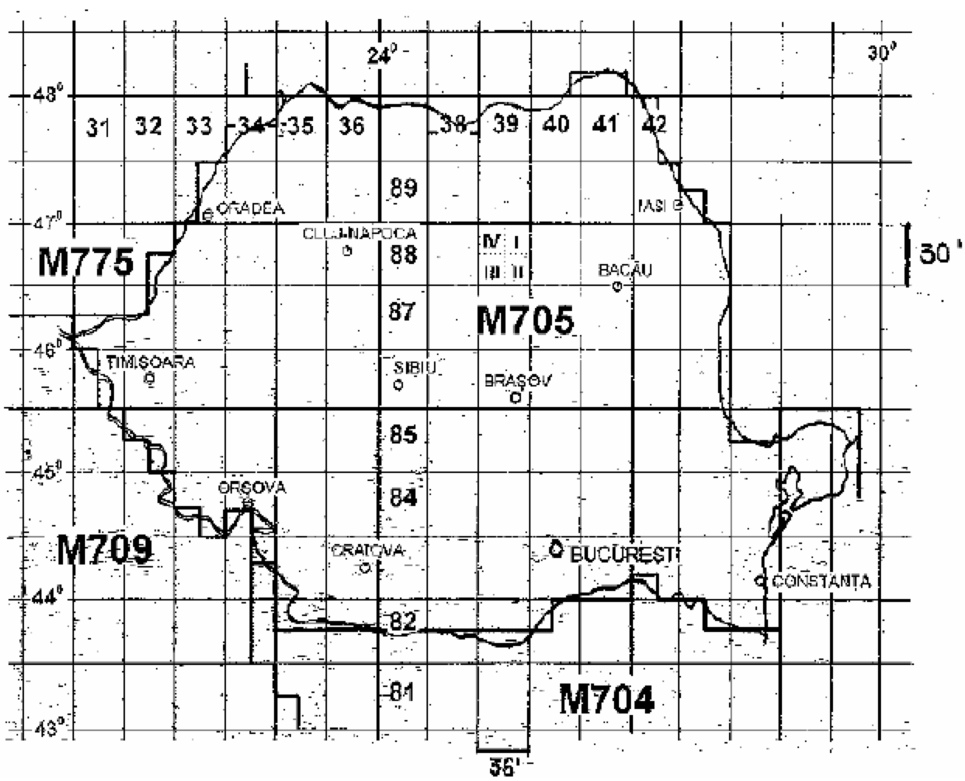


Fig.6

Nomenclatura unei foi de harta se compune din doua grupuri de caractere alfanumerice despartite de simbolul „×“.

Pentru a intelege mai bine, sa consideram foaia de harta la scara 1:50.000 cu nomenclatura M 705 × 3784 II.

a) **Primul grup** este alcatuit dintr-o litera si trei cifre având urmatoarea semnificatie:

– *primul caracter* (litera) semnifica regiunea de uscat delimitata de interesul N.A.T.O. Regiunii in care este România i s-a atribuit litera „M“.
– *al doilea caracter* este cifra 7 care ne arata ca este o foaie de harta cuprinsa intre scarile 1:35.000 – 1:70.000.

Acest caracter poate sa ia o valoare intre 0 si 9 functie de scara cuprinsa intre urmatoarele valori:

Cifra 1 – pentru scari mai mici de 1:5.000.000;

2 – pentru scari cuprinse in intervalul 1:2.000.000 – 1:5.000.000;
3 – pentru scari cuprinse in intervalul 1:510.000 – 1:2.000.000;
4 – pentru scari cuprinse in intervalul 1:255.000 – 1:510.000;
5 – pentru scari cuprinse in intervalul 1:150.000 – 1:255.000;
6 – scara cuprinsa intre 1:70.000 – 1:150.000;
7 – scara cuprinsa intre 1:35.000 – 1:70.000;
8 – scara mai mare de 1:35.000 in afara de planuri de orase;
9 – planuri de orase;
0 – foto harti.

– *al treilea caracter* semnifica o zona geografica din regiunea data (una sau mai multe tari). Pentru România, Grecia, fosta Iugoslavie si Bulgaria este atribuita cifra „0“.
– *al patrulea caracter* semnifica o subzona din zona data (de regula o tara). Pentru România este atribuita cifra „5“.

b) **Al doilea grup** este alcatuit din trei grupe de cifre.

– *primul grup* de cifre este format din doua cifre reprezentând numerotarea zonelor de <u>36</u>’ pe longitudine de la est la vest;
– *al doilea grup* de cifre este format din doua cifre reprezentând numerotarea zonelor de <u>30</u>’ pe latitudine de la sud la nord;
– *al treilea grup* de cifre reprezinta pozitia foii de harta in cadrul patrulaterului determinat mai sus (36’×30’).

In figura 6 se poate observa modul de impartire a unui astfel de patrulater.

Trebuie stiut faptul ca patrulaterul determinat anterior corespunde formatului unei foi de harta la scara 1:100.000 in proiectia U.T.M. Deci o foaie de harta la scara 1:100.000 in proiectia U.T.M. are dimensiunile 36’ pe longitudine si 30’ pe latitudine.

Nomenclatura unei foi de harta la scara 1:100.000 ar fi:

M <u>6</u>05×3784.

Nomenclatura unei foi de harta la scara 1:25.000 ar fi:

M 805×3784 II III (vezi fig. 7)

Dimensiunile unei foi de harta la scara 1:25.000 sunt de 9’ pe longitudine si 7’30” pe latitudine.

In concluzie se poate observa ca nomenclatura hartilor topografice in proiectie Gauss-Krüger este total diferita de nomenclatura foilor de harta in proiectia U.T.M., formatul hartilor topografice fiind de asemenea diferit.

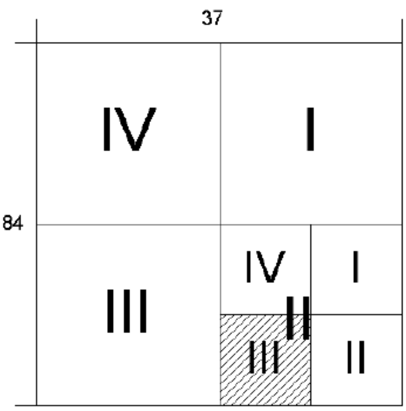


Fig.7