Capitolul 1
Noţiuni generale de cartografie matematică

1.1 Introducere

Cartografia matematică este o ramură a cartografiei care studiază baza matematică a hărţilor.

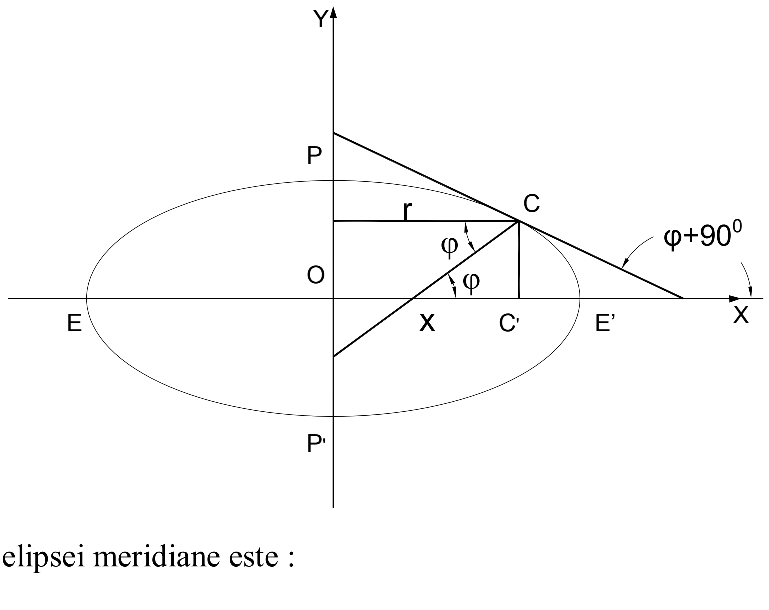
Reprezentarea în plan a unei porţiuni din suprafaţa terestră se efectuează prin alegerea unui sistem de proiecţie adecvat scopului şi destinaţiei hărţii sau planului topografic ce urmează a se întocmi.

Proiectarea unei hărţi necesită cunoaşterea unor elemente specifice proiecţiilor şi anume:

- *planul de proiecţie* – reprezintă suprafaţa pe care se face proiectarea unei porţiuni de teren pe elipsoidul de referinţă. Aceste planuri sunt suprafeţe plane tangente sau secante la suprafaţa de reprezentat sau sunt suprafeţe desfăşurabile, în cazul cilindrului şi conului;
- *punctul central al proiecţiei* – este punctul care se află în centrul suprafeţei de reprezentat. Acest punct poate să fie materializat pe teren şi determinat prin măsurători geodezice sau poate să fie fictiv;
- *reţeaua geografică* – este constituită dintr-un ansamblu de paralele şi meridiane;
- *reţeaua cartografică* – este reţeaua formată din linii curbe sau drepte, rezultate din proiecţia în plan a meridianelor şi paralelelor. Cu ajutorul acestei reţele se pot efectua diferite măsurători pe hartă, se pot determina coordonatele geografice ale unor puncte geodezice;
- *reţeaua (kilometrică) rectangulară* – este formată din linii drepte şi paralele cu sistemul de axe rectangulare din proiecţia aleasă.

1.2 Parametrii de bază ai elipsoidului de rotaţie

Elipsoidul pământesc a fost considerat ca un elipsoid de rotaţie a cărei suprafaţă rezultă prin rotaţia unei elipse în jurul axei mici a acesteia.



Ecuaţia elipsei meridiane este :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$$

unde : - a este semiaxa mare a elipsoidului (ecuatorială)
- b este semiaxa mică a elipsoidului (polară)

Alţi parametrii care definesc elipsa meridiană sunt:

$\alpha=\frac{a-b}{a}$ - turtirea elipsoidului

$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$ - prima excentricitate a elipsei meridiane

$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}-1$ - a doua excentricitate a elipsei meridiane

Pentru determinarea elipsei meridiane este necesar să se cunoască doar doi dintre cei cinci parametrii, iar unul dintre ei trebuie să fie liniar.

1.3 Coordonatele hărţilor

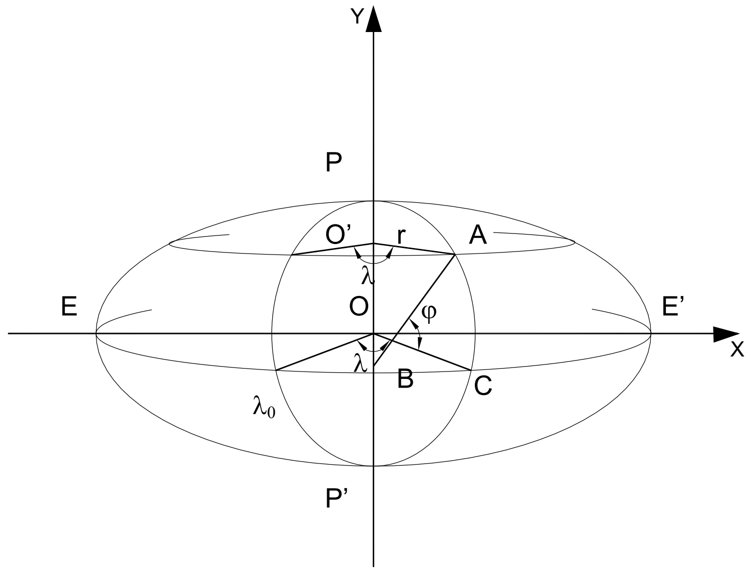
Pe hărţile topografice găsim două sisteme de coordonate, un sistem rectangular şi un sistem de coordonate geografice.

Coordonatele geografice sunt latitudinea şi longitudinea.

Latitudinea (φ) este unghiul format de normala dusă în punctul dat, cu planul ecuatorului şi se măsoară de la ecuator spre nord având valori pozitive sau spre sud având valori negative. La ecuator avem $\varphi = 0^0$, iar la poli $\varphi = \pm 90^0$.

Longitudinea (λ) este unghiul diedru format de planul ce trece prin meridianul punctului dat. Pe plan internaţional se consideră ca meridian origine, meridianul Greenwich. Longitudinea se măsoară de la meridianul origine spre est având valori pozitive sau spre vest având valori negative.

Latitudinea şi longitudinea determină poziţia unui punct pe suprafaţa elipsoidului sau sferei.

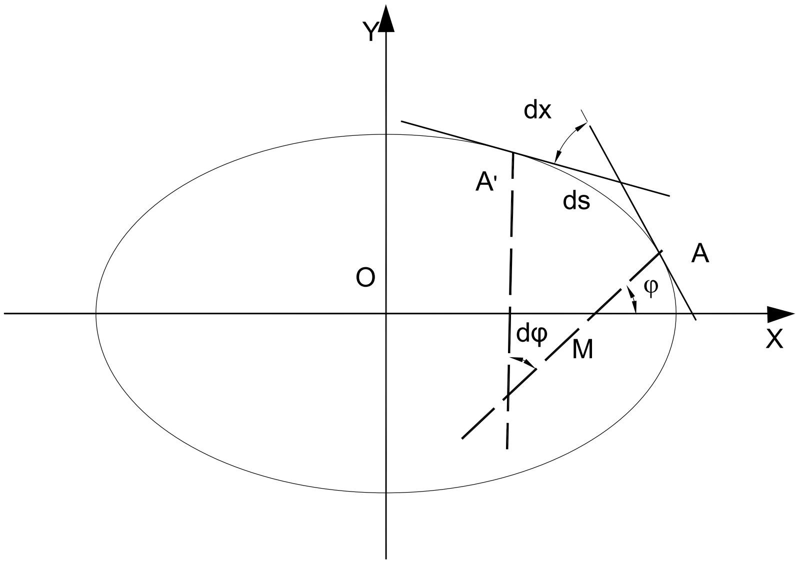


Coordonatele rectangulare sunt valori ce stabilesc poziţiile pe hartă ale unor detalii din teren. Aceste coordonate se notează cu X şi Z şi reprezintă depărtarea punctului dat faţă de un sistem de axe.

1.4 Razele de curbură principale

Prin orice punct de pe elipsoid se pot duce mai multe plane secante. Toate se numesc secţiuni normale. În cartografie se folosesc razele de curbură ale secţiunilor normale.

Fie M raza de curbură a elipsei meridiane într-un punct A de latitudine φ .



În funcţie de elementele elipsoidului şi de latitudinea punctului A considerat, raza de curbură M se calculează cu formula:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$$

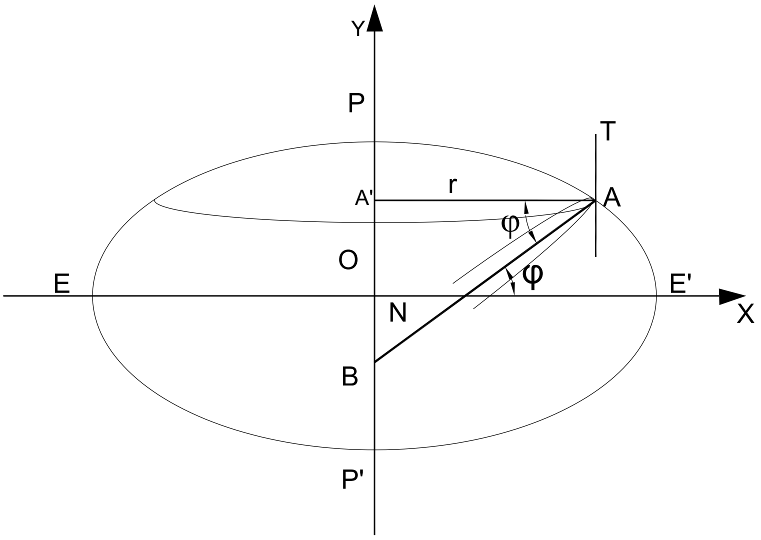
unde $w = \sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}$

Se consideră normala AB la elipsoid în punctul A. Fie paralelul ce trece prin punctul A, care are împreună cu secţiunea primului vertical o tangentă comună pe care o notăm cu T. Raza de curbură a paralelului ce trece prin punctul A este dată de relaţia :

$$r = N\cos\varphi,$$

unde N este raza de curbură a primului vertical în punctual A,

φ este latitudinea punctului A.



Dar $r = x = \dfrac{a\cos\varphi}{w} \Rightarrow N = \dfrac{a}{w}$

Facem raportul $\dfrac{N}{M}$ şi obţinem :

$$\frac{N}{M} = \frac{a}{w}\cdot\frac{w^3}{a(1-e^2)} = \frac{w^2}{1-e^2} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2} = \frac{1-e^2+e^2\cos^2\varphi}{1-e^2} = 1+\frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}$$

Deci $N \geq M$

La poli unde $\varphi = \pm 90^0$ avem $N = M = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}$, iar la ecuator unde $\varphi = 0^0$ rezultă $M = a(1-e^2)$ şi $N = a$.

Raza medie de curbură Gauss se notează cu R şi se determină cu relaţia :

$$R = \sqrt{M\cdot N}$$

1.5 Determinarea razelor de curbură. Calculul lungimilor arcelor de meridian şi paralel.

Pentru aceste aplicaţii se vor folosi tabelele elipsoidului Krasovski (tabelele Hristov).

1. Se scot din aceste tabele valorile razelor de curbură M şi N pentru următoarele latitudini:

Nr. Crt.	φ	M(m)	N(m)
1	$44^0 00'$	6366372.033	6388570.606
2	$44^0 01'$	6366390.675	6388576.842
3	$45^0 00'$	6367491.185	6388944.935
4	$45^0 01'$	6367509.844	6388951.176
5	$46^0 00'$	6368610.665	6389319.331
6	$46^0 01'$	6368629.318	6389325.569
7	$47^0 00'$	6369729.109	6389693.336
8	$47^0 01'$	6369747.734	6389699.564

9	$48^0 00'$	6370845.153	6390066.495
10	$48^0 01'$	6370863.725	6390072.704

Să se determine valorile razelor de curbură R (raza medie de curbură Gauss) şi r (raza unui paralel) pe elipsoid..

Soluţie:

Raza medie de curbură R poate fi determinată cu relaţia :

$$R = \sqrt{M \cdot N}$$

iar r se determină în funcţie de latitudinea φ şi de N (marea normală): $r = N \cos \varphi$

Nr. Crt.	**φ**	**M(m)**	**N(m)**	**R(m)**	**cosφ**	**r(m)**
1	$44^0 00'$	6366372.033	6388570.606	6377461.661	0.7193398	4595553.104
2	$44^0 01'$	6366390.675	6388576.842	6377474.111	0.719219	4594782.964
3	$45^0 00'$	6367491.185	6388944.935	6378209.040	0.707107	4517666.288
4	$45^0 01'$	6367509.844	6388951.176	6378221.500	0.706983	4516882.150
5	$46^0 00'$	6368610.665	6389319.331	6378956.594	0.694658	4438394.155
6	$46^0 01'$	6368629.318	6389325.569	6378969.050	0.6945328	4437596.250
7	$47^0 00'$	6369729.109	6389693.336	6379703.413	0.681998	4357760.376
8	$47^0 01'$	6369747.734	6389699.564	6379715.849	0.681871	4356948.942
9	$48^0 00'$	6370845.153	6390066.495	6380448.585	0.669131	4275789.068
10	$48^0 01'$	6370863.725	6390072.704	6380460.986	0.669001	4274964.345

Valoarea razei de curbură Gauss poate fi scoasă din tabelele Hristov.

2. Să se calculeze lungimile arcelor de meridian pentru următoarele latitudini:

Nr. Crt.	**φ**	**S_m (m)**	**S_m (1^0) (m)**	**S_m(1') (m)**	**S_m(1") (m)**
1	$45^0 00'$	4985032.290	111143.457	1852.231	30.865
2	$45^0 01'$	4986884.521			
3	$46^0 00'$	5096175.747		1852.556	30.875
4	$46^0 01'$	5098028.303	111162.987		
5	$47^0 00'$	5207338.734		1852.882	30.881
6	$47^0 01'$	5209191.616	11182.489		
7	$48^0 00'$	5318521.223		1853.207	30.886
8	$48^0 01'$	5320374.430			

unde notăm cu:

S_m – lungimea arcului de meridian pe elipsoidul Krasovki de la Ecuator până la latitudinea respectivă;
S_m (1^0) – lungimea arcului de meridian de 1^0;
S_m(1') – lungimea arcului de meridian de 1';
S_m(1") – lungimea arcului de meridian de 1".

Pentru calculul arcului de meridian de lungime finită folosim relaţia:

$$S_m(\varphi_1, \varphi_2) = S_m(0, \varphi_2) - S_m(0, \varphi_1),$$

unde :

$S_m(\varphi_1, \varphi_2)$ - lungimea arcului de meridian între latitudinile φ_1 şi φ_2 ;

$S_m(0, \varphi_2)$ - lungimea arcului de meridian de la Ecuator la latitudinea φ_2 ;

$S_m(0, \varphi_1)$ - lungimea arcului de meridian de la Ecuator la latitudinea φ_1 ;

Lungimea arcului de meridian de 1" se calculează cu regula de 3 simplă:

$$60'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1851.905 m$$

$$1'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X$$

$$X = \frac{1851.905 \cdot 1''}{60''} = 30.8650833 m$$

3. Să se determine lungimile arcelor de paralel pentru următoarele valori ale latitudinii φ:

Nr. Crt.	**φ**	**r(m)**	**S_p (1^0) (m)**	**S_p(1')(m)**	**S_p(1")(m)**
1	$44^0$00'	4595553.104	80207.532	1336.792	22.279
2	$44^0$01'	4594782.964	80185.076	1336.417	22.273
3	$45^0$00'	4517666.288	78848.131	1314.135	21.902
4	$45^0$01'	4516882.150	78825.288	1313.754	21.895
5	$46^0$00'	4438394.155	77464.594	1291.076	21.517
6	$46^0$01'	4437596.250	77441.329	1290.688	21.511
7	$47^0$00'	4357760.376	76057.266	1267.621	21.127
8	$47^0$01'	4356948.942	76033.612	1267.226	21.120

unde notăm cu:
S_p (1^0) – lungimea arcului de paralel de 1^0;
S_p(1') – lungimea arcului de paralel de 1';
S_p(1") – lungimea arcului de paralel de 1".
Pentru o valoare finită calculul arcului de paralel se face cu relaţiile:

$$S_p(\lambda_1,\lambda_2)^{rad} = r(\lambda_2-\lambda_1)^{rad}$$

$$S_p(\lambda_1,\lambda_2)^0 = \frac{r(\lambda_2-\lambda_1)^0}{\rho^0}$$

$$\rho^0 = 57^0.29578$$

$$S_p(\lambda_1,\lambda_2)' = \frac{r(\lambda_2-\lambda_1)'}{\rho'}$$

$$\rho' = 3437'.7468$$

$$S_p(\lambda_1,\lambda_2)" = \frac{r(\lambda_2-\lambda_1)"}{\rho"}$$

$$\rho" = 206264".806$$

4. Pentru această aplicaţie se va folosi elipsoidul WGS-84.

Se cer:

a) Determinarea valorilor numerice ale razelor de curbură M(raza de curbură a elipsei meridianului), N (marea normală), R(raza de medie curbură – raza sferei Gauss), r (raza paralelului) ale elipsoidului în zona ţării noastre pentru latitudinile:

b) Calculul lungimilor arcurilor de meridiane de 1^O, 1', 1" la latitudinile de mai sus.

c) Calculul lungimilor arcurilor de paralel de 1^O, 1', 1" la aceleaşi latitudini.

Soluţie:

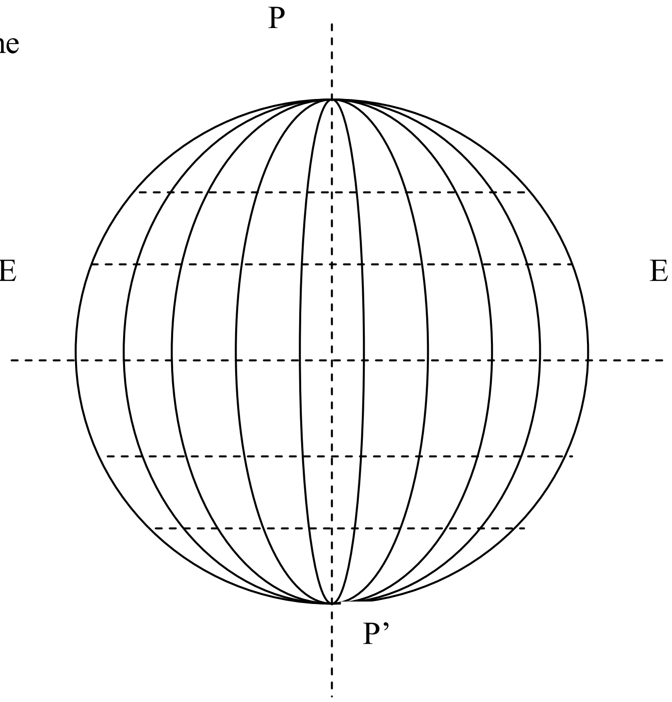
a) Determinarea valorilor numerice ale razelor de curbură M, N, R, r ale elipsoidului în zona ţării noastre pentru latitudinile : φ = 46^O00'; φ = 46^O01'; φ = 47^O00'; φ = 47^O01'; φ = 48^O00'; φ = 48^O01'.

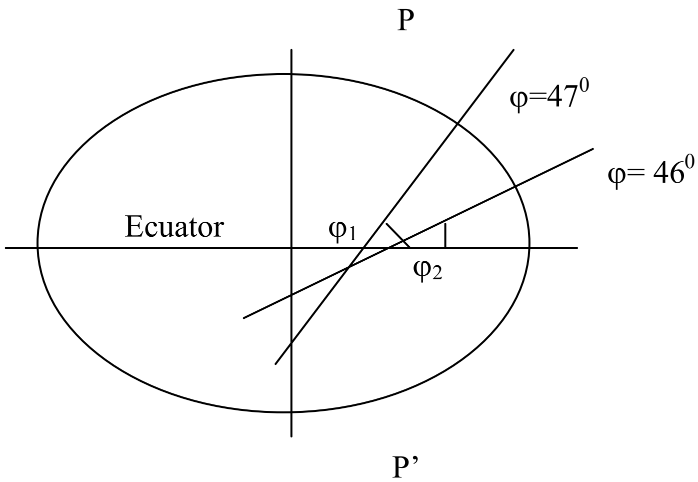
φ	**M [m]**	**N [m]**	**R[m]**	**r = N cos φ**
46.00'	6368501.438	6389212.733	6378848.680	4438320.106
46.01'	6368520.093	6389218.972	6378861.137	4436987.324
47.00'	6369620.023	6389586.786	6379595.593	4357687.710
47.01'	6369638.650	6389593.014	6379608.030	4356332.437
48.00'	6370736.207	6389959.992	6380340.859	4275717.804
48.01'	6370754.782	6389966.202	6380353.261	4274340.446

b) Calculul lungimilor arcurilor de meridiane de 1^{O}, $1^{'}$, $1^{''}$ la latitudinile de mai sus.

<table>
<tr><th>φ</th><th>$(s_m)_{0,\varphi}$</th><th>$s_m(1^0)$</th><th>$s_m(1^I)$</th><th>$s_m(1^{II})$</th></tr>
<tr><td>46,00</td><td>5096085,926</td><td rowspan="3">111161,083</td><td rowspan="2">1852,525</td><td rowspan="2">30,875</td></tr>
<tr><td>46,01</td><td>5097938,451</td></tr>
<tr><td>47,00</td><td>5207247,009</td><td rowspan="2">1852,850</td><td rowspan="2">30,881</td></tr>
<tr><td>47,01</td><td>5209099,859</td><td rowspan="3">111180,586</td></tr>
<tr><td>48,00</td><td>5318427,595</td><td rowspan="2">1853,175</td><td rowspan="2">30,886</td></tr>
<tr><td>48,01</td><td>5320280,770</td></tr>
</table>

λ = constantă → meridiane
φ = constantă → paralele
PP' – axa polilor
EE' - ecuatorul





Elipsă meridian

c) Calculul lungimilor arcurilor de paralel de 1^{O}, $1^{'}$, $1^{''}$ la aceleaşi latitudini.

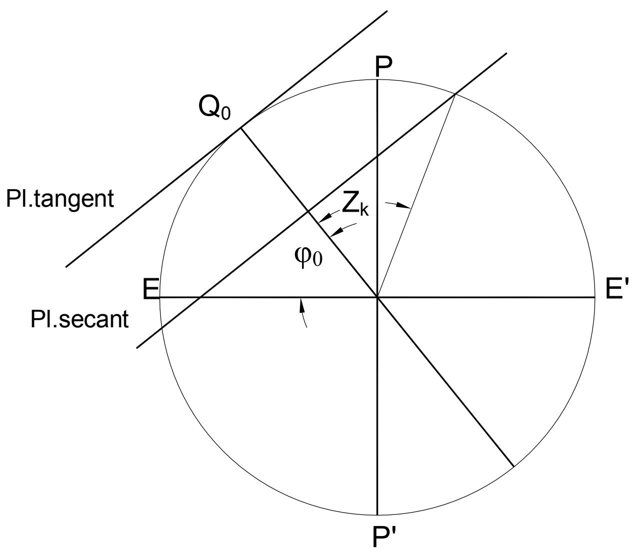
φ	$s_p(1^0)$	$s_p(1^{'})$	$s_p(1^{''})$
46.00	77463.2991000	1291.0549850	21.51758308
46.01	77440.0376700	1290.6672945	21.51112158
47.00	76055.9983020	1267.5999717	21.1266662
47.01	76032.3443340	1267.2057389	21.12009565
48.00	74625.3535620	1243.7558927	20.72926488
48.01	74601.3141360	1243.3552356	20.72258726

Capitolul 2
Proiecţii azimutale

2.1 Aspecte generale

Proiecţiile azimutale se mai numesc şi proiecţii zenitale.

Reţeaua normală se reprezintă prin cercuri concentrice şi drepte concurente în centrul cercurilor (imaginea polului Q_0).



De regulă polul se alege în zona centrală a teritoriului de reprezentat, se defineşte prin coordonatele sale geografice, iar imaginea sa în planul de proiecţie se va lua drept origine a sistemelor de coordonate plane, atât polare cât şi rectangulare.

Dacă planul este tangent la sferă, atunci punctul de tangenţă este chiar polul proiecţiei.

Dacă se adoptă un plan secant, acesta este paralel cu planul tangent , iar poziţia sa faţă de polul proiecţiei, se precizează prin intermediul distanţei zenitale a cercului de secţionare sau a latitudinii, dacă polul proiecţiei coincide cu cel geografic.

În planul de proiecţie meridianele se reprezintă ca drepte concurente într-un punct, iar paralelele se reprezintă prin cercuri concentrice cu cercul în punctul de intersecţie a imaginilor meridianelor.

Coordonatele plane polare sunt:

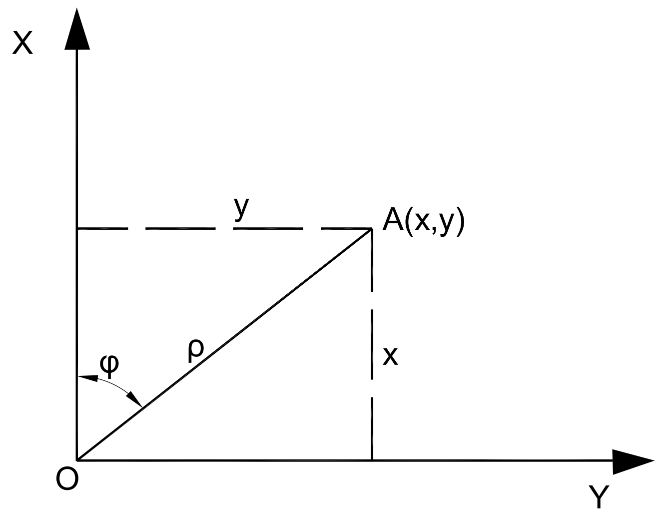
$\delta = \lambda$ - unghiul polar

unde λ trebuie considerat ca o diferenţă de longitudine măsurată de la meridianul luat ca axă polară

$\rho = f(\varphi)$ – raza vectoare

Coordonatele rectangulare se pot calcula funcţie de coordonatele polare:

$$x = \rho \cdot \cos\delta$$
$$y = \rho \cdot \sin\delta$$



2.2 Proiecţia stereografică 1970

În anul 1970 a fost adoptată în România proiecţia stereografică 1970 şi sistemul de cote raportat la Marea Neagră, pentru executarea lucrărilor geodezice, topografice, fotogrametrice şi cartografice.

<u>Caracteristici generale</u>

1. Elipsoidul de referinţă utilizat , este elipsoidul Krasovski 1940, orientat în punctul astronomic fundamental – observatorul astronomic din Pulkovo.

semiaxa mare a = 6378245.000 m

turtirea geometrică f = 1/ 298.3

2. Polul proiecţiei Q_0 are coordonatele geografice:

latitudinea $B_0 = 46^0$ N

longitudinea $L_0 = 25^0$ E Greenwich

3. Întrega ţară se reprezintă pe un singur plan de proiecţie, secant , în care există un cerc de deformaţie nulă, cu centrul în polul Q_0 şi de rază ρ_0 = 201.718 km. În centrul acestui cerc deformaţia liniară are valoarea de -25cm/km.

4. Sistemul de axe de coordonate rectangulare xOy are ca origine imaginea plană a polului proiecţiei, axa Ox fiind imaginea plană a meridianului de 25^0 şi are sensul pozitiv spre nord, iar axa Oz are sensul pozitiv spre est.

5. Pentru transformarea coordonatelor din planul tangent în planul secant paralel cu acesta, se foloseşte coeficientul :

$$c = 1 - \frac{1}{4000} = 0.999750000$$

Pentru transformarea inversă, din planul secant în planul tangent , înmulţim cu coeficientul $c' = \frac{1}{c} = 1.000250063$.

Proiecţia stereografică este o proiecţie conformă ce permite ca măsurătorile geodezice să fie prelucrate direct în planul de proiecţie, fără a se calcula coordonatele geografice, cu condiţia aplicării în prealabil a unor corecţii de reducere a măsurătorilor la planul de proiecţie.

Această proiecţie deformează distanţele şi ariile, în fincţie de depărtarea acestora faţă de polul proiecţiei.

<u>Condiţii de bază puse reprezentării în proiecţia stereografică 1970</u>

- reprezentarea plană să fie conformă (să nu deformeze unghiurile);

- meridianul λ_0 , trece prin polul Q_0 , să se reprezinte printr-un segment de dreaptă, fiind axă de simetrie şi axa XX', avînd sensul pozitiv spre nord ;
- originea sistemului de coordonate plane stereografice este imaginea polului Q_0 şi orice punct de coordonate (φ,λ), situat pe meridianul axial λ_0 are coordonata x_m dată de relaţia :

$$x_m = 2R_0 tg\frac{\beta}{2R_0},$$

unde

- β este lungimea arcului de meridian, cuprinsă între paralelele de latitudine φ_0, φ;
- R_0 este raza medie de curbură a elipsoidului la latitudinea φ_0.

2.2.1 Calculul coordonatelor stereografice 1970 funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid

Calculul coordonatelor rectangulare plane stereografice 1970, funcţie de cele geografice (φ,λ) de pe elipsoidul Krasovski 1970, se face cu ajutorul unor formule cu coeficienţi constanţi, în funcţie de diferenţele de latitudine şi respectiv longitudine, dintre polul proiecţiei şi punctele de reprezentat.

În acest calcul întâlnim două etape :

- calculul coorodnatelor stereografice în planul tangent, funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid;
- transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent în planul secant, prin modoficarea scării cu ajutorul coeficientului c.

Formulele de calcul au fost stabilite după o metodă propusă de academicianul bulgar Vladimir Hristov. Această metodă constă în a dezvolta în serie Tazlor, în jurul punctului central, toate mărimile care depind de latitudine. Derivatele respective, calculate în punctul central, sunt nişte constante ce se grupează sub formă de coeficienţi constanţi pentru întreg teritoriul României.

$$x_{tg} = (a_{00} + a_{10}f + a_{20}f^2 + a_{30}f^3 + a_{40}f^4 + a_{50}f^5 + a_{60}f^6) + (a_{02} + a_{12}f +$$
$$+ a_{22}f^2 + a_{32}f^3 + a_{42}f^4)\cdot l^2 + (a_{04} + a_{14}f)\cdot l^4 + a_{06}l^6$$

$$y_{tg} = (b_{01} + b_{11}f + b_{21}f^2 + b_{31}f^3 + b_{41}f^4 + b_{51}f^5)\cdot l + (b_{03} + b_{13}f + b_{23}f^2 +$$
$$+ b_{33}f^3)\cdot l^3 + (b_{05} + b_{15}f)\cdot l^5$$

unde $f = 10^{-4}\cdot\Delta\varphi''$ iar $l = 10^{-4}\cdot\Delta\lambda''$.

Dacă notăm parantezele cu S_0, S_2, S_4, S_6 şi S_1, S_3, S_5 obţinem relaţiile :

$$x_{tg} = S_0 + S_2\cdot l^2 + S_4\cdot l^4 + S_6\cdot l^6 = r_0 + r_2 + r_4 + r_6$$

$$y_{tg} = S_1\cdot l + S_3\cdot l^3 + S_5\cdot l^5 = r_1 + r_3 + r_5$$

Coordonatele definitive din planul secant se determină cu formulele :

$$x_{\sec} = x_{tg}\cdot c$$

$$y_{\sec} = y_{tg}\cdot c$$

Coordonatele stereografice false au valorile:

$$x' = x_{\sec} + 500.000$$

$$y' = y_{\sec} + 500.000$$

2.2.2 Transformarea coordonatelor rectangulare plane stereografice (x, y) în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul de rotaţie

Această transformare se face în două etape şi anume:

- transformarea coordonatelor stereografice din planul secant în planul tangent, paralel cu cel secant, înmulţind cu coeficientul $c' = \frac{1}{c} = 1.000250063$;
- transformarea coordonatelor stereografice din planul tangent, în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul de rotaţie.

Şi această transformare foloseşte formulele cu coeficienţi constanţi.

$$\Delta\varphi'' = (A_{00} + A_{10}X + A_{20}X^2 + A_{30}X^3 + A_{40}X^4 + A_{50}X^5 + A_{60}X^6) + (A_{02} + A_{12}X +$$
$$+ A_{22}X^2 + A_{32}X^3 + A_{42}X^4) \cdot Y^2 + (A_{04} + A_{14}X) \cdot Y^4 + A_{06}Y^6$$
$$l'' = (B_{01} + B_{11}X + B_{21}X^2 + B_{31}X^3 + B_{41}X^4 + B_{51}X^5) \cdot Y + (B_{03} + B_{13}X + B_{23}X^2 +$$
$$+ B_{33}X^3) \cdot Y^3 + (B_{05} + B_{15}X) \cdot Y^5$$

unde

$x = 10^{-5} \cdot x_{tg}$ iar $y = 10^{-5} \cdot y_{tg}$

Dacă notăm parantezele cu S_0, S_2, S_4, S_6 şi S_1, S_3, S_5 obţinem relaţiile :

$$\Delta\varphi'' = s_0 + s_2 \cdot Y^2 + s_4 \cdot Y^4 + s_6 \cdot Y^6 = R_0 + R_2 + R_4 + R_6$$
$$l'' = s_1 \cdot Y + s_3 \cdot Y^3 + s_5 \cdot Y^5 = R_1 + R_3 + R_5$$

Valorile coordonatelor geografice se obţin în secunde sexagesimale.

Aplicaţie :

Se dau coordonatele geografice ale punctului A:

φ = 44°55'04" ,7

λ = 23°27'04" ,7

pe elipsoidul Krasovski 1940.

Se cere :

1. să se calculeze coordonatele plane stereografice (x,y) în funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid prin procedeul cu coeficienţi constanţi;
2. să se transforme coordonatele plane stereografice (x,y) în coordonate geografice pe elipsoidul Krasovski prin procedeul cu coeficienţi constanţi.

Soluţie:

1. Calculul coordonatelor stereografice 1970 (x,y), funcţie de coordonatele geografice (φ,λ)

Regulă de calcul:

➢ *calculul lui X:*

- elementele din coloana 1 se înmulţesc cu elementele corespunzătoare din coloana 2;
- prin însumarea produselor astfel obţinute, rezultă S_0, care înmulţit cu l^0 ne dă valoarea lui r_0;
- în mod asemănător se procedează pentru a calcula r_2, r_4, r_6 folosind coloanele 1 şi 3, 1 şi 4 respectiv 1 şi 5 ;
- adunând rezultatele din coloana 7 se obţine valoarea lui X_{tg} din planul tangent al proiecţiei stereografice.
- valoarea lui X în planul secant al proiecţiei stereografice se calculează prin înmulţire cu coeficientul c = 0,99975000.

➢ *pentru calculul lui Y* se procedează în mod asemănător cu regula prezentată la calculul lui X.

$\varphi = \underline{44^o55'04'',7}$ **Punctul: A** $\lambda = \underline{23^o27'04'',7}$

$\varphi_0 = \underline{46^0}$ $\lambda_0 = \underline{25^0}$

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o = 1^0 04'55,3''$ **Trapezul: <u>1:25.000</u>** $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 1^o 32'55,3''$

$f'' = \Delta\varphi'' x10^{-4} = 0,38953$ c=0,999750000 $l'' = \Delta\lambda'' x10^{-4} = -0,55753$

Calculul lui x

1		2	3	4	5		6		r
$f^0=1$		0	+ 3 752,145 7111	+ 0,335 9127	- 0,000 0575		l^0 = 1		r_0 = 120285.8701
f^1=0.38953		+ 308 758,9579813	- 99,928 0966	- 0,062 2287	0		l^2 = 0.310839701	=	r_2 =1153.90027
f^2=0.151733621	*	+ 75,358 4967	- 6,674 8691	+ 0,000 2261	0	*	l^4 = 0.09662132		r_4 =0.030115353
f^3=0.059104797		+ 60,216 2733	- 0,071 3046	0	0		l^6 = 0.030033742		r_6 = -0.0000017269
f^4=0.023023092		- 0,014 8571	- 0,002 5911	0	0				
f^5=0.008968185		+ 0,014 2609	0	0	0				
f^6=0.003493377		- 0,021 5834	0	0	0				

S_0=120285.8701 S_2=3712.203643 S_4=0.311684352 S_6 =-0.0000575

x[tg]= 121439.8005 $X_{[s]}$= x[tg]•c= 121409.4405 X[translatat]= $X_{[s]}$ + 500.000 = 621409.4405

Calculul lui y

1		2	3	4	5		6		r
$f^0=1$		215179,420838	-23,213867	-0,008646	0,000000		l=0.55753		r_0 = 117619.5266
f^1=0.38953		-10767,838629	-1,928102	0,000497	0,000000		l^3=0.173302458	=	r_2 =-4.149694614
f^2=0.151733621	*	-128,660029	0,131610	0,000000	0,000000	*	l^5=0.053869284		r_4 =-0.0004553
f^3=0.059104797		-2,106091	0,002371	0,000000	0,000000				
f^4=0.023023092		-0,049532	0,000000	0,000000	0,000000				
f^5=0.008968185		+0,000426	0,000000	0,000000	0,000000				

S_1=210965.377; S_3=-23.944811; S_5=-0.008451943;

y[tg]= 117615.3765 $y_{[s]}$= y[tg]•c= 117585.9726 y[translatat]= $y_{[s]}$ + 500.000 = 617585.9726

2. Transformarea coordonatelor rectangulare plane stereografice (x, y) în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul Krasovski

Vom calcula , mai întâi diferenţa de coordonate Δφ şi l faţă de centrul proiecţiei (φ_0, λ_0), apoi se vor determina coordonatele geografice (φ, λ) .

Regula de calcul este asemănătoare cu cea prezentată la punctul 1 al aplicaţiei.
Pentru această aplicaţie se cunosc coordonatele plane stereografice , translatate .

x[translatat]= 621409.4405	**Punctul: A**	y[translatat]= 617585.9726
$x_{[s]}$= 121409.4405		$y_{[s]}$= 117585.9726
x[tg]=x•c'= 121439.8005		y[tg]=x•c'= 117585.9726
	c'=1,000250063	
X=x[tg] • 10^{-5}= 1.214398005		Y=y[tg] • 10^{-5}= 1,175859726

Calculul lui φ

1
$X^0=1$
$X = 1.214398005$
$X^2=1.474762514$
$X^3=1.790948655$
$X^4=2.174924473$
$X^5=2.641223941$

*

2	3	4	5
0	-26.24573	0.003312	0.0000002
3238.772428	-0.620206	0.000173	0
-0.256028	-0.009981	0.000006	0
-0.066217	-0.000189	0	0
0.000032	-0.000004	0	0
0.000004	0	0	0

*

6
$Y^0=1$
$Y^2=1.383337679$
$Y^4=1.913623133$
$Y^6=2.647186982$

=

r
$R_0=3932.662683$
$R_2=-37.3694477$
$R_4=0.006756887$
$R_6=0.0000005294$

$s_0=3932.662683$ $s_2= -27.01397372$ $s_4=0.003530939$ $s_6=0.0000002$

$$\Delta\varphi''=2830{,}0000$$

$$\Delta\varphi^{0\,''\,'}= 1^0 04'55{,}3''$$

$$\varphi = \Delta\varphi^{0\,''\,'} + \varphi_0 = 1^0 04'55{,}3'' + 46^0 = 44^o 55'04''{,}7$$

Calculul lui λ

1
$X^0=1$
$X = 1.214398005$
$X^2=1.474762514$
$X^3=1.790948655$
$X^4=2.174924473$
$X^5=2.641223941$

*

2	3	4	5
4647.284560	-0.502080	0.000113	0
75.319510	-0.028999	0.000011	0
1.506241	-0.001124	0.000000	0
0.028999	-0.000035	0.000000	0
0.000562	0.000000	0.000000	0
0.000011	0.000000	0.000000	0

*

6
$Y^0=1.176153765$
$Y^3=1.627017819$
$Y^5=2.250715052$

=

r
$R_1=5576.176705$
$R_3=-0.876989684$
$R_5=0.000284397$

$s_1= 4741.026958$; $s_3= -0.539016644$; $s_5= 0.000126358$

$$l''= 5575.3$$

$$l^{0\,''\,'}= 1^o 32'55{,}3''$$

$$\lambda = l^{0\,''\,'} + \lambda_0 = 1^o 32'55{,}3'' + 25^0 = 23^o 27'04''{,}7$$

Temă:
Se dau coordonatele geografice ale punctului P:
$\varphi = 45^o45'15''$
$\lambda = 24^o45'15''$
pe elipsoidul Krasovski 1940.

Se cere :
1. să se calculeze coordonatele plane stereografice (x,y) în funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid prin procedeul cu coeficienţi constanţi;
2. să se transforme coordonatele plane stereografice (x,y) în coordonate geografice pe elipsoidul Krasovski prin procedeul cu coeficienţi constanţi.

2.2.3 Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie stereografic 1970

Reducerea direcţiilor la planul de proiecşie se mai numeşte şi *reducerea direcţiilor la coardă* şi constă în a calcula şi aplica direcţiilor măsurate câte o corecţie.

În principiu, fiecare direcţie redusă la elipsoid, măsourată din staţia S_i către punctele P_i din reţeaua geodezică, va primi o corecţie δ_{ij} , a cărei valoare depinde atât de lungimea vizei de orientare cît şi de depărtarea ei faţă de originea sistemului de axe.

Formula de calcul a corecţiei de reducere a direcţiilor măsurate la planul de proiecţie este :

$$\delta_{ij}^{cc} = -\delta_{ji}^{cc} = \frac{\rho^{cc}}{4R_0^2}(x_i y_j - x_j y_i),$$

unde:

(x_i, y_i) şi (x_j, y_j)- sunt coordonatele plane stereografice ale punctelor ce determină direcţiile;

R_0- este raza medie de curbură la latitudinea φ_0 a punctului central al proiecţiei şi are valoarea $R_0 = 6378956{,}594m$

ρ^{cc}- reprezintă numărul de secunde centesimale (sexagesimale) dintr-un arc de 1 radian.

$\rho^{cc} = 636.620^{cc}$ sau $\rho'' = 206.265''$

Înlocuind constantele cu valorile lor rezultă următoarele formule de calcul:

- pentru grade centesimale : $\delta_{ij}^{cc} = -\delta_{ji}^{cc} = 39.113 \cdot 10^{-10} \cdot (x_i y_j - x_j y_i)$;
- pentru grade sexagesimale : $\delta_{ij}'' = -\delta_{ji}'' = 12.673 \cdot 10^{-10} \cdot (x_i y_j - x_j y_i)$.

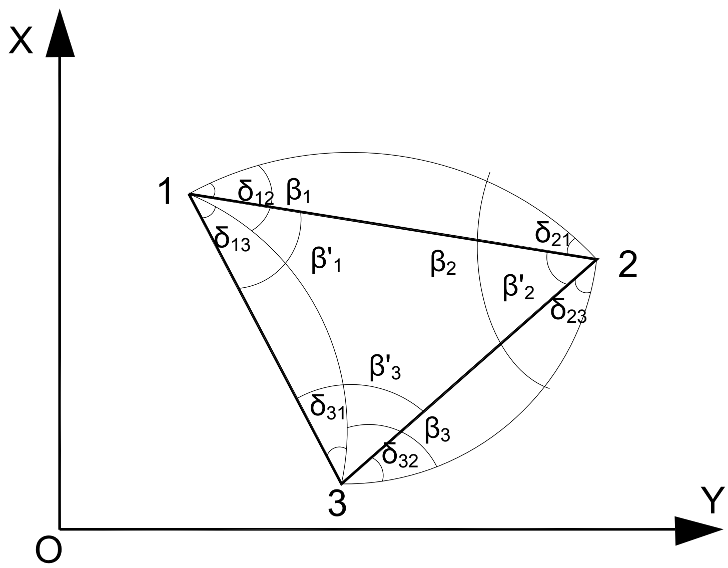
Semnul corecţiei va rezulta din calcule.

Direcţia redusă la planul de proiecţie va fi egală cu direcţia măsurată plus corecţia. Dacă $\delta_{ij} = 0$ rezultă că punctul de staţie S_i, punctul vizat P_i şi originea axelor sunt coliniare.

Pentru a evita orice greşeală se trece la verificarea corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie, pe triunghiuri.

Verificarea corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie

Fie triunghiul sferic 1-2-3.



Notăm cu β1, β2 , β3 unghiurile dintre imaginile plane ale liniilor geodezice (unghiuri nereduse la planul de proiecţie), iar cu β'1, β'2 , β'3 unghiurile reduse la planul de proiecţie.

$$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' = 180^0$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^0 + \varepsilon$$

unde ε este excesul sferic.

Notăm cu α_m direcţiile măsurate, iar cu α_r direcţiile reduse.

$$(\alpha_r)_{ij} = (\alpha_m)_{ij} + \delta_{ij},\ \ i,j = \overline{1,3}$$

Dacă i=1, j = 2 avem $(\alpha_r)_{12} = (\alpha_m)_{12} + \delta_{12}$.

Dacă i=1, j = 3 avem $(\alpha_r)_{13} = (\alpha_m)_{13} + \delta_{13}$.

$$(\alpha_r)_{13} - (\alpha_r)_{12} = (\alpha_m)_{13} + \delta_{13} - (\alpha_m)_{12} - \delta_{12}$$

Deci $\beta_1' = \beta_1 + \delta_{13} - \delta_{12}$

Aplicăm acest procedeu pentru toate vârfurile triunghiului şi obţinem:

$$\beta_2' = \beta_2 + \delta_{21} - \delta_{23}$$

$$\beta_3' = \beta_3 + \delta_{32} - \delta_{31}$$

Însumăm aceste relaţii şi avem :

$$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' = \beta_1 + \delta_{13} - \delta_{12} + \beta_2 + \delta_{21} - \delta_{23} + \beta_3 + \delta_{32} - \delta_{31}$$

$$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + (\delta_{13} - \delta_{12}) + (\delta_{32} - \delta_{31}) + (\delta_{21} - \delta_{23})$$

$$180^0 = 180^0 + \varepsilon + (\delta_{13} - \delta_{12}) + (\delta_{32} - \delta_{31}) + (\delta_{21} - \delta_{23})$$

Deci $-\varepsilon = (\delta_{13} - \delta_{12}) + (\delta_{32} - \delta_{31}) + (\delta_{21} - \delta_{23})$

Am obţinut astfel relaţia de verificare pentru triunghiul 1-2-3. Putem formula acum regula de verificare:

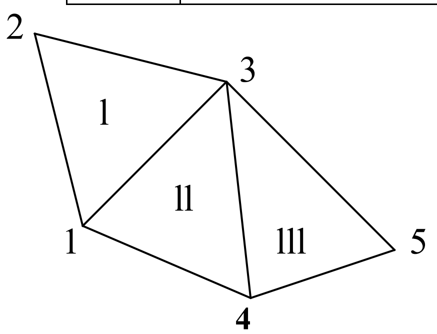
“În orice triunghi dintr-o reţea geodezică, suma corecţiilor de reducere la planul de proiecţie ale celor trei unghiuri ale triunghiului, trebuie să fie egală cu excesul sferic ε al triunghiului respectiv, luat cu semn schimbat”.

Formula generală a excesului sferic este $\varepsilon = \rho^{cc} \cdot \dfrac{S}{R^2}$, unde S este suprafaţa triunghiului, iar R este raza sferei pe care se consideră triunghiul.

Aplicaţie :

Se dă inventarul cu coordonatele provizorii pentru punctele geodezice din schita urmatoare:

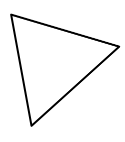
Nr.crt	X(m)	Y(m)
1	4812570	-220930
2	4812370	-219430
3	4811070	-220430
4	4810870	-218930
5	4819570	-219130

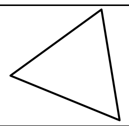
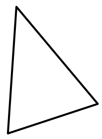


Se cere:

- Calculul corecţiilor de reducere a distanţelor la planul de proiecţie.
- Calculul corecţiilor de reducere a unghiurilor la planul de proiecţie.
- Verificarea corecţiilor pe triunghiuri cu ajutorul excesului sferic.

Soluţie:

Triunghi 123	punct	corecţia pentru			exesul	CONTROL
		direcţii		unghiuri	sferic	
	1	$\delta_{1,3}$	8.12	-19.947	0.017	-0.017
		$\delta_{1,2}$	28.06			
	2	$\delta_{2,1}$	-28.06	-8.124		
		$\delta_{2,3}$	-19.94			
	3	$\delta_{3,2}$	19.94	28.054		
$S=1075000m^2$		$\delta_{3,1}$	-8.12			
Triunghi 234	punct	corecţia pentru			exesul	CONTROL
		direcţii		unghiuri	sferic	
	2	$\delta_{2,4}$	8.12	-28.062	0.017	-0.017
		$\delta_{2,3}$	-19.94			

	3	$\delta_{3,2}$	19.94	8.116		
		$\delta_{3,4}$	28.05			
	4	$\delta_{4,3}$	-28.05	19.930		
S=1075000 m^2		$\delta_{4,3}$	-8.12			
Triunghi 345	punct	corecţia pentru			exesul	CONTROL
		direcţii		unghiuri	sferic	
	3	$\delta_{3,5}$	31.79	-3.737	0.102	-0.102
		$\delta_{3,4}$	28.05			
	4	$\delta_{4,3}$	-28.05	31.740		
		$\delta_{4,5}$	3.69			
	5	$\delta_{5,4}$	-3.69	-28.105		
S=6505000 m^2		$\delta_{5,3}$	-31.79			

Pentru calculul corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie s-a folosit relaţia:

$$\delta_{ij}^{cc} = -\delta_{ji}^{cc} = 39.113 \cdot 10^{-10} \cdot (x_i y_j - x_j y_i)$$

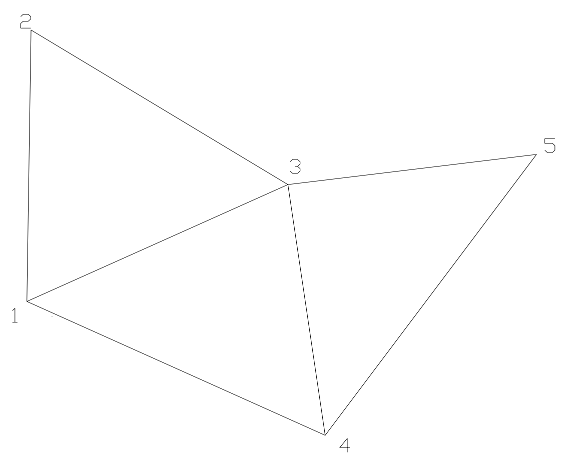
iar suprafaţa triunghiurilor s-a calculat cu formula lui Heron:

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, unde a, b şi c sunt laturile triunghiului şi se calculează din coordonatele punctelor care le definesc, iar p este semiperimetrul triunghiului.

Temă:

Se dă inventarul cu coordonatele provizorii pentru punctele geodezice din schita urmatoare:

Nr.crt	X(m)	Y(m)
1	5852500+N	-120900-N
2	5852300+N	-119400-N
3	5851000+N	-120400-N
4	5850800+N	-118900-N
5	5859500+N	-119100-N



Se cere:

- Calculul corecţiilor de reducere a distanţelor la planul de proiecţie.
- Calculul corecţiilor de reducere a unghiurilor la planul de proiecţie.
- Verificarea corecţiilor pe triunghiuri cu ajutorul excesului sferic.

unde N este numărul de ordine din catalog.

2.2.4 Reducerea distanţelor de pe elipsoid, la planul de proiecţie stereografic 1970

Reducerea distanţelor trebuie înţeleasă cu sensul de reprezentare şi nu de micşorare.

În acest caz se cunoaşte lungimea unei linii geodezice pe elipsoid, s, dar şi coordonatele stereografice provizorii, cu aproximaţie de metri, ale extremităţilor ei. Se cere , să se calculeze distanţa S_0, care corespunde liniei geodezice, în planul secant al proiecţiei stereografice 1970. Această distanţă se numeşte distanţa redusă la planul de proiecţie.

Rezolvarea se face în două etape:

- reducerea distanţei s, la planul tangent, în polul Q_0 unde se obţine distanţa S;
- reducerea distanţei S din planul tangent la planul secant, obţinându-se distanţa S_0 .

Vom considera o linie geodezică 1-2. Coordonatele stereografice provizorii ale punctelor ce definesc linia geodezică vor fi pentru punctul 1 (x_1, y_1) , iar pentru punctul 2 (x_2 , y_2).

Coordonatele x,y ale unui punct situat pe linia 1-2, se pot calcula în funcţie de distanţa de la punctul 1 până la punctul considerat, pe care o vom nota cu d şi de orientarea θ a liniei respective.

$$x = x_1 + d \cdot \cos\theta$$

$$y = y_1 + d \cdot \sin\theta$$

Distanţa redusă la planul tangent se determină din raportul:

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{1}{4R_0^2} \cdot (x_m^2 + y_m^2 + \frac{S^2}{12}),$$

unde s este fie cunoscută ca distanţă pe elipsoid, fie se poate calcula din coordonatele stereografice din planul tangent, iar x_m şi y_m sunt coordonatele unui puncti aflat la mijlocul segementului P-i.

$$x_m = \frac{x_P + x_i}{2}$$

$$y_m = \frac{y_P + y_i}{2}$$

După obţinerea distanţei S, reduse la planul tangent, se calculează distanţa S_0 , redusă la planul secant: $S_0 = S \cdot c$, unde c= 0.999750000 este coeficientul de reducere a scării.

Cele două etape de calcul pot fi comasate şi obţinem relaţia:

$$S_0 = s \cdot [+0.999750000 + 0.614538792 \cdot (10^{-14}) \cdot (x_m^2 + y_m^2) +$$

$$+ 0.51211(10^{-15}) \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2) + 0.37775 \cdot (10^{-28}) \cdot (x_m^2 + y_m^2)^2]$$

în care S_0 este distanţa redusă la planul secant al proiecţiei stereografice 1970, s este distanţa de pe elipsoid, iar coordonatele rectangulare aproximative sunt în planul secant.

Aplicaţie:

Se dau:

a) Lungimile s_1,s_2 ale unor laturi din reţeaua geodezică

s_1= 2000 m
s_2= 7000 m
b) Coordonatele punctului P:
X_P= 251500 m
Y_P= -141500 m

c) Direcţiile orizontale măsurate în staţie şi reduse la planul de proiecţie pentru latura respectivă:

θ_1= 52°.02'.02",02
θ_2= 152°.02'.02",02

Se cere:

- Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1,2, cu distanţele nereduse la planul de proiecţie;
- Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură;
- Calculul coordonatelor rectangulare plane X,Y folosind distanţele reduse la planul de proiecţie şi al influenţei reducerii distanţelor, asupra coordonatelor.

Soluţie:

Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1..4, cu distanţele nereduse la planul de proiecţie

$$x_i = x_P + s_i \cdot \cos\theta$$

$$y_i = y_P + s_i \cdot \sin\theta$$

Nr. pct.	**Dist. s_i (m)**	**θ**	**Sin θ** / **Cos θ**	**X(m)**	**Y(m)**
1	2000	52.02.02,02	-0.18288802 0.98313375	251134.2240	-139533.7325
2	7000	152.02.02,02	0.34011736 0.94038300	253880.8215	-134917.319

Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură

- Calculul coordonatelor medii:

$$x_m = \frac{x_P + x_i}{2}$$

$$y_m = \frac{y_P + y_i}{2}$$

Nr. Pct.	**X_m(m)**	**Y_m(m)**
1	251317.112	-140516.866
2	252690.411	-138208.660

- Calculul lui S_0

$$S_0 = s \cdot [+0.999750000 + 0.614538792 \cdot (10^{-14}) \cdot (x_m^2 + y_m^2) +$$
$$+ 0.51211(10^{-15}) \cdot (\Delta x^2 + \Delta y^2) + 0.37775 \cdot (10^{-28}) \cdot (x_m^2 + y_m^2)^2]$$
$$\Delta x = x_i - x_P$$
$$\Delta y = y_i - y_P$$

s_i (m)	2000	7000
Δx(m)	-182.888	983.134
Δy(m)	1190.411	3291.34
a	0.000509485	0.000509785
b	0.000000001	0.000000006
c	0.000000260	0.000000260
S_0 (m)	200.519	7001.820
S_0 -s	0.519	1.820

- Calculul coordonatelor plane ale punctelor 1 şi 2

$$X_i = x_P + S_0 \cdot \cos\theta$$
$$Y_i = y_P + S_0 \cdot \sin\theta$$

Nr. Pct.	**X(m)**	**Y(m)**
1	251134.129	-139533.222
2	253881.441	-134915.608

- Determinarea influenţei reducerii distanţelor la planul de proiecţie asupra coordonatelor celor 2 puncte:

Nr. Pct.	**X-x (m)**	**Y-y (m)**
1	-0.095	0.510
2	0.619	1.711

Temă:

Se dau:

a) Lungimile s_1........s_4 ale unor laturi din reţeaua geodezică

s_1= 3425 m
s_2= 6025 m
s_3= 12025 m
s_4= 17025 m

b) Coordonatele punctului P: X_P= 301500 m
Y_P= 201500 m

c) Direcţiile orizontale măsurate în staţie şi reduse la planul de proiecţie pentru latura respectivă:

θ_1= 27°.55'.75",07
θ_2= 62°.55'.75",07
θ_3= 117°.55'.75",07
θ_4= 172°.55'.75",07

Se cere:

- Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1..4, cu distanţele nereduse la planul de proiecţie;
- Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură;
- Calculul coordonatelor rectangulare plane X,Y folosind distanţele reduse la planul de proiecţie şi al influenţei reducerii distanţelor, asupra coordonatelor.

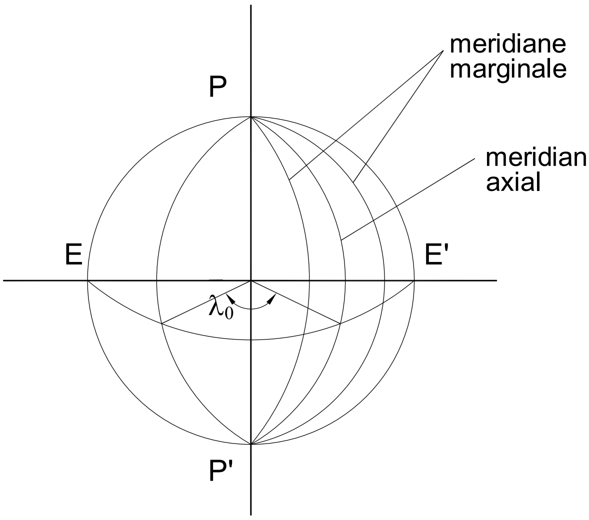
Capitolul 3
Proiecţia Gauss-Krüger

În România, proiecţia cilindrică transversală Gauss a fost adoptată pentru lucrările geodezice, în anul 1951 odată cu adoptarea elipsoidului Krasovski 1940, cu punctul astronomic fundamental la Pulkovo.

Caracteristici generale

6. Proiecţia Gauss este o proiecţie conformă, adică în planul de proiecţie unghiurile se reprezintă fără deformaţii;

7. Pentru o reprezentare plană a elipsoidului de rotaţie, acesta se împarte în fuse de la Polul Nord la Polul Sud care sunt delimitate de două meridiane marginale.



Fus în proiecţia Gauss

În practică se folosesc fuse de 6° şi fuse de 3°.

Prin partea centrală a fiecărui fus trece meridianul axial, iar longitudinea acestuia ne defineşte poziţia geografică a fusului .

8. Fiecare fus are propriul său sistem de axe de coordonate plane astfel:

a. originea sistemului se află la intersecţia meridianului axial cu ecuatorul;

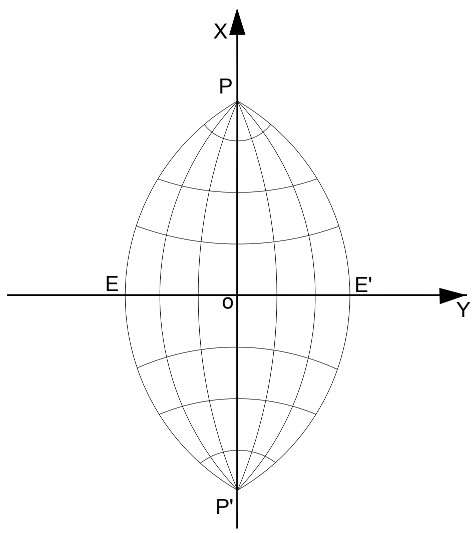
b. meridianul axial reprezentat în plan printr-un segment de dreaptă se consideră axa Ox cu sensul pozitiv spre N, fiind în acelaşi timp şi axă de simetrie;

c. arcul de ecuator se reprezintă în plan printr-o dreaptă şi se consideră ca axa Oz având sensul pozitiv spre E.

Pentru o reprezentare plană în proiecţia Gauss-Kruger, fiecare fus trebuie să îndeplinească trei condiţii:

1- reprezentarea să fie conformă;
2- meridianul axial să fie axă de simetrie şi axa Ox cu sensul pozitiv spre N;
3- în orice punct de pe meridianul axial deformaţiile să fie nule.

Aspectul general al reţelei cartografice



Aspectul reţelei de meridiane şi paralele dintr-un fus în Gauss

Meridianele se reprezintă prin curbe oarecare cu concavitatea spre meridianul axial care este reprezentat printr-un segment de dreaptă.

Paralelele se reprezintă prin curbe oarecare având concavitatea spre polii respectivi.

3.1 Calculul coordonatelor plane (x,y), Gauss, funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid

Datele problemei:

L_0= longitudinea meridianului axial al fusului în care se reprezintă punctul;

B,L= coordonatele geografice ale punctului, elipsoidul Krasovski 1940.

Toate coordonatele geografice sunt în gradaţie sexagesimală.

Formulele de calcul cu coeficienţi constanţi sunt:

$$f = (B - B_0)'' \cdot 10^{-4}$$

$$l = (L - L_0)'' \cdot 10^{-4}$$

$$X = x_0 + \Delta x$$

x_o=+5096175.747

$$\Delta x = a_{00} f^0 l^0 + a_{10} f \cdot l^0 + a_{20} f^2 l^0 + a_{30} f^3 l^0 + a_{40} f^4 l^0 + a_{02} f \cdot l^2 + a_{12} f \cdot l^2 +$$
$$+ a_{22} f^2 l^2 + a_{32} f^3 l^2 + a_{42} f^4 l^2 + a_{04} f^0 \cdot l^4 + a_{14} f \cdot l^4 + a_{24} f^2 \cdot l^4 + a_{34} f^3 \cdot l^4$$
$$y = b_{01} f^0 \cdot l + b_{11} f \cdot l + b_{21} f^2 \cdot l + b_{31} f^3 \cdot l + b_{41} f^4 \cdot l + b_{03} f^0 \cdot l^3 + b_{13} f \cdot l^3 +$$
$$+ b_{23} f^2 \cdot l^3 + b_{33} f^3 \cdot l^3 + b_{43} f^4 \cdot l^3 + b_{05} f \cdot l^5 + b_{15} f \cdot l^5 + b_{25} f^2 \cdot l^5$$

Sau:

$$\Delta x = (a_{00} f^0 + a_{10} f + a_{20} f^2 + a_{30} f^3 + a_{40} f^4) \cdot l^0 + (a_{02} f + a_{12} f + a_{22} f^2 + a_{32} f^3 +$$
$$+ a_{42} f^4) \cdot l^2 + (a_{04} f^0 + a_{14} f + a_{24} f^2 + a_{34} f^3) \cdot l^4$$
$$y = (b_{01} f^0 + b_{11} f + b_{21} f^2 + b_{31} f^3 + b_{41} f^4) \cdot l + (b_{03} f^0 + b_{13} f + b_{23} f^2 +$$
$$+ b_{33} f^3 + b_{43} f^4) \cdot l^3 + (b_{05} f + b_{15} f + b_{25} f^2) \cdot l^5$$

Dacă notăm parantezele cu S_0, S_2, S_4, S_6 şi S_1, S_3, S_5 obţinem relaţiile :

$$\Delta x = S_0 + S_2 \cdot l^2 + S_4 \cdot l^4 = R_0 + R_2 + R_5$$
$$y = S_1 \cdot l + S_3 \cdot l^3 + S_5 \cdot l^5 = R_1 + R_3 + R_5$$

3.2 Transformarea coordonatelor rectangulare plane Gauss (x, y) în coordonate geografice (φ,λ) pe elipsoidul de rotaţie

Se cunosc coordonatele rectangulare Gauss ale unui punct oarecare A şi longitudinea meridianului axial al fusului (L_0).
Se cere să se calculeze coordonatele geografice (B,L) ale punctului corespunzător pe suprafaţa elipsoidului de referinţă.
Formulele de calcul cu coeficienţi constanţi utilizate pentru această transformare sunt:

$$\Delta x = X - x_0$$
x_o=+5096175.747
$$Y = y \cdot 10^{-5}$$
$$B = 40^0 + \Delta B$$
$$L = L_0 + l$$

unde l este diferenţa de longitudine a punctului, faţă de meridianul axial.

$$\Delta B = (A_{00} + A_{10}\Delta x + A_{20}\Delta x^2 + A_{30}\Delta x^3 + A_{40}\Delta x^4 + A_{50}\Delta x^5) + (A_{02} + A_{12}\Delta x +$$
$$+ A_{22}\Delta x^2 + A_{32}\Delta x^3 + A_{42}\Delta x^4 + A_{52}\Delta x^4) \cdot Y^2 + (A_{04} + A_{14}\Delta x + A_{24}\Delta x^2 + A_{34}\Delta x^3) \cdot Y^4$$
$$+ (A_{06}\Delta x + A_{16}\Delta x)Y^6$$
$$l = (B_{01} + B_{11}\Delta x + B_{21}\Delta x^2 + B_{31}\Delta x^3 + B_{41}\Delta x^4 + B_{51}\Delta x^5 + B_{61}\Delta x^6) \cdot Y + (B_{03} + B_{13}\Delta x +$$
$$+ B_{23}\Delta x^2 + B_{33}\Delta x^3 + B_{43}\Delta x^4) \cdot Y^3 + (B_{05} + B_{15}\Delta x + B_{25}\Delta x^2 + B_{35}\Delta x^3) \cdot Y^5 + (B_{07}\Delta x^0)Y^7$$

Dacă notăm parantezele cu S_0, S_2, S_4, S_6 şi S_1, S_3, S_5,S_7 obţinem relaţiile :

$$\Delta B'' = S_0 + S_2 \cdot Y^2 + S_4 \cdot Y^4 + S_6 \cdot Y^6 = R''_0 + R''_2 + R''_4 + R''_6$$
$$l'' = S_1 \cdot Y + S_3 \cdot Y^3 + S_5 \cdot Y^5 + S_7 Y^7 = R''_1 + R''_3 + R''_5 + R''_7$$

Aplicaţie :

1. Calculul coordonatelor plane Gauss în funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid prin procedeul cu coeficienţi constanţi.

Soluţie:

Regulă de calcul:

- *calculul lui Δx:*
  - elementele din coloana 1 se înmulţesc cu elementele corespunzătoare din coloana 2;
  - prin însumarea produselor astfel obţinute, rezultă S_0, care înmulţit cu l^0 ne dă valoarea lui r_0;
  - în mod asemănător se procedează pentru a calcula r_2, r_4 folosind coloanele 1 şi 3, 1 şi 4 ;
  - adunând rezultatele din coloana 6 se obţine valoarea lui Δx;.

- valoarea lui X se calculează cu relaţia $X = x_0 + \Delta x$, unde x_0 este constant.

➢ *pentru calculul lui y* se procedează în mod asemănător cu regula prezentată la calculul lui Δx.

φ = 45° 15’ 15”.0015 Punctul : λ =22° 18’ 18”.0015

φ_o= 46° 00’ 00”.0000 Trapezul : λ_o=21° 00’ 00”.0000

$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_o$= -0° 44’ 44”.9985 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_o$= 1° 18’ 18”.0015

$f=10^{-4}\cdot\Delta\varphi$= -0.26859985 $l''=10^{-4}\cdot\Delta\lambda''$= 0.46980015

Calculul lui Δx

	1		2	3	4		5		r
	f^0=+1		+0	+3752.1457	+1.40331		l^0=+1		R_0= -82896.30006
	f^1=-0.26849985		+308758.958	-12.09428	-0.22026		l^2=+ 0.220712181		R_2=+ 828.5802092
Δx=	f^2=+0.072092169	*	+75.36064	-17.64146	-0.00525	*	l^4= +0.048713867	=	R_4=+ 0.071221873
	f^3=-0.019356737		-0.06459	+0.01607	+0.00135				
	f^4=+0.005197281		-0.05909	+0.01396	0				
			S_0= -82896.30006	S_2= +3754.12089	S_4= +1.46204516				

Dx=-82067.64863 xo=+5096175.747 X=+5014108.098

Calculul lui y

	f^0=+1		+215179.4208	-2.80957	-0.0307		l^1=+0.46980015		R_1 +102440.9293
	f^1=-0.26849985		-10767.83826	-8.05441	-0.00004	*	l^3=+0.103690616		R_3= -0.063923847
y=	f^2=+0.072092169	*	-254.69196	+0.42862	+0.00069		l^5=+0.022885782	=	R_5= -0.000701209
	f^3=-0.019356737		+4.13843	+0.0217	0				
	f^4=+0.005197281		+0.0536	-0.00083	0				
			S_1= +218052.1427	S_3= -0.61648633	S_4= -0.03063952				

Y=+102440.8647

2. Transformarea coordonatelor plane Gauss in coordonate geografice pe elipsoidul Krasovski 1940.

Vom calcula , mai întâi diferenţa de coordonate $\Delta\varphi$ şi l faţă de centrul proiecţiei (φ_0, λ_0), apoi se vor determina coordonatele geografice (φ, λ) .

Regula de calcul este asemănătoare cu cea prezentată la punctul 1 al aplicaţiei.

Pentru această aplicaţie se cunosc coordonatele plane stereografice , translatate .

x = 5 014 108.101	Punctul :	y = 102 440.9902
x_o= 5 096 175.747	Trapezul :	$Y=10^{-5}\cdot y$= 1.024409920
$\Delta x= 10^{-5}\cdot(x-x_o)$=-0.820676465		

Calclulul lui Δφ

$\Delta\varphi'' =$

1	*	2	3	4		5		6
$\Delta x^0=+1$		0	-26.2457302	+0.0043872		$Y^0=+1$		$R_1''=$ -2658.156795
$\Delta x^1=-0.820676465$		+3238.772427	-0.8191913	+0.0002442	*	$Y^2=+1.049415648$		$R_2''=$ -26.84631809
$\Delta x^2=+0.67350986$		-0.256028	-0.0131746	+0.000009		$Y^4=+1.101273201$	=	$R_3''=$ +0.004617293
$\Delta x^3=-0.552733691$	*	+0.0001115	-0.0002819	+0.0000003				
$\Delta x^4=+0.453615531$		+0.0000208	-0.0000057	0				
$\Delta x^5=-0.37227159$		0	-0.0000001	0				
		$S_0=$ -2658.156795	$S_2=$ -25.5821591	$S_4=$ +0.00419269				

$\Delta\varphi''=$-2684,998496 $\Delta\varphi=-0°.44'.44,9985''$ $\varphi_o=46°$ $\varphi=\varphi_o+\Delta\varphi=45°15'15,0015''$

Calclulul lui l

l"=

	*				*		=	
$\Delta x^0=+1$		+4647.284561	-0.59725451	+0.00014563		$Y^1=+1.024409902$		$R_1''=$ +4698.619173
$\Delta x^1=-0.820676465$		+75.31951	-0.03516938	+0.00001478	*	$Y^3=+1.075031781$		$R_3''=$ -0.612065175
$\Delta x^2=+0.67350986$		+1.791764	-0.00145632	+0.0000009		$Y^5=+1.128155172$	=	$R_5''=$ +0.000151268
$\Delta x^3=-0.552733691$	*	+0.0351694	-0.00004925	+0.00000004				
$\Delta x^4=+0.453615531$		+0.0007282	-0.00000151	0				
$\Delta x^5=-0.37227159$		+0.0000149	-0.00000004	0				
$\Delta x^6=+0.305514533$		+0.000003	0	0				
		$S_1=$ 4586.659269	$S_3=$ -0.56934612	$S_5=$ 0.00013408				

l"=4698,007259 l =1°.18'18",00726 $\lambda_o=27°$ $\lambda=\lambda_o+l=28°18'18,00726''$

Temă:

1. Se dau coordonatele geografice ale punctului P:
φ = 44°35'35"
λ = 25°55'55"
pe elipsoidul Krasovski 1940.

Se cere să se calculeze coordonatele plane Gauss, (x,y) în funcţie de coordonatele geografice de pe elipsoid prin procedeul cu coeficienţi constanţi.

2. Se dau coordonatele rectangulare plane ale punctului P:
X = 607275 m
Y = -68910 m
pe elipsoidul Krasovski 1940.

Se cere să se transforme coordonatele plane (x,y) obţinute, în coordonate geografice pe elipsoidul Krasovski prin procedeul cu coeficienţi constanţi.

3.3 Reducerea direcţiilor la planul de proiecţie Gauss-Kruger

Reducerea direcţiilor la planul de proiecşie se mai numeşte şi *reducerea direcţiilor la coardă* şi constă în a calcula corecţiile şi a le aplica direcţiilor măsurate. Liniile geodezice de pe elipsoid se reprezintă în proiecţia Gauss prin curbe cu concavitatea spre meridianul axial.

Formulele de calcul pentru reducerea direcţiilor măsurate la planul de proiecţie Gauss diferă de la un ordin de triangulaţie la altul.

În exeplul prezentat se vor folosi formulele de calcul pentru ordinele de triangulaţie III şi IV.

Formule utilizate:

$$\delta_{ij} = -\frac{f_m}{3}\left(x_j - x_i\right)\left(2y_i + y_j\right)$$

$$\delta_{ji} = +\frac{f_m}{3}\left(x_j - x_i\right)\left(2y_j + y_i\right)$$

$$f = \frac{\rho''}{2R^2},$$

$$x_m = \frac{x_i + x_j}{2}$$

unde:

(x_i, y_i) şi (x_j, y_j)- sunt coordonatele plane Gauss ale punctelor ce determină direcţiile;

f- este factorul excesului sferic.

δ_{ij}, δ_{ji} -sunt corecţiile de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie Gauss-Kruger.

Pentru a evita orice greşeală se trece la verificarea corecţiilor de reducere a direcţiilor la planul de proiecţie, pe triunghiuri.

<u>*Regulă de verificare:*</u>

"În orice triunghi dintr-o reţea geodezică, suma corecţiilor de reducere la planul de proiecţie ale celor trei unghiuri ale triunghiului, trebuie să fie egală cu excesul sferic ε al triunghiului respectiv, luat cu semn schimbat".

Corecţia de reducere la plan a unui unghi se obţine ca diferenţă între corecţiile de reducere la plan a celor 2 direcţii ce determină unghiul.

Formula generală a excesului sferic este $\varepsilon = \rho^{cc} \cdot \frac{S}{R^2}$, unde S este suprafaţa triunghiului, iar R este raza medie Gauss..

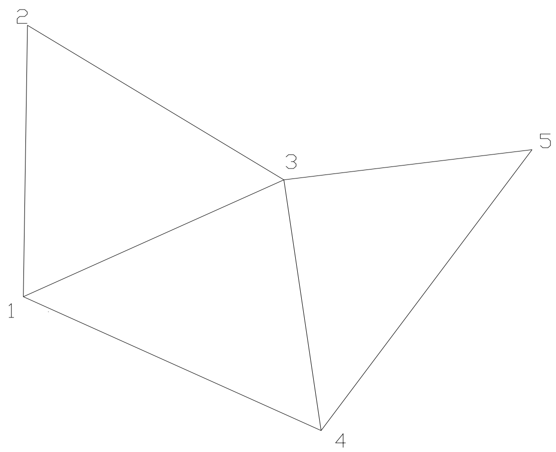
Aplicaţie :

Se dau coordonatele provizorii pentru punctele geodezice din schiţa următoare:

Nr.crt	X(m)	Y(m)
1	5210000	-190000
2	5200000	-175000
3	5190000	-190000
4	5180000	-170000
5	5170000	-180000

Se cere:

- Calculul corecţiilor de reducere a distanţelor la planul de proiecţie.
- Calculul corecţiilor de reducere a unghiurilor la planul de proiecţie.
- Verificarea corecţiilor pe triunghiuri cu ajutorul excesului sferic.



Soluţie:

$$\delta_{ij} = -\frac{f_m}{3}(x_j - x_i)(2y_i + y_j)$$

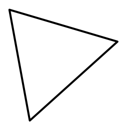
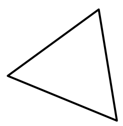
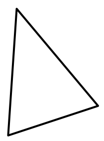
$$\delta_{ji} = +\frac{f_m}{3}(x_j - x_i)(2y_j + y_i)$$

$$f_m = \frac{\rho}{2R_m{}^2} = 2.533 \cdot 10^{-9}$$

R_m =6379533.305m

$\rho'' = 206264.806$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 5190000$$

<table>
<tr><td>Triunghi 123</td><td rowspan="2">punct</td><td colspan="3">corecţia pentru</td><td>exesul</td><td rowspan="2">CONTROL</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td colspan="2">direcţii</td><td>unghiuri</td><td>sferic</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>$\delta_{1,3}$</td><td>-9.63</td><td rowspan="2">-4.94</td><td rowspan="6">0.7602</td><td rowspan="6">-0.7602</td></tr>
<tr><td>$\delta_{1,2}$</td><td>-4.69</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>$\delta_{2,1}$</td><td>4.56</td><td rowspan="2">9.12</td></tr>
<tr><td>$\delta_{2,3}$</td><td>-4.56</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$\delta_{3,2}$</td><td>4.69</td><td rowspan="2">-4.94</td></tr>
<tr><td>S=150000000m^2</td><td>$\delta_{3,1}$</td><td>9.63</td></tr>
<tr><td>Triunghi 234</td><td rowspan="2">punct</td><td colspan="3">corecţia pentru</td><td>exesul</td><td rowspan="2">CONTROL</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td colspan="2">direcţii</td><td>unghiuri</td><td>sferic</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>$\delta_{1,4}$</td><td>-9.63</td><td rowspan="2">-4.31</td><td rowspan="6">1.0136</td><td rowspan="6">1.0136</td></tr>
<tr><td>$\delta_{1,3}$</td><td>-13.94</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$\delta_{3,1}$</td><td>-4.65</td><td rowspan="2">14.28</td></tr>
<tr><td>$\delta_{3,4}$</td><td>9.63</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>$\delta_{4,3}$</td><td>13.43</td><td rowspan="2">-8.95</td></tr>
<tr><td>S=200000000 m^2</td><td>$\delta_{4,3}$</td><td>4.48</td></tr>
<tr><td>Triunghi 345</td><td rowspan="2">punct</td><td colspan="3">corecţia pentru</td><td>exesul</td><td rowspan="2">CONTROL</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td colspan="2">direcţii</td><td>unghiuri</td><td>sferic</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$\delta_{3,5}$</td><td>-9.46</td><td rowspan="2">4.81</td><td rowspan="6">0.7602</td><td rowspan="6">0.7602</td></tr>
<tr><td>$\delta_{3,4}$</td><td>-4.65</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>$\delta_{4,3}$</td><td>4.48</td><td rowspan="2">-8.87</td></tr>
<tr><td>$\delta_{4,5}$</td><td>-4.39</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>$\delta_{5,4}$</td><td>4.48</td><td rowspan="2">4.81</td></tr>
<tr><td>S=150000000 m^2</td><td>$\delta_{5,3}$</td><td>9.29</td></tr>
</table>

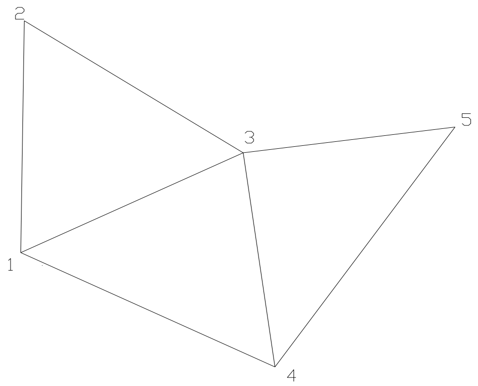
Suprafaţa triunghiurilor s-a calculat cu formula lui Heron:

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, unde a, b şi c sunt laturile triunghiului şi se calculează din coordonatele punctelor care le definesc, iar p este semiperimetrul triunghiului.

Temă:

Se dă inventarul cu coordonatele provizorii pentru punctele geodezice din schita urmatoare:

Nr.crt	**X(m)**	**Y(m)**
1	5252500+N	-20000-N
2	5252000+N	-19000-N
3	5251000+N	-18000-N
4	5250500+N	-17000-N
5	5250000+N	-16000-N



Se cere:

- Calculul corecţiilor de reducere a distanţelor la planul de proiecţie.
- Calculul corecţiilor de reducere a unghiurilor la planul de proiecţie.
- Verificarea corecţiilor pe triunghiuri cu ajutorul excesului sferic.

unde N este numărul de ordine din catalog.

3.4 Reducerea distanţelor de pe elipsoid, la planul de proiecţie Gauss-Kruger

Reducerea unei distanţe s de pe elipsoid la planul de proiecţie Gauss înseamnă de fapt reprezentarea acesteia în planul de proiecţie, proces prin care distanţa de pe elipsoid se deformează neuniform pe toată lungimea ei.

Formulele folosite la rezolvarea acestei probleme sunt :

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{(\Delta y)^2}{24R^2}$$

unde s este distanţa pe elipsoid,

S-dinstanţa redusă la planul de proiecţie

y_m este coordonatele punctului P aflat la mijlocul segementului P-i.

$$y_m = \frac{y_P + y_i}{2}$$

$$\Delta y = y_i - y_P$$

R_m este raza medie de curbură Gauss

Pentru a putea vedea ce influenţî are reducerea distanţelor de pe elipsoid la planul de proiecţie Gauss, asupra coordonatelor plane trebuiesc calculate coordonatele provizorii ale punctelor geodezice odată folosind distanţa neredusă, apoi folosind distanţa redusă.

Prin diferenţele dintre coordonate obţinem influenţa reducerii distanţelor.

$$x = x_N + s \cdot \cos\theta$$
$$y = y_N + s \cdot \sin\theta$$

$$x_r = x_N + S \cdot \cos\theta$$
$$y_r = y_N + S \cdot \sin\theta$$

Aplicaţie:

Se dau:

a) Lungimile s_1.........s_4 ale unor laturi din reţeaua geodezică

s_1= 5000 m

s_2= 11000 m

s_3=15000 m

s_4=21000 m

b) Coordonatele punctului P:

X_P= 5100000 m

Y_P= -170000 m

c) Direcţiile orizontale măsurate în staţie şi reduse la planul de proiecţie pentru latura respectivă:

θ_1= 27°.02'.02"

θ_2= 57°.02'.02"

θ_3= 127°.02'.02"

θ_4= 177°.02'.02"

Se cere:

- Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1,2, 3,4 cu distanţele nereduse la planul de proiecţie;
- Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură;
- Calculul coordonatelor rectangulare plane x_r,y_r folosind distanţele reduse la planul de proiecţie şi al influenţei reducerii distanţelor, asupra coordonatelor.

Soluţie:

Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1..4, cu distanţele nereduse la planul de proiecţie

$$x_i = x_P + s_i \cdot \cos\theta$$

$$y_i = y_P + s_i \cdot \sin\theta$$

Nr. pct.	Dist. s_i (m)	θ	Sin θ / Cos θ	X(m)	Y(m)
1	5000	27.02.02	0.454304601	5154454.232	-172728.477
			0.890846411		
2	11000	57.02.02	0.838862531	5155987.776	-165772.512
			0.544343322		
3	15000	127.02.02	0.798423286	5140968.551	-163023.651
			-0.60209655		
4	21000	177.02.02	0.051983879	5129028.394	-173908.339
			-0.99864792		

Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură

$$y_m = \frac{y_P + y_i}{2}$$

$$\Delta y = y_i - y_P$$

$$\frac{s}{S} = 1 - \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{(\Delta y)^2}{24R^2}$$

R_m=6378995.752m

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4
formule	5000	11000	15000	21000
1/(2 Rm 2)	0.00000000000001228755			
Ym	-173864.24	-170386.26	-169011.83	-174454.17
Ym2	30228773400.70	29031476223.57	28564997161.55	30434257301.17
1/(24*Rm2)	0.000000000000001023963			
DY	2271.523164	9227.488059	11976.34898	1091.660741
DY2	5159817.48	85146535.89	143432934.99	1191723.17
S	5001.86	11003.93	15005.27	21007.86
S-s	1.86	3.93	5.27	7.86

Calculul coordonatelor plane ale punctelor 1, 2,3,4

$$X_i = x_P + S \cdot \cos\theta$$
$$Y_i = y_P + S \cdot \sin\theta$$

Nr. Pct.	**X_r(m)**	**Y_r(m)**
1	5154455.89	-172727.63
2	5155989.91	-165769.22
3	5140965.38	-163019.44
4	5129020.55	-173907.93

Determinarea influenţei reducerii distanţelor la planul de proiecţie asupra coordonatelor celor 4 puncte:

Nr. Pct.	**X_r-x (m)**	**Y_r-y (m)**
1	1.66	0.84
2	2.14	3.29
3	-3.17	4.21
4	-7.85	0.41

Temă:

1. Se dau:

- Lungimile s_1........s_4 ale unor laturi din reţeaua geodezică
  s_1= 5525 m
  s_2= 11525 m
  s_3= 15525 m
  s_4= 20525 m
- Coordonatele punctului P:
  X_P= 301500 m
  Y_P= 201500 m

- Direcţiile orizontale măsurate în staţie şi reduse la planul de proiecţie pentru latura respectivă:

  θ_1= 25°.55'.75"
  θ_2= 65°.55'.75"
  θ_3= 115°.55'.75"
  θ_4= 180°.55'.75"

Se cere:

- Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor 1..4, cu distanţele nereduse la planul de proiecţie;
- Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calcularea deformaţiei totale pentru fiecare latură;
- Calculul coordonatelor rectangulare plane X,Y folosind distanţele reduse la planul de proiecţie şi al influenţei reducerii distanţelor, asupra coordonatelor.

2. Se dau :

- lungimile s1 , s2 , s3 , s4 ale unor laturi din reţeaua geodezică măsurate din P şi reduse la elipsoid

  s_1 = 6010.10 m ;
  s_2 = 13010.10 m ;
  s_3 = 18010.10 m ;
  s_4 = 25010.10 m

- coordonatele punctului de staţie P :

  X_P = 5210000 m
  Y_P = 150000 m

- direcţiile orientate în staţie şi reduse la planul de proiecţie pentru laturile respective

  θ_1 = 40°10'10".10 ;
  θ_2 = 90°10'10".10 ;
  θ_3 = 140°10'10".10 ;
  θ_4 = 240°10'10".10

Se cere :

- Calculul coordonatelor provizorii ale punctelor geodezice 1,2,3,4 folosind distanţele nereduse la planul de proiecţie.
- Reducerea distanţelor la planul de proiecţie şi calculul deformaţiei totale fiecărei laturi.
- Calculul coordonatelor rectangulare plane a fiecărei laturi folosind distanţele reduse la planul de proiecţie şi influenţa reducerii distanţelor asupra coordonatelor plane.

3.5 Nomenclatura trapezelor , construcţia şi verificarea cadrului unei hărţi topografice în proiecţie Gauss-Kruger

Nomenclatura hărţilor în proiecţia Gauss

În ţara noastră hărţile topografice se întocmesc în proiecţie cilindrică transversală Gauss–Krüger şi în proiecţie stereografică–1970. Ambele proiecţii folosesc acelaşi sistem de împărţire şi nomenclatură care a fost adoptat din anul 1952.

Pentru împărţirea elipsoidului în trapeze la scara 1:1000000 se procedează astfel:se trasează meridiane din 6° în 6°, care delimitează fuse, numerotate de la l la 60 şi paralele din 4° în 4° pornind de la ecuator spre poli, care delimitează zone notate A, B, C, V. teritoriul României este situat în rusele 34 şi 35 şi în zonele K, L, M. Nomenclatura unui trapez la scara l:1000000va fi formată din litera corespunzătoare zonei şi numărul fusului, de exemplu: L-34.

Nomenclaturile trapezelor la scări mai mari se stabilesc pornind de la trapezul 1:1000000. Dimensiunile graduale ale laturilor trapezelor şi nomenclaturile acestora sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Scara	$\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$	Exemple de nomenclaturi
1:1.000.000	4°	6°	L-34
1:500.000	2°	3°	L-34-A
1:200.000	40'	1°	L-34-XXXII
1:100.000	20'	30'	1-34-119
1:50.000	10'	15'	L-34-119-B
1:25.000	5'	7'30"	L-34-119-B-b
1:10.000	2'30"	3 '45"	L-34-119-B-b-2
1:5.000	1'15"	1'52",5	L-34-119-B-b-2-IV
1:2.000	37",5	56",25	L-34-119-B-b-2-IV-2

Într-o foaie la scara 1: 1.000.000 intră un număr de foi la toate scările standard mai mari după cum rezultă din tabelul de mai jos:

scara / Nomenclatura	1:1000000	1:500.000	1:200.000	1:100.000	1:50.000	1:25.000	1:10.000	1:5.000	1:2.000
L-34	1	4	36	144	576	2304	9216	36864	331776
L-34-A	-	1	9	36	144	576	2304	9216	82944
L-34-XXXII	-	9	1	4	16	64	256	1024	9216
L–34-119	-	-	-	1	4	16	64	576	2304
L-34-119-B	-	-	-	-	1	4	16	64	576
L-34-119-B-b	-	-	-	-	-	1	4	16	144
L-34-119-B-b-2	-	-	-	-	-	-	1	4	36
L-34-119-B-b-2-lV	-	-	-	-	-	-	-	1	9
L-34-119-B-b-2-IV-2	-	-	-	-	-	-	-	-	1

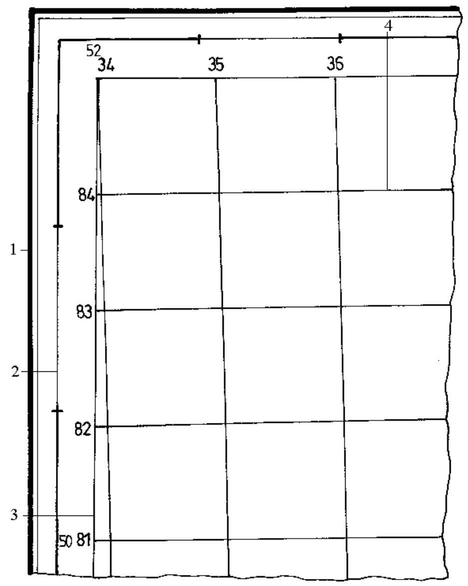
Cadrul unei hărţi topografice

În proiecţia Gauss-Kruger, hărţile topografice sunt limitate de un cadru interior care reprezintă cele 4 laturi ale foii de hartă, care limitează imaginea hărţii. Laturile de N şi de S ale foii de hartă reprezintă paralelele geografice iar cele de E şi V reprezintă meridianele geografice.

La distanţă de aproximativ 8 mm de cadrul interior, pe harta topografică se găseşte un al doilea cadru, numit cadru geografic pe care sunt marcate prin segmente minutele.

Un al treila cadru al hărţii topografice este cadrul exterior sau ornamental. Acest cadru se trasează la o distanţă foarte mică de cel geografic, mai mult pentru estetica hărţii.

La fiecare colţ al hărţii sunt trecute coordonatele geografice ale acestora. Reţeaua rectangulară este un sistem de linii drepte paralele cu axele de coordonate adoptate. Valorile caroiajului kilometric sunt scrise în cadrul interior şi cel geografic , în apropierea colţurilor foii de hartă. Între aceste valori se înscriu numai ultimele două cifre ale kilometrilor întregi.



Cadrul hărţii topografice

1 – cadrul ornamental ; 2 – cadrul geografic; 3 – cadrul interior ;
4 – reţeaua geometrică sau caroiajul kilometric.

Trasarea cadrului interior al unei hărţi se realizează astfel:

- Se determină coorodnatele geografice ale colţurilor trapezului ales;
- Se determină coordonatele rectangulare ale colţurilor trapezului, prin transformări de coordonate aşa cum s-a vazut la paragraful 3.1;
- Coordonatele rectangulare ale colţurilor se reduc la scară şi se raportează ;
- Se face verificarea cadrului interior prin măsurarea laturilor trapezului precum şi a diagonalei şi se compară cu valorile lor determinate din coorodnate si reduse la planul de proiecţie. Toleranţele admise sunt de ±0.2 mm pe fiecare latură şi ± 0.3 mm pe diagonală.

Aplicaţie:

1. Să se întocmească pentru judeţul Vrancea, o schemă cu trapezele 1:100000 ,1:50000 şi 1:25000 care să acopere suprafaţa dată. Din schemă trebuie să rezulte nomenclaturile trapezelor şi coordonatele geografice la colţurile acestora.

2. Un trapez la scara 1:25000 ales în interiorul judeţului se va împărţi în trapeze la scara 1:10000, 1:5000, 1:2000.

3. Să se reprezinte la scara şi să se verifice cadrul pentru un trapez la scara 1:10000, reprezentat in proiecţia Gauss-Kruger.

Soluţie:

1.

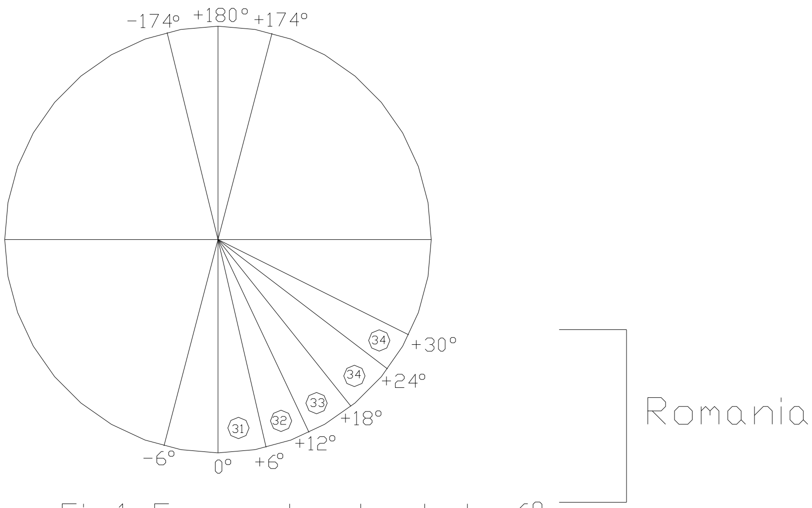


Fig.1 Fuse standard de 6°

TRAPEZUL L-35

SCARA 1:1000000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13											24
25											36
37				41	42	43	44				48
49				53	54	55	56				60
61				65	66	67	68				72
73				77	78	79	80				84
85				89	90	91	92				96
97											108
109											120
121											132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

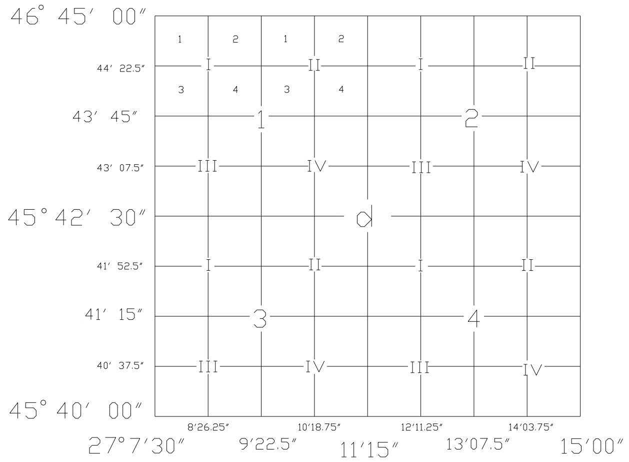
48° 40' 20' 47° 40' 20' 46° 40' 20' 45° 40' 20' 44°

24° 30' 25° 30' 26° 30' 27° 30' 28° 30' 29° 30' 30°

2. Un trapez la scara 1:25000 ales în interiorul judeţului, se va împărţi în trapeze la scara : 1: 10 000, 1:5 000 şi 1: 2 000.

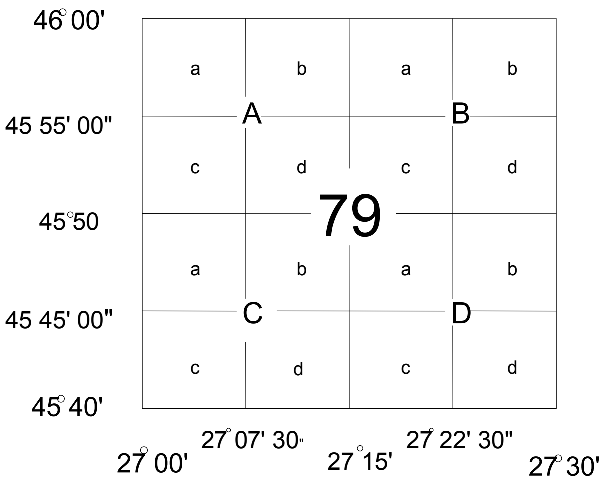
TRAPEZUL L-35-79-C-d

SCARA 1:25000



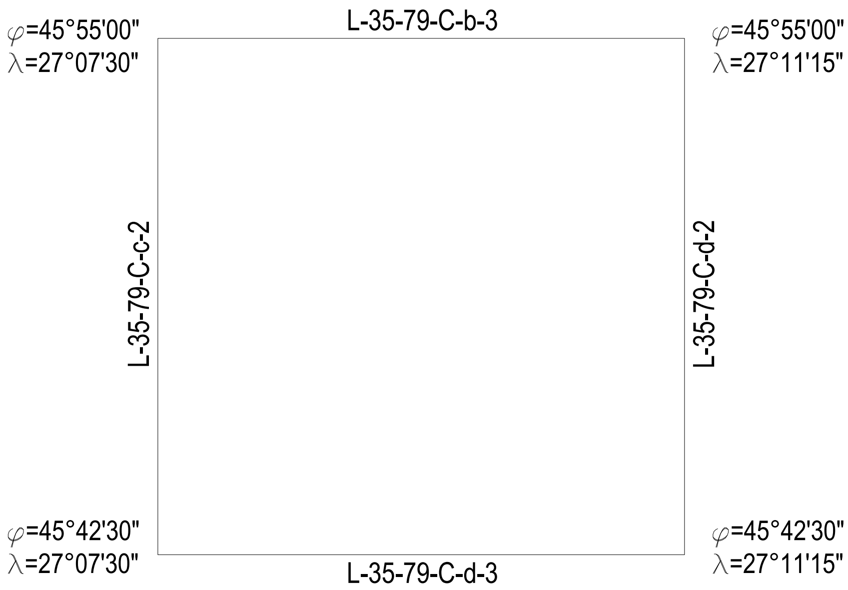
TRAPEZUL L-35-79

SCARA 1:500000



3. Proiectia Gauss-Kruger (L-34-79-C-d-1)

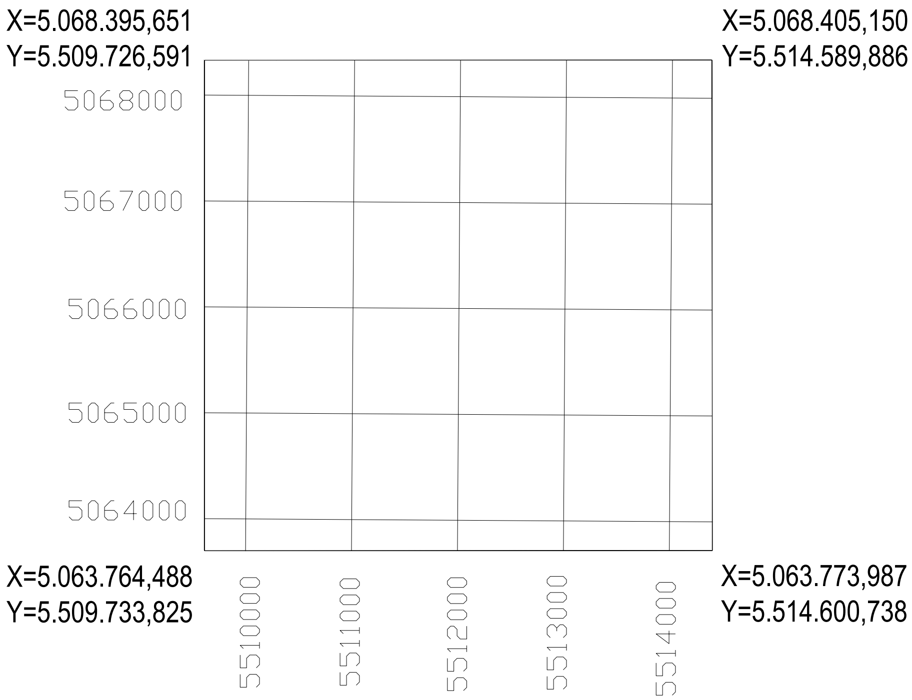
Schema 1: Coordonatele geografice la colţurile trapezului şi nomenclatura trapezelor vecine .



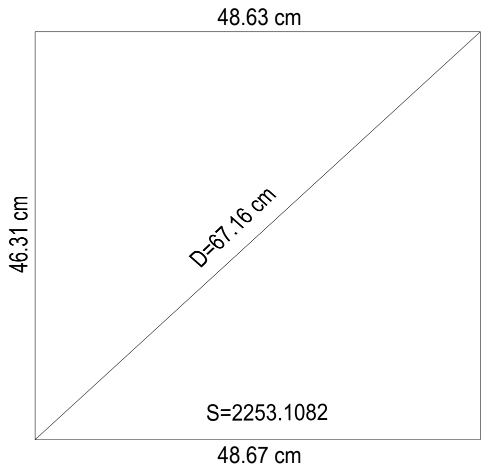
Schema 2: Coordonatele rectangulare plane la colţurile trapezului şi caroiajul kilometric.

TABEL DE COORDONATE

Coordonate rectangulare plane	
X[m]	Y[m]
5067027	5512205
5066026	5514206
5065026	5515206
5064026	5516206



Schema 3: Dimensiunile trapezului .



Capitolul 4
Proiecţii azimutale drepte

Caracteristici generale

Proiecţiile azimutale drepte se mai numesc şi proiecţii nprmale sau polare, iar latitudinea polului Q_0 este $\varphi_0 = 0°$.

În cazul acestor proiecţii, reţeaua normală se reprezintă prin cercuri concentrice şi drepte concurente în centrul cercurilor (imaginea polului Q_0).

Modulul de deformaţie liniară pe meridiane se determină cu relaţia:

$$m = \frac{-d\rho}{Rd\varphi} \text{ sau } m = \frac{d\rho}{Rd\psi}$$

când φ creşte şi ρ descreşte, iar modulul de deformaţie liniară se calculează cu formula:

$$n = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{R\cos\varphi}, \ \delta=\lambda.$$

Formulele generale ale proiecţiilor azimutale drepte, pentru reprezentarea sferei de rază R, sunt:

$$\delta = \lambda$$

$$\rho = f(\varphi)$$

$$x = \rho \cdot \cos\delta$$

$$y = \rho \cdot \sin\delta$$

$$m = \frac{-d\rho}{Rd\varphi} = \frac{d\rho}{Rd\psi}$$

$$n = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{R\cos\varphi}$$

$$p = m \cdot n$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ sau } tg(45^0 + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Pentru proiecţiile azimutale echidistante pe meridiane aceste relaţii devin:

$$\delta = \lambda$$

$$\rho = f(\varphi)$$

$$x = \rho \cdot \cos\delta$$

$$y = \rho \cdot \sin\delta$$

$$m = 1$$

deci

$$m = \frac{-d\rho}{Rd\varphi} = \frac{d\rho}{Rd\psi} = 1$$

$$n = \frac{\rho}{r} = \frac{R \cdot \psi}{R\sin\psi} = \frac{\psi}{\sin\psi}$$

$$a = n$$

$$b = 1$$

$$tg(45^0 + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{n}$$

Se observă că, datorită echidistanţei pe meridiane, razele vectoare din proiecţie sunt egale cu lungimile arcelor de meridian , măsurate de la pol spre ecuator.Lungimile se reprezintă cu deformaţii pozitive, ăn lungul paralelelor şi pe orice direcţie ce nu se confundă cu un meridian.

Ariile din plan au, de asemenea, deformaţii pozitive, iar unghiurile care au vârful ăn polul proiecţiei nu se deformează, însă cele care au vârful în alte puncte se deformează.

Această proiecţie este avantajoasă pentru zonele polare.

Aplicaţie:

Să se aplice unei sfere proiectia azimutala dreaptă , echidistantă pe meridian

şi paralele în vederea reprezentării reţelei de meridiane şi paralele şi a studiului deformaţiilor în următoarele două situaţii:

1. Pentru o zonă circumpolară
   - întinderea zonei este de le φ = 40ºN până la φ = 90ºN
   - scara este 1 : 5.020.000.
   - densitatea retelei cartografice: Δφ = Δλ = 10º

2. Pentru zona României
   - întinderea zonei este de la φ = 42 ºN până la φ = 50 ºN si λ = 20ºE până la λ = 30ºE
   - scara generală este 1 : 5.020.000
   - densitatea reţelei cartogarfice: Δφ = Δλ = 2º.

Pentru ambele cazuri vor fi calculate coordonatele plane polare (ρ, δ), coordoantele rectangulare plane (x, y), modulul de deformaţie liniară şi areolară şi deformaţiile unghiulare maxime.

Se lucrează în ipoteza Pământ-Sferă de rază R = 6 378 956 m.

Soluţie:

1. Pentru zona circumpolară
   - Calculul razelor vectoare

ρ =Rψrad

φ°	Ψ	Ψradiani	ρ [m]	ρ [cm/n]
40	50	0.872664626	5566037.406	11.08
50	40	0.6981317	4452829.92	8.87
60	30	0.523598775	3339622.44	6.65
70	20	0.34906585	2226414.96	4.43
80	10	0.174532925	1113207.48	2.21
90	0	0	0	0

- Calculul unghiurilor polare şi a coordonatelor rectangulare.

λ°	δ°	x[m]	y[m]	x[cm/n]	y[cm/n]
-180	360	5566037.405	0	11.1	0
-170	350	5481476.791	-9665322.524	10.9	-1.9
-160	340	5230364.277	-1903696.911	10.4	-3.7
-150	330	4820329.792	-2783018.703	9.6	-5.5

-140	320	4263832.025	-3577779.88	8.4	-7.1
-130	310	3577779.880	-4263832.025	7.1	-8.4
-120	300	2783018.703	-4820329.792	5.5	-9.6
-110	290	1903696.911	-5230364.277	3.7	-10.4
-100	280	966532.2524	-5481476.791	1.9	-10.9
-90	270	0	-5566037.406	0	-11.1
-80	260	-966532.2524	-5481476.791	-1.9	-10.9
-70	250	-193696.911	-5230364.277	-3.7	-10.4
-60	240	-2783018.703	-4820329.792	-5.5	-9.6
-50	230	-3577779.880	-4263832.025	-7.1	-8.4
-40	220	-4263832.025	-3577779.880	-8.4	-7.1
-30	210	-4820329.792	-2783018.703	-9.6	-5.5
-20	200	-5230364.277	-1903696.911	-10.4	-3.7
-10	190	-5481476.792	-966532.2524	-10.9	-1.9
0	180	-5566037.406	0	-11.1	0
10	170	-5481476.791	966532.2524	-10.9	1.9
20	160	-5230364.277	1903696.911	-10.4	3.7
30	150	-4820329.792	2783018.703	-9.6	5.5
40	140	-4263832.025	3577779.880	-8.4	7.1
50	130	-3577779.88	4263832.025	-7.1	8.4
60	120	-2783018.703	4820329.792	-5.5	9.6
70	110	-1903696.911	5230364.277	-3.7	10.4
80	100	-966532.2524	5481476.791	-1.9	10.9
90	90	0	5566037.406	0	11.1
100	80	966532.2524	5481476.791	1.9	10.9
110	70	1903696.911	5230364.277	3.7	10.4
120	60	2783018.703	4820329.792	5.5	9.6
130	50	3577779.880	4263832.025	7.2	8.4
140	40	4263832.025	3577779.88	8.4	7.1
150	30	4820329.792	2783018.703	9.6	5.5
160	20	5230364.277	1903696.911	10.4	3.7
170	10	5481476.791	9665322.524	10.9	1.9
180	0	5566037.406	0	11.1	0

- Studiul deformaţiei

  m=1, p=1

$$n = \frac{\psi^{rad}}{\sin\psi}$$

φ^0	ψ^0	n=p	D=(n-1)*103	a=n	b=1	ω^0
400	500	1.139182764	139.182	1.139182764	1	7.27.39
500	400	1.08610012	86.100	1.08610012	1	4.43.31
600	300	1.04719755	47.197	1.04719755	1	2.38.31
700	200	1.020600268	20.600	1.020600268	1	1.10.05
800	100	1.005095057	5.095	1.005095057	1	0.1727
900	00	0	0	0	1	0

2. Pentru zona României

➢ Calculul razelor vectoare

$\rho = R\Psi^{rad}$

φ^0	ψ	$\Psi^{radiani}$	ρ [m]	ρ [cm/n]
40°	50°	0.872664626	5566037.406	110.8
42°	48°	0.837758041	5343395.91	106.4
44°	46°	0.802851455	5120754.408	102
46°	44°	0.76794487	4898112.912	97.5
48°	42°	0.733038285	4675471.416	93.1
50°	40°	0.6981317	4452829.92	88.7

➢ Calculul unghiurilor polare şi a coordonatelor rectangulare

φ^0	λ / δ^0 / ρ^0	20^0 / 160^0	22^0 / 158^0	24^0 / 156^0
40	5566037.406	x=-523064.277 y=1903696.911	x=-5160740.017 y=2085074.311	x=5084828.189 y=2263911.37
42	5343395.910	x= -5021149.707 y=1827549.035	x=-4954310.416 y=2001671.339	x=-4881435.062 y=2173354.915
44	5120754.408	x=- 4811935.13 y=1751401.157	x=-4747880.81 y=1918268.365	x=-4678041.929 y=2082798.458
46	4898112.912	x = -4602720.559 y = 1675253.28	x=-4541451.21 y=1834865.392	x=-4474648.802 y=1992242.003
48	4675471.416	x=-4393505.988 y=1599105.404	x=-4335021.609 y=1751462.42	x=-4271255.674 y=1901685.549
50	4452829.920	x=-4184291.417 y=1522957.527	x=-4128592.009 y=1668059.447	x=-4067862.547 y=1811129.094

26^0 / 154^0	28^0 / 152^0	30^0 / 150^0
x=-5002721.282 y=2439990.201	x=-4914519.329 y=2613096.28	x=-4820329.792 yy=2783018.703
x=-4802612.431 y=2342390.593	x=-4717938.556 y=2508572.428	x=-4627516.601 y=2671697.955
x=-4602503.574 y=2244790.982	x=-4521357.778 y=2404048.575	x=-4434703.404 y=2560377.204
x=-4402394.723 y=217191.374	x=-4324777.005 y=2299524.724	x=-4241890.212 y=2449056.456
x=-4202285.872 y=2049591.766	x=-4128196.232 y=2195000.872	x=-4049077.021 y=2337735.708
x=-4002177.021 y=1951992.158	x=-3931615.459 y=2090477.021	x=-3856263.829 y=2226414.960

➢ Studiul deformaţiei

m=1; p=1

n= $\frac{\psi^{rad}}{\sin\psi}$

φ^0	ψ^0	n=p	D=(n-1)*10^3	a=n	b=1	ω^0
40	50	1.139182764	139.182	1.139182764	1	7.27.39
42	48	1.127314639	127.314	1.127314639	1	6.51.43
44	46	1.116094863	116.094	1.116094863	1	6.17.23
46	44	1.105500061	105.500	1.105500061	1	5.4439
48	42	1.095508528	95.508	1.095508528	1	5.13.28
50	40	1.086100121	86.100	1.086100121	1	4.43.51

Temă:

Să se aplice unei sfere proiectia azimutala dreaptă , echidistantă pe meridian şi paralele în vederea reprezentării reţelei de meridiane şi paralele şi a studiului deformaţiilor în următoarele două situaţii:

1. Pentru o zonă circumpolară
   - întinderea zonei este de le φ = 40ºN până la φ = 90ºN
   - scara este 1 : 4 840 000
   - densitatea retelei cartografice: Δφ = Δλ = 10º

2. Pentru zona României
   - întinderea zonei este de la φ = 42 ºN până la φ = 50 ºN si λ = 20ºE până la λ = 30ºE
   - scara generală este 1 : 4 840 000
   - densitatea reţelei cartogarfice: Δφ = Δλ = 2º

Se lucrează în ipoteza Pământ-Sferă de rază R = 6 378 956 m.

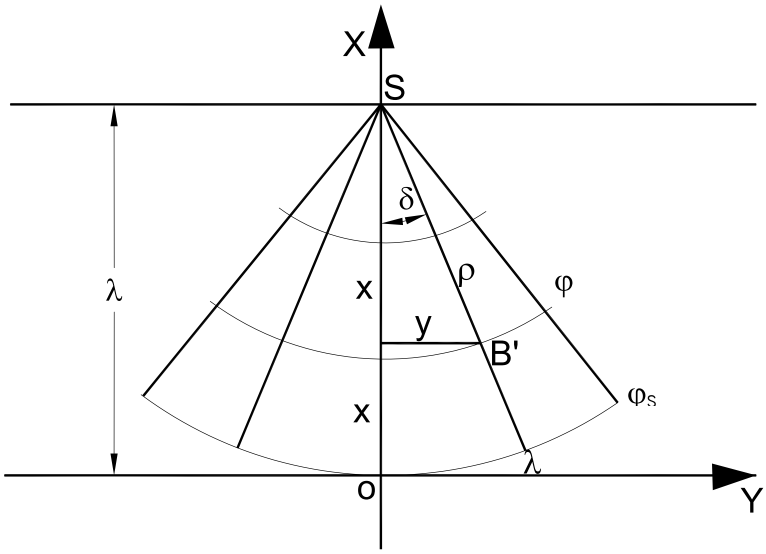
Capitolul 5
Proiecţii conice drepte

Caracteristici generale

În cazul proiecţiilor conice drepte , se consideră că reţeaua de meridiane şi de paralele se reprezintă pe suprafaţa laterală a unui con tangent sau secant sferei.

Elipsoidul, în proiecţiile conice drepte se reprezintă astfel:

- meridianele sunt segmente de dreaptă, care converg spre punctul S;
- paralelele se reprezintă prin arce de cercuri concentrice cu centrul în S.



Coordonatele polare şi rectangulare în proiecţiile conice drepte

Formulele generale ale proiecţiilor conice drepte sunt:

$$\delta = \alpha \cdot L$$

$$\rho = f(B)$$

$$x = -\rho \cdot \cos\delta$$

$$y = \rho \cdot \sin\delta$$

$$m = \frac{ds'_m}{ds_m} = -\frac{d\rho}{MdB}$$

$$n = \frac{ds'_p}{ds_p} = \frac{\rho}{rdL} = \alpha \cdot \frac{\rho}{r} = \frac{\alpha \cdot \rho}{N \cdot \cos B}$$

$$p = m \cdot n$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ sau } tg(45^0 + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Aplicaţie:

Să se aplice principiile proiecţiei conice drepte echidistante pe meridiane (con tangent) în ipoteza Pământ - Sferă pentru reprezentarea reţelei cartografice şi studiul deformaţiilor în următoarele două situaţii:

1. Pentru o zonă circumpolară din emisfera nordică

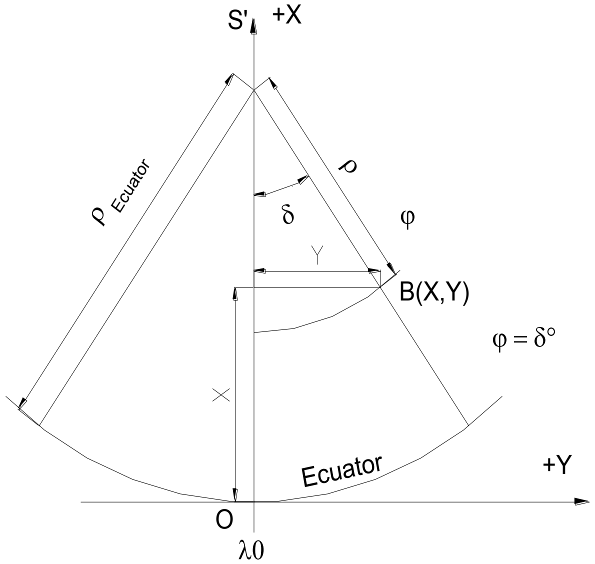
Se dau:

- Intensitatea zonei : $\varphi = 40^0 \rightarrow \varphi = 90^0$
- Scara : 1: 60200000
- Densitatea reţelei de meridiane şi paralele : $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^0$
- Paralelul standard: $\varphi_0 = 60^0 02'$
- Se consideră ca axa OX meridianul $\lambda_0 = 0^0$

2. Pentru zona României

Se dau:

- Intensitatea zonei :
- pe latitudine: $\varphi = 42^0 \rightarrow \varphi = 50^0$ N
- pe longitudine $\lambda = 20^0 \rightarrow \lambda = 30^0$ EGr
- Scara : 1: 6020000
- Densitatea reţelei de meridiane şi paralele : $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 2^0$
- Paralelul standard: $\varphi_0 = 46^0 02'$
- Se consideră ca axa OX meridianul $\lambda_0 = 20^0$



Formule de calcul utilizate:

Pentru coordonate

$\delta = \alpha\,(\lambda - \lambda_0)^{\text{rad}}$

α = constantă $= \sin\varphi_0$

$\rho = c - R\,\varphi^{\text{rad}}$

$c = R \operatorname{ctg} \varphi_0 + R\,\varphi_0^{\text{rad}}$

$X = c - \rho \cos\delta$

$Y = \rho \sin\delta$

Pentru deformaţii

$m = 1$

$$n = \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi}$$

p = n

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \; tg\left(450 + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

a= max (m,n)
b = min (m,n)

Soluţii:

1. Zonă circumpolară din emisfera nordică

1.1 Calculul coordonatelor plane polare (ρ,δ)

Elementele necesare pentru calculul lui ρ şi δ

α	R	C
0.866316	6367558	10343662.17

Calculul lui δ

λ	δ	λ	δ
-180	-2.7216124	180	2.7216124
-170	-2.5704117	170	2.5704117
-160	-2.4192111	160	2.4192111
-150	-2.2680104	150	2.2680104
-140	-2.1168097	140	2.1168097
-130	-1.965609	130	1.965609
-120	-1.8144083	120	1.8144083
-110	-1.6632076	110	1.6632076
-100	-1.5120069	100	1.5120069
-90	-1.3608062	90	1.3608062
-80	-1.2096055	80	1.2096055
-70	-1.0584048	70	1.0584048
-60	-0.9072041	60	0.9072041
-50	-0.7560035	50	0.7560035
-40	-0.6048028	40	0.6048028
-30	-0.4536021	30	0.4536021
-20	-0.3024014	20	0.3024014
-10	-0.1512007	10	0.1512007
0	0		

Calculul lui ρ

φ	φ^{rad}	ρ [m]	ρ [cm/n]
40	0.698131701	5898268.072	9.80
50	0.872664626	4786919.548	7.95
60	1.047197551	3675571.023	6.11
70	1.221730476	2564222.499	4.26
80	1.396263402	1452873.975	2.41
90	1.570796327	341525.451	0.57

1.2 Calculul coordonatelor rectangulare plane (X, Y) pe paralelul $\varphi = 40^0$

Calculul coordonatelor X şi Y unde $\rho_{40^0} = 5898268,072$

λ	δ	X [m]	Y [m]	X [cm/n]	Y [cm/n]
-180	-2.721612438	15729353.1	-2404973.908	26.13	-3.99
-170	-2.570411747	15305657.6	-3188756.358	25.42	-5.30
-160	-2.419211056	14768738.8	-3899777.359	24.53	-6.48
-150	-2.268010365	14130847.9	-4521812.742	23.47	-7.51
-140	-2.116809674	13406540.6	-5040668.825	22.27	-8.37
-130	-1.965608983	12612344.1	-5444506.285	20.95	-9.04
-120	-1.814408292	11766380.5	-5724110.305	19.55	-9.51
-110	-1.663207601	10887953.2	-5873100.846	18.09	-9.76
-100	-1.51200691	9997106.14	-5888078.223	16.61	-9.78
-90	-1.360806219	9114166.86	-5768700.68	15.14	-9.58
-80	-1.209605528	8259282.37	-5517692.189	13.72	-9.17
-70	-1.058404837	7451959.52	-5140780.294	12.38	-8.54
-60	-0.907204146	6710619.91	-4646565.419	11.15	-7.72
-50	-0.756003455	6052179.52	-4046324.621	10.05	-6.72
-40	-0.604802764	5491662.73	-3353754.271	9.12	-5.57
-30	-0.453602073	5041859.48	-2584657.529	8.38	-4.29
-20	-0.302401382	4713033.45	-1756583.742	7.83	-2.92
-10	-0.151200691	4512687.81	-888428.0026	7.50	-1.48
0	0	4445394.1	0	7.38	0.00
10	0.151200691	4512687.81	888428.0026	7.50	1.48
20	0.302401382	4713033.45	1756583.742	7.83	2.92
30	0.453602073	5041859.48	2584657.529	8.38	4.29
40	0.604802764	5491662.73	3353754.271	9.12	5.57
50	0.756003455	6052179.52	4046324.621	10.05	6.72
60	0.907204146	6710619.91	4646565.419	11.15	7.72
70	1.058404837	7451959.52	5140780.294	12.38	8.54
80	1.209605528	8259282.37	5517692.189	13.72	9.17
90	1.360806219	9114166.86	5768700.68	15.14	9.58
100	1.51200691	9997106.14	5888078.223	16.61	9.78
110	1.663207601	10887953.2	5873100.846	18.09	9.76
120	1.814408292	11766380.5	5724110.305	19.55	9.51
130	1.965608983	12612344.1	5444506.285	20.95	9.04
140	2.116809674	13406540.6	5040668.825	22.27	8.37
150	2.268010365	14130847.9	4521812.742	23.47	7.51
160	2.419211056	14768738.8	3899777.359	24.53	6.48
170	2.570411747	15305657.6	3188756.358	25.42	5.30
180	2.721612438	15729353.1	2404973.908	26.13	3.99

1.3 Studiul deformaţiilor

m = 1

φ	n = p	a	b	ω
40	1.047548	1.047548	1	2.6612896

50	1.013193	1.013193	1	0.7509483
60	1.000134	1.000134	1	0.0076932
70	1.020017	1.020017	1	1.1355579
80	1.138312	1.138312	1	7.4172675

2. Zona României

2.1 Calculul coordonatelor plane polare (ρ, δ)

Elementele necesare pentru calculul lui ρ şi δ

α	R	C
0.719582	6367558	11259211.15

Calculul lui δ

λ	δ
20	0
22	0.0251182
24	0.0502363
26	0.0753545
28	0.1004726
30	0.1255908

Calculul lui ρ

φ	φ^{rad}	ρ [m]	ρ [cm/n]
42	0.733038286	6591547.354	109.49
44	0.767944871	6369277.649	105.80
46	0.802851456	6147007.944	102.11
48	0.837758041	5924738.239	98.42
50	0.872664626	5702468.534	94.73

2.2 Calculul coordonatelor rectangulare (X, Y) pentru toate nodurile reţelei

	λ	20^0	22^0	24^0	26^0	28^0	30^0
φ	ρ δ	0.00000000	0.02511816	0.05023632	0.07535448	0.10047263	0.12559079
42^0	6591547.354	4667663.801	4669743.068	4675979.555	4686369.329	4700905.835	4719579.902
		0.000	165550.122	330995.801	496232.658	661156.447	825663.121
44^0	6369277.649	4889933.506	4891942.659	4897968.849	4908008.276	4922054.605	4940098.974
		0.000	159967.704	319834.485	479499.487	638861.978	797821.419
46^0	6147007.944	5112203.211	5114142.250	5119958.144	5129647.223	5143203.375	5160618.047
		0.000	154385.285	308673.170	462766.317	616567.509	769979.716
48^0	5924738.239	5334472.916	5336341.841	5341947.438	5351286.169	5364352.144	5381137.119
		0.000	148802.866	297511.855	446033.146	594273.040	742138.014
50^0	5702468.534	5556742.621	5558541.432	5563936.732	5572925.116	5585500.914	5601656.192
		0.000	143220.448	286350.539	429299.975	571978.571	714296.312

Coordonatele X , Y reduse la scară

	λ	20^0	22^0	24^0	26^0	28^0	30^0
φ	ρ δ	0.0000000	0.0251183	0.0502363	0.0753545	0.1004726	0.1255908
42^0	6591547.354	77.54	77.57	77.67	77.85	78.09	78.40
		0.00	2.75	5.50	8.24	10.98	13.72

44^0	6369277.649	81.23	81.26	81.36	81.53	81.76	82.06
		0.00	2.66	5.31	7.97	10.61	13.25
46^0	6147007.944	84.92	84.95	85.05	85.21	85.44	85.72
		0.00	2.56	5.13	7.69	10.24	12.79
48^0	5924738.239	88.61	88.64	88.74	88.89	89.11	89.39
		0.00	2.47	4.94	7.41	9.87	12.33
50^0	5702468.534	92.30	92.33	92.42	92.57	92.78	93.05
		0.00	2.38	4.76	7.13	9.50	11.87

2.3 Studiul deformaţiilor

m = 1

φ	n = p	a	b	ω
42	1.00235473	1.00235473	1	0.1348
44	1.00060718	1.00060718	1	0.0348
46	1.00000006	1.00000006	1	0.0000
48	1.00061221	1.00061221	1	0.0351
50	1.00254281	1.00254281	1	0.1455

Capitolul 6
Câteva probleme ce se pot rezolva pe hărţi și planuri topografice

Harta este o reprezentare micşorată a întregii suprafeţe a planetei sau numai a unei porţiuni din ea, la o anumită scară şi într-o anumită proiecţie.

Planul topografic este o reprezentare a unor suprafeţe mici fără a fi afectată practic de forma sferică a Pământului.

Aceste reprezentări se realizează cu ajutorul semnelor convenţionale. Semnele convenţionale sunt simboluri ce marchează pe hartă sau plan poziţiile unor obiecte sau fenomene, dar şi caracteristicile calitative şi cantitative ale acestora.

Determinarea coordonatelor rectangulare plane şi geografice ale unor puncte de pe hartă şi raportarea pe hartă a unui punct de coordonate cunoscute

Determinarea coordonatelor geografice

Pentru a determina coordonatele geografice ale unui punct A situat pe o hartă la scara 1:25000, putem să ducem din acest punct două segmente de dreaptă perpendiculare pe cadrul geografic (AQ perpendiculară pe arcul de meridian şi AP perpendiculară pe arcul de paralel).

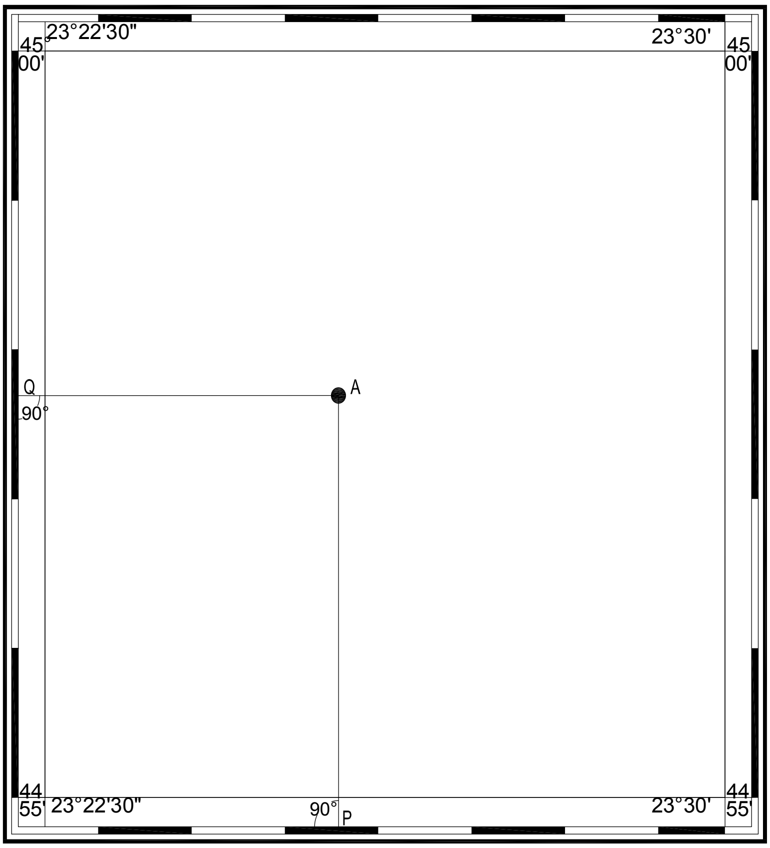
Cadrul geografic este divizat în segmente alternative albe şi negre de câte un minut. Valorile latitudinii şi longitudinii sunt notate la colţurile trapezului.

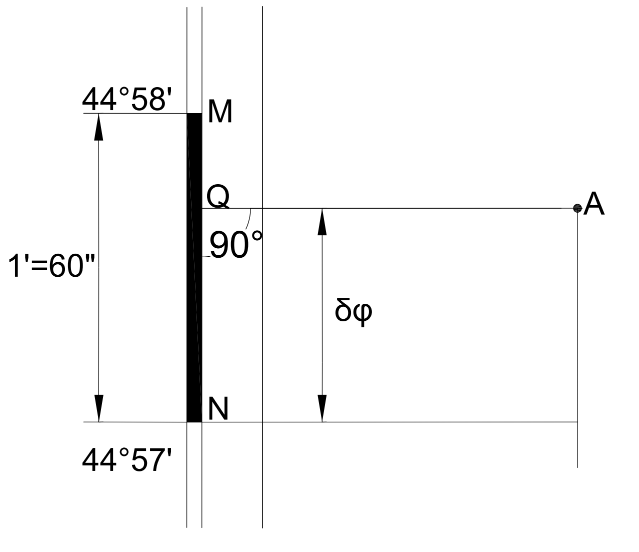
Calculul latitudinii φ

Se observă că latitudinea punctului A este cuprinsă între 44°57' şi 44°58', deci trebuie să calculăm valoarea în secunde a segmentului $\delta\varphi$.

Se va măsura cu rigla pe hartă, lungimea unui segment de un minut de latitudine, în milimetri adică MN= 74mm. Ştim că la această valoare măsurată îi corespunde o valoare unghiulară de 60". De asemenea se va măsura şi lungimea segmentului QN =17.5 mm. Valoarea unghiulară a lui $\delta\varphi$ va fi :

$$74mm............................60''$$
$$17.5mm..........................\delta\varphi$$
$$\delta\varphi = \frac{17.5mm \cdot 60''}{74mm} \cong 14''$$





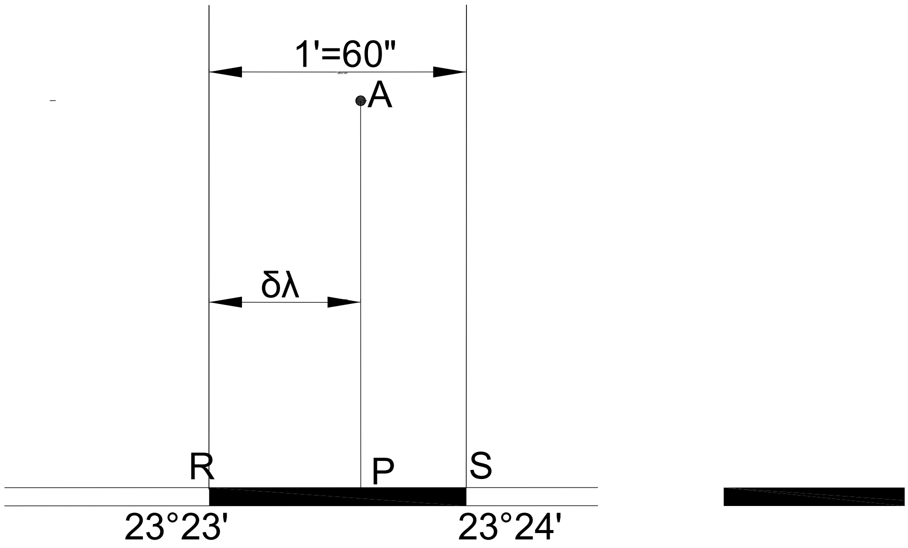
Calculul longitudinii λ

În mod asemănător se determină şi longitudinea. De acestă dată vom măsura segmentele:RS = 52mm şi reprezintă 60" de longitudine şi RP=38 mm .

$52mm............................60''$

$\underline{38mm...........................\delta\lambda}$

$$\delta\varphi = \frac{38mm \cdot 60''}{52mm} \cong 44''$$



Determinarea coordonatelor rectangulare

Caroiajul kilometric, nu este paralel cu cadrul interior, ci cu proiecţia meridianului axial al fiecărui fus sferic (pentru liniile verticale) şi cu proiecţia ecuatorului (pentru liniile orizontale).

Coordonatele recatngulare ale unui punct A se calculează cu relaţiile :

$X_A = X' + \delta x$

$Y_A = Y' + \delta y$

Unde X' şi Y'sunt coordonatele colţului din stânga al pătratului în care se găseşte punctul A.

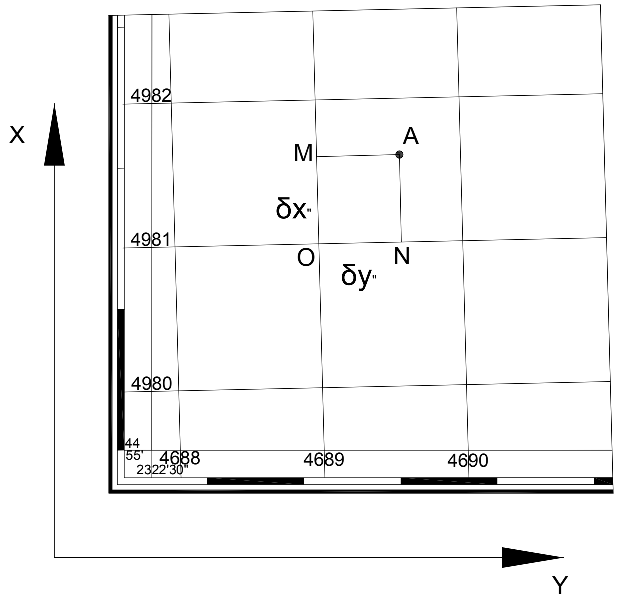
$X' = 4981km$

$Y' = 4689km$

Se observă că valoarea lui X_A este cuprinsă între 4981 km şi 4982 km, iar valoarea lui Y_A între 4689 km şi 4680 km. Pentru a putea calcula coordonatele punctului A trebuie să determinăm mai întâi δx şi δy .

Vom măsura cu rigla latura unui pătrat şi vom transforma valoarea măsurată, în funcţie de scara planului în valoarea corespunzătoare de pe teren.

Pe o hartă la scara 1:25000, latura unui pătrat este de 40 mm iar valoarea care ii corespunde pe teren este de 1 km , adică 1000 m.



Se vor măsura cu rigla pe hartă , distanţele MA , NA şi aplicând regula de trei simplă se vor obţine necunoscutele δx şi δy .

$$40mm............................1000m$$
$$\underline{35mm................................\delta x}$$
$$\delta x = \frac{35mm \cdot 1000m}{40mm} = 875m = 0.875km$$

$$40mm............................1000m$$
$$\underline{23mm................................\delta y}$$
$$\delta y = \frac{23mm \cdot 1000m}{40mm} = 575m = 0.575km$$

$$X_A = X' + \delta x = 4981km + 0.875km = 4981.875km$$
$$Y_A = Y' + \delta y = 4689km + 0.575km = 4689.575km$$

<u>Raportarea pe hartă a unui punct de coordonate cunoscute</u>

Se dă punctul P de coordonate X=4982.538 km şi Y’ 4691.075 km.

Pentru a raporta acest punct pe o hartă la scara 1:25000 se procedează astfel:

- observăm ca punctul P se afla in pătratul ce are la colţul din stânga coordonatele X’= 4982 km şi Y’=4691 km.
- Coordonatele punctului P le putem scrie şi sub următoarea formă:

$$X_P = X' + \delta x = 4982km + 0.538km$$
$$Y_P = Y' + \delta y = 4691km + 0.075km$$

Din aceste relaţii rezultă δx şi δy .

$$\delta x = \frac{0.538km}{25000 \cdot 10^{-6}} = 21.52mm$$

$$Y_P = \frac{0.075km}{25000 \cdot 10^{-6}} = 3mm$$

Determinarea distanţei dintre două puncte

Distanţa dintre două puncte se poate calcula fie grafic prin citirea ei pe hartă şi transformarea ei la valoarea din teren, fie din coordonatele rectangulare ale punctelor ce o definesc.

De exemplu distanţa AP se determină astfel:

- măsurăm cu rigla pe plan distanţa dintre cele două puncte şi obţinem $d_{AP} = 65.2mm$

  $D_{AP} = 65.2mm \cdot n$

- $n = 25000$

  $D_{AP} = 65.2mm \cdot 25000 = 1630m$

Din coordonate distanţa dintre cele două puncte se determină cu formula:

$$D_{AP} = \sqrt{(X_P - X_A)^2 + (Y_P - Y_A)^2} = 1640m$$

Capitolul 7

Teste grilă

1. Cartografia matematică se ocupă cu :
a) studiul metodelor şi procedeelor de obţinere a planurilor şi hărţilor;
b) măsurarea suprafeţei terestre;
c) studiul proiecţiilor cartografice şi al problemelor referitoare la construirea reţelelor cartografice.
2. Reţeaua cartografică este formată din :
a) un ansamblu de meridiane şi paralele;
b) linii drepte şi paralele;
c) intersecţia pe Glob a meridianelor şi paralelelor.
3. Latitudinea este:
a) unghiul format de normala dusă într-un punct dat cu planul ecuatorului;
b) unghiul format de raza sferei terestre cu verticala locului;
c) unghiul format de raza sferei cu axa polilor.
4. Latitudinea are următoarele valori:
a) 90^0 la ecuator şi 0^0 la poli;
b) 180^0 la ecuator şi 0^0 la poli;
c) 0^0 la ecuator şi $\pm 90^0$ la poli;
d) 90^0 la ecuator şi 180^0 la poli.
5. Punctul central al proiecţiei este:
a) un punct aflat la intersecţia meridianelor cu paralelele;
b) un punct care se află în centrul suprafeţei de reprezentat;
c) un punct oarecare de pe hartă.
6. Longitudinea este:
a) unghiul format de raza sferei terestre cu planul ecuatorului;
b) unghiul format de raza sferei terestre cu axa polilor;
c) unghiul format de planul ce trece prin meridianul origine cu planul ce trece prin meridianul dat;
d) unghiul format de raza sferei terestre cu verticala locului;
7. După natura elementelor care nu se deformează proiecţiile se clasifică astfel:
a) proiecţii conforme, echivalente, echidistante, arbitrare;
b) proiecţii drepte, oblice, transversale;
c) proiecţii conice, azimutale, cilindrice.
8. După latitudinea φ_0 a polului Q_0 al sistemului de coordonate sferice polare avem:
a) proiecţii conforme, echivalente, echidistante, arbitrare;
b) proiecţii drepte, oblice, transversale;
c) proiecţii conice, azimutale, cilindrice.
9. În cazul proiecţiilor polare latitudinea φ_0 are următoarele valori:
a) $\varphi_0 = 0^0$;
b) $\varphi_0 = 90^0$;
c) $\varphi_0 = 180^0$;
d) $0^0 < \varphi_0 < 90^0$.
10. Proiecţiile conforme păstrează constante :
a) ariile;

b) lungimile;
c) unghiurile;
d) ariile, lungimile şi unghiurile.

11. În proiecţiile azimutale reţeaua normală este reprezentată prin:
a) familii de drepte paralele şi perpendiculare;
b) cercuri concentrice şi drepte concurente în centrul cercurilor;
c) arce de cercuri concentrice şi segmente de dreaptă care ies din centrul arcelor de cerc.

12. Scara generală este raportul dintre:
a) un element liniar de pe elipsoidul pământesc micşorat de n ori şi corespondentul lui de pe elipsoidul neredus;
b) un element liniar de pe hartă şi corespondentul său de pe elipsoi;
c) distanţa infinit mică din planul de proiecţie şi distanţa infinit mică , ce îi corespunde pe elipsoid sau sferă;
d) aria paralelogramului infinit mic şi aria dreptunghiului infinit mic care îi corespunde pe elipsoid sau sferă.

13. Dacă modulul de deformaţie liniară μ=1 înseamnă că:
a) $ds' > ds$ şi se produce o alungire a imaginii din planul de proiecţie, adică o deformaţie pozitivă a lungimii;
b) $ds' < ds$ şi se produce o micşorare a lungimii în planul de proiecţie, deci o deformaţie negativă;
c) $ds' = ds$ rezultă că lungimea nu se deformează.

14. Modulul de deformaţie areolară este raportul dintre:
a) un element liniar de pe elipsoidul pământesc micşorat de n ori şi corespondentul lui de pe elipsoidul neredus;
b) un element liniar de pe hartă şi corespondentul său de pe elipsoi;
c) distanţa infinit mică din planul de proiecţie şi distanţa infinit mică , ce îi corespunde pe elipsoid sau sferă;
d) aria paralelogramului infinit mic şi aria dreptunghiului infinit mic care îi corespunde pe elipsoid sau sferă.

15. Care dintre următoarele afirmaţii cu privire la valorile numerice ale modulului de deformaţie areolară sunt false:
a) p=1, adică ariile din planul de proiecţie sunt egale cu ariile corespunzătoare de pe suprafaţa elipsoidului sau sferei. Deci nu se deformează;
b) p<1 , adică ariile din planul de proiecţie sunt mai mici decât ariile corespunzătoare de pe elipsoid sau sferă;
c) p>1, rezultă că deformaţiile areolare sunt negative.

16. Punctul de perspectivă se poate defini astfel:
a) este punctul de unde se consideră că pleacă razele proiectate;
b) este punctul unde se intersectează meridianul origine cu ecuatorul;
c) este punctul de intersecţie al planului tangent cu sfera terestră.

17. Proiecţia stereografică pe un plan tangent este:
a) o proiecţie cilindrică;
b) o proiecţie azimutală perspectivă;
c) o proiecţie conică;
d) o proiecţie pseudocilindrică.

18. Care din următoarele afirmaţii cu privire la proiecţia stereografică pe un plan tangent este falsă ?
a) unghiurile nu se deformează;
b) în polul proiecţiei se deformează ariile şi lungimile;

c) deformaţiile de orice fel, depind numai de depărtarea punctului faţă de polul proiecţiei, de unde rezultă că izoliniile deformaţiilor au aspectul unor cercuri concentrice, cu centrul în polul Q_0.

19. În proiecţia stereografică pe planu unic secant Braşov , pentru orientarea elipsoidului , s-a considerat ca punct astronomic fundamental:

a) Observatorul astronomic de la Pulkovo;
b) pilastrul de beton al Observatorului astronomic militar din Bucureşti;
c) polul proiecţiei.

20. Una din următoarele afirmaţii este falsă:

a) în proiecţia stereografică pe plan unic secant Braşov nu se deformează ariile şi lungimile;
b) în planul tangent al proiecţiei stereografice pe plan unic secant Braşov toate deformaţiile sunt pozitive;
c) în ambele plane ale acestei proiecţii (tangent şi secant) deformaţiile depind numai de depărtarea punctului faţă de originea sistemului de axe.

21. Din punct de vedere al deformărilor, proiecţia stereografică 1970 este:

a) arbitrară;
b) echivalentă;
c) echidistantă pe meridiane;
d) conformă.

22. M este:

a) raza de curbură a elipsei meridiane într-un punct A de latitudine φ;
b) raza de curbură a paralelului ce trece printr-un punct A;
c) raza de curbură a primului vertical în punctul A.

23. În proiecţia Gauss-Kruger se poate realiza reprezentarea plană a întregului elipsoid de rotaţie, prin împărţirea în :

a) fuse de 6° latitudine şi 4° longitudine;
b) fuse de 4° latitudine şi 10° longitudine;
c) fuse de 4° latitudine şi 6° longitudine;
d) fuse de 6° latitudine şi 10° longitudine.,

24. Trapezul de hartă ce are nomenclatura L-34-79-119-B este la scara:

a) 1:100.000
b) 1:1.000.000
c) 1:2000
d) 1:50.000

25. Proiecţia Gauss-Kruger este:

a) o proiecţie arbitrară;
b) o proiecţie echivalentă;
c) o proiecţie conformă;
d) o proiecţie echidistantă.

26. Reţeaua kilometrică este formată din:

a) drepte paralele la axele de coordonate rectangulare plane;
b) cercuri concentrice;
c) arce de cercuri concentrice şi segmente de dreaptă care ies din centrul arcelor de cerc.

27. Coordonatele geografice ale unui punct de pe hartă se determină grafic folosind:

a) reţeaua kilometrică;
b) reţeaua de meridiane şi paralele;
c) reţeaua cartografică.

28. Pot fi făcute măsurători unghiulare, cu aproximaţii care rezultă din erori grafice obişnuite, pe hărţile:

a) în proiecţii oblice;
b) în proiecţii transversale;
c) în proiecţii conforme;
d) în proiecţii echidistante.
29. În proiecţiile conice meridianele se reprezintă prin :
a) arce de cerc;
b) linii drepte care radiază din pol;
c) cercuri concentrice;
d) linii drepte paralele.
30. Proiecţia policonică simplă, din punct de vedere al deformărilor este:
a) conformă;
b) arbitrară;
c) echidistantă pe meridiane;
d) echivalentă.

RĂSPUNSURI

1	d	11	b	21	d
2	c	12	a	22	a
3	a	13	c	23	c
4	c	14	d	24	d
5	b	15	c	25	c
6	c	16	a	26	a
7	a	17	b	27	b
8	b	18	b	28	c
9	b	19	b	29	b
10	c	20	a	30	d